LIBRARY OF CONGRESS
1800

Class AS 182
Book .B35

SMITHSONIAN DEPOSIT

2/3

2656
4600
D

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Berlin

69

JAHRGANG 1928

PHYSIKALISCH-MATHEMATISCHE KLASSE

VERZEICHNIS DER MITGLIEDER DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN AM 1. JANUAR 1928
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES JAHRESTAGES KÖNIG FRIEDRICHS II. AM 26. JANUAR 1928
ÖFFENTLICHE SITZUNG ZUR FEIER DES LEIBNIZISCHEN JAHRESTAGES AM 5. JULI 1928
VERZEICHNIS DER VOM 1. DEZEMBER 1927 BIS 30. NOVEMBER 1928 EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN

STÜCK I—XXXIII. MIT SECHS TAFELN

Library of Congress
MAY 22 1929
Smithsonian Deposit

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

AS182
.B35

INHALT

	Seite
Verzeichnis der Mitglieder der Akademie der Wissenschaften am 1. Januar 1928	I
Öffentliche Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II. am 26. Januar 1928	XVII
Planck: Ansprache	XVII
Planck: Personalveränderungen	XXIII
von Wilamowitz-Moellendorff: Bericht über die Sammlung der griechischen Inschriften	XXIV
Guthnick: Bericht über die Geschichte des Fixsternhimmels	XXVII
Wiegand: Untergang und Wiedererstehen antiker Kulturdenkmäler	XXIX
Planck: Schlußwort	XXXVII
Jahresbericht über die griechisch-römische Altertumskunde	XXXVIII
Jahresbericht über die Sammlung der lateinischen Inschriften	XXXVIII
Jahresbericht über das griechische Münzwerk	XXXIX
Jahresbericht über die Prosopographia imperii Romani saec. I—III	XXXIX
Jahresbericht über die Preußische Kommission	XL
Jahresbericht über die Herausgabe der Werke von Weierstrass	XL
Jahresbericht über die Kant-Ausgabe	XL
Jahresbericht über die Ibn-Saad-Ausgabe	XLI
Jahresbericht über das Wörterbuch der ägyptischen Sprache	XLII
Jahresbericht über das Tierreich und den Nomenclator animalium generum et subgenerum	XLII
Jahresbericht über das »Pflanzenreich«	XLIII
Jahresbericht über die Geschichte des Fixsternhimmels	XLIII
Jahresbericht über die Leibniz-Ausgabe	XLIV
Jahresbericht über das Corpus Medicorum Graecorum	XLIV
Jahresbericht über die Deutsche Literaturzeitung	XLV
Jahresbericht der Deutschen Commission	XLV
Jahresbericht über die Forschungen zur neuhochdeutschen Sprach- und Bildungsgeschichte	LVII
Jahresbericht der Orientalischen Kommission	LVIII
Jahresbericht über die Spanische Kommission	LXI
Jahresbericht der Oskar-Mann-Nachlaß-Kommission	LXI
Jahresbericht des Vocabularium Jurisprudentiae Romanae	LXI
Jahresbericht der Hermann-und-Elise-geb.-Heckmann-Wentzel-Stiftung	LXI
Jahresbericht der akademischen Commission für das Wörterbuch der deutschen Rechtssprache	LXII
Jahresbericht der Kirchenväter-Kommission	LXIV
Jahresbericht über die Bearbeitung der Flora von Papuasien und Mikronesien	LXV
Jahresbericht über die Texte zur Geschichte des römischen und kanonischen Rechts im Mittelalter	LXV
Jahresbericht über die Forschung der Geschichte unserer Nationalitätsgrenze (Forschungen zum Deutschtum der Ostmarken)	LXV
Jahresbericht über das Deutsche Biographische Jahrbuch	LXVI
Öffentliche Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages am 5. Juli 1928	LXVII
Rubner: Ansprache	LXVII
Rubner: Der Kampf des Menschen um das Leben	LXVIII
Petersen: Gedächtnisrede auf Hermann Abert	CVII
Pompeckj: Gedächtnisrede auf Wilhelm von Branca	CXIV
Preisaufgabe aus dem Ellerschen Legat	CXXXVII
Preisaufgabe aus dem von Miloszewskyschen Legat	CXXXVIII
Verleihungen der Leibniz-Medaille	CXXXIX
Verzeichnis der vom 1. Dezember 1927 bis 30. November 1928 eingegangenen Druckschriften	CXLI

Inhalt

Seite

NERNST: Über die Berechnung der elektrolytischen Dissoziation aus der elektrischen Leitfähigkeit 4
A. BRAUER: Über Sequenzen von Potenzresten 9
A. HAMMERSTEIN: Über die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen 17
Adresse an Hrn. ADOLF ERMAN zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 26. Januar 1928 22
K. REINHARDT: Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche . . 26
L. E. J. BROUWER: Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus 48
FICK: Bewegungsumfang im Schultergelenk 53
PENCK: Die Ursachen der Eiszeit 76
K. DÖRGE: Über den Fundamentalsatz der Algebra 87
A. FRAENKEL: Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen 90
G. PÓLYA: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül . . 96
SCHUR: Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe 100
RUBNER: Über die physiologische Bedeutung wichtiger Bestandteile der Vegetabilien mit besonderer Berücksichtigung des Lignins 127
K. REINHARDT: Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope 150
Adresse an Hrn. ALOIS BRANDL zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 3. Mai 1928. . 157
RUBNER: Die Welternährung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft 159
LUDENDORFF: Über die Abhängigkeit der Form der Sonnenkorona von der Sonnenfleckenhäufigkeit 185
EINSTEIN: RIEMANN-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus 217
Dem Royal College of Physicians in London zur dreihundertjährigen Gedenkfeier für WILLIAM HARVEY am 14. Mai 1928 222
EINSTEIN: Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität 224
G. PÓLYA: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete 228
E. HOPF: Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern 233
Adresse an Hrn. ALBRECHT PENCK zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 17. Juni 1928 247
GUTHNICK: Über die Berücksichtigung der Extinktion bei lichtelektrischen Messungen 250
GUTHNICK: Bericht über den Stand der Vorbereitungen zur photographischen Überwachung des Himmels 258
KEIBEL: Zur Augenentwicklung der Beuteltiere 272
G. PÓLYA: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (Zweite Mitteilung.) 280
E. KAMKE: Verallgemeinerungen des JORDANschen Kurvensatzes und stetige Winkelfunktionen 283
v. FICKER: Bemerkungen über die meteorologischen Verhältnisse Teneriffas 303
HABERLANDT: Zur Entwickelungsphysiologie des Periderms 317
LANDAU: Der PICARD-SCHOTTKYsche Satz und die BLOCHsche Konstante. Zweite Abhandlung 339
P. KOEBE: RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Zweite Mitteilung) 345
P. KOEBE: RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Dritte Mitteilung) 385
Adresse an Hrn. MAX RUBNER zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 25. Juli 1928 . . 443
FICK: Beobachtungen am Orangkehlsack 445
HABERLANDT: Die Lage des Zellkerns in der Eizelle der Angiospermen und ihre physiologische Bedeutung 450
HOFMANN: Nitrit-Nitratbildung aus Ammoniak und Sauerstoff an alkalischen Oberflächen 461
R. WEITZENBÖCK: Differentialinvarianten in der EINSTEINschen Theorie des Fernparallelismus 466
G. SZEGÖ: Verallgemeinerung des ersten BIEBERBACHschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete 477
J. G. HAGEN: Die Geschichte des Nebels »Barnard 86« 482
BODENSTEIN: Kettenreaktionen 490
HABER und H.-D. Graf von SCHWEINITZ: Über Zündung des Knallgases durch Wasserstoffatome 499
BIEBERBACH und SCHUR: Über die MINKOWSKIsche Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen 510
PASCHEN: Das erste Funkenspektrum des Quecksilbers Hg II 536
Adresse an Hrn. WILHELM OSTWALD zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 19. Dezember 1928 548
Namen- und Sachregister 550

1928 I—III

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 12. Januar. (S. 1)
Klassensitzung am 19. Januar. (S. 2)
NERNST: Über die Berechnung der elektrolytischen Dissoziation aus der elektrischen Leitfähigkeit. (S. 4)
A. BRAUER: Über Sequenzen von Potenzresten. (S. 9)
A. HAMMERSTEIN: Über die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen. (S. 17)
Gesamtsitzung am 2. Februar. (S. 21)
Adresse an Hrn. ADOLF ERMAN zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 26. Januar 1928. (S. 22)

Library of Congress
AUG 6 - 1928
Smithsonian Deposit

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

I. Gesamtsitzung. 12. Januar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Lenz sprach über Preußen und der Vatikan 1864—1870.

Die Periode von 1864 bis 1870 erscheint, je nachdem man sie von Berlin oder von Rom her anschaut, in sehr verschiedenem Licht. Es sind die Jahre, da Bismarck sein Reich errichtete und der Staat der römischen Kirche, der älteste der europäischen Christenheit, zusammenbrach. Zwei Ketten von Begebenheiten, die in ihrem parallelen Lauf auf den ersten Blick einander kaum zu berühren scheinen. In der Tat aber hängen sie aufs engste zusammen, zeitlich wie inhaltlich, von seiten der äußeren wie der inneren Politik. Hier wie überall sind nur durch Zusammenschau, durch die Einordnung jeder Einzelheit in die Gesamtheit der Zeitgeschichte das Ganze wie das Einzelne, Handlung wie Handelnde zu verstehen.

2. Das korrespondierende Mitglied Hr. Friedrich Oltmanns übersandte sein Werk »Pflanzenleben des Schwarzwaldes, Bd. I, Text, und Bd. II, Bilder und Karten (Freiburg i. Br. 1927).

3. Vorgelegt wurde das Buch von Otto Kern »Hermann Diels und Carl Robert« (Leipzig 1927);

4. ferner die 11. Lief. der 3. Abt. des XI. Bandes des »Deutschen Wörterbuches« von Jacob Grimm und Wilhelm Grimm (Leipzig 1927) und die 1. Lief. des II. Bandes des »Hessen-Nassauischen Volkswörterbuches«, bearbeitet von Luise Berthold (Marburg a. L. 1927).

5. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt:

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse

500 *RM* für die Fortführung der Arbeiten des Hrn. Engler an der »Flora von Papuasien«,

200 *RM* für Arbeiten an der mathematischen Bibliographie des verstorbenen Hrn. Dr. Valentin,

400 *RM* für die Fortführung der »Opuscula Ichneumonologica« des Hrn. Prof. Schmiedeknecht in Blankenburg i. Th.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Johan Ludvig Heiberg in Kopenhagen am 4. Januar 1928 durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 6. März.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

II. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 19. Januar

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Nernst legte eine Mitteilung vor: »Über die Berechnung der elektrolytischen Dissoziation aus der elektrischen Leitfähigkeit«.

Es wird der Nachweis geführt, daß die Assoziationsgrade von nach dem Typus des Chlorkaliums zusammengesetzten Elektrolyten für gewisse einfache Fälle auch in der Änderung der molekularen Leitfähigkeit in deutliche Erscheinung treten, und zwar in denselben Beträgen, wie sie vom Verf. kürzlich aus den Verdünnungswärmen und den Gefrierpunktsdepressionen berechnet worden sind. Damit sind also die in neuerer Zeit vielfach zu Unrecht angefochtenen Grundformeln der elektrolytischen Dissoziationstheorie, natürlich unter Berücksichtigung des Debye-Effekts, d. h. der elektrostatischen Wechselwirkung der Ionen, wieder zu ihrem Rechte gekommen.

*2. Hr. Warburg sprach über die Photolyse von Jodwasserstofflösungen in Hexan und in Wasser, nach Versuchen mit Hrn. Dr. W. Rump (ersch. a. a. O.).

IH-Lösungen in Hexan folgen dem Äquivalentgesetz von Einstein, bei wässerigen Lösungen nimmt die pro absorbierte g-cal. zersetzte Zahl von Molen III (ϕ) 1) entgegen dem Äquivalentgesetz mit wachsender Wellenlänge ab, 2) mit abnehmender Konzentration stark ab. Die Ursache von 2) ist die elektrolytische Dissoziation der wässerigen Lösung. Erniedrigt man die Konzentration auf 0,01 Mol IH-Liter, so nimmt ϕ für Hexanlösungen nur wenig ab, verschwindet aber für wässerige Lösungen. Da diese bei der Konzentration 0,01 vollständig dissoziiert sind, so folgt, daß aus Jodionen durch Bestrahlung kein Jod gebildet wird. Die Absorption durch die Jodionen geht also der photochemischen Wirkung verloren, die ϕ-Werte erscheinen zu klein. 1) gilt wahrscheinlich auch für die wahren ϕ-Werte, so daß es hier nicht nur auf die Zahl, sondern auch auf die Größe der absorbierten Quanten ankommt. Die Ursache mag sein, daß IH mit Hexan keine Verbindung eingeht, mit Wasser aber ein Hydrat bildet.

3. Hr. Schur legte eine Arbeit von Hrn. Alfred Brauer in Berlin vor: Über Sequenzen von Potenzresten.

Auf Grund eines Satzes der Kombinatorik, den man Hrn. van der Waerden verdankt, beweist der Verfasser, daß für jedes vorgegebene l Sequenzen von l quadratischen Resten oder Nichtresten existieren, sobald der Primzahlmodul p genügend groß ist. Ein analoger Satz gilt auch für Sequenzen k-ter Potenzreste ($k > 2$).

4. Hr. Erh. Schmidt legte eine Arbeit von Prof. Dr. A. Hammerstein in Berlin vor: »Die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen«.

Die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen ist, wie ganz leicht zu sehen, in folgendem Satz enthalten: $f(x)$ sei fastperiodisch und verschwinde nicht

identisch. Unter allen fastperiodischen Funktionen $\phi(x)$, für welche der Mittelwert $M|\phi|^2 = 1$ ist, erteilt mindestens eine dem Ausdruck

$$I(\phi) = M_x | M_\xi [f(x+\xi)\,\phi(\xi)] |^2$$

ein Maximum. Sie kann in der Form $e^{i\lambda x}$ angenommen werden. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt. Die Existenz einer Lösung der Aufgabe folgt nach den direkten Methoden der Variationsrechnung. Ihre spezielle Gestalt erschließt man nach dem Vorgang von H. Weyl auf Grund der Sätze über vertauschbare Matrizen.

5. Vorgelegt wurde die mit Unterstützung der Akademie erschienene Arbeit von Th. Lipps »Die Rotliegendflora von Langwaltersdorf (Niederschlesien)« (Sonderabdr. Berlin 1927).

Über die Berechnung der elektrolytischen Dissoziation aus der elektrischen Leitfähigkeit.

Von W. Nernst.

Kürzlich[1] wurde der Nachweis geführt, daß man aus dem Temperaturkoeffizienten der Verdünnungswärme von Elektrolytlösungen die wahre elektrolytische Dissoziation, befreit von dem Einfluß der elektrostatischen Wechselwirkung der Ionen, welch letztere im folgenden nach dem Schöpfer dieser grundlegenden Theorie als »Debye-Effekt« bezeichnet sei, berechnen kann; im Anschluß daran konnte ich ferner zeigen, daß in einfachen Fällen auch mittels des nach Arrhenius aus der Gefrierpunktsdepression berechneten Grades der Assoziation ebenfalls, und zwar in hinreichender Übereinstimmung mit der ersten Methode, der Grad der elektrolytischen Dissoziation gefunden wird. Zunächst werden allerdings alle derartigen Betrachtungen zweckmäßig auf die nach dem Typus des Chlorkaliums zusammengesetzten binären starken Elektrolyte beschränkt.

Im folgenden möchte ich den Nachweis führen, daß, wenn auch zunächst keine sehr genaue Berechnung, so doch unter bestimmten Bedingungen eine hinreichend sichere Abschätzung des Assoziationsgrades der Elektrolyte auch mit Hilfe der Leitfähigkeit möglich ist, und daß die so gewonnenen Resultate eine weitere Bestätigung meiner früheren Überlegungen von einer neuen Seite her liefern.

In Analogie meiner früheren Betrachtungen liegt zunächst folgender Gedankengang nahe. Chlorlithium und nahezu auch Chlornatrium können hinauf bis zu Konzentrationen von 0.1 normal als völlig dissoziiert angesehen werden. Im Sinne der Theorie von Debye muß man annehmen, daß durch die elektrostatische Einwirkung der Ionen, ebenso wie es bei den Gefrierpunktserniedrigungen der Fall ist, mit zunehmender Konzentration auch die Leitfähigkeit beeinträchtigt wird; Debye und Hückel[2] haben hierüber eine spezielle Theorie entwickelt, die, wenn wir von ihr auch im folgenden keinen Gebrauch machen, doch zweifellos mindestens eine gute erste Annäherung der tatsächlichen Verhältnisse, wenigstens in den eben besprochenen einfachen Fällen, liefert. Auch ohne Kenntnis dieser Theorie aber könnte

[1] Nernst, Zeitschr. f. Elektrochemie 1927, S. 428; vgl. besonders auch Orthmann, Ergebn. d. Naturw. 1927, Bd. 6 (bei Springer), und Naudé, Zeitschr. f. Elektrochemie 1927, S. 532.

[2] Zur Theorie der Elektrolyte II, Physik. Zeitschr. **24**, 305 (1923); vgl. auch L. Onsager, ibid. **27**, 388 (1926), **28**, 277 (1927).

man zunächst davon ausgehen, daß die beobachtete Leitfähigkeit außer durch die Konzentration auch noch durch die elektrostatische Wechselwirkung der Ionen bedingt wird, und daß bei einwertigen Ionen der letztere Einfluß bei allen Salzen immer der gleiche ist. Man könnte also erwarten, daß der Einfluß der Assoziation sich einfach über die durch Chlorlithium und nahezu auch durch Chlornatrium gegebene Leitfähigkeitskurve superponiert, da letztere Salze nahe den reinen Debye-Effekt zeigen. Dann würde also bei analogen Elekrolyten der Einfluß der Assoziation sich dadurch bemerkbar machen, daß die Leitfähigkeit entsprechend langsamer mit der Konzentration ansteigt oder daß die molekulare Leitfähigkeit entsprechend schneller mit der Konzentration abfällt.

Im Sinne der bekannten Formel von Arrhenius

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} \qquad (1)$$

hätten wir also am einfachsten die α-Werte miteinander zu vergleichen. Nun ist aber die Extrapolation auf unendliche Verdünnungen bekanntlich mit einer nicht kleinen Unsicherheit behaftet, von der wir uns vollkommen durch folgenden Kunstgriff befreien können. Bei 0.001 normal ist in den bisher bekannten Fällen die nach dem Massenwirkungsgesetz der Konzentration proportionale Assoziation verschwindend klein, d. h. der Elektrolyt ist hier stets als völlig dissoziiert zu betrachten; die Messungen der Leitfähigkeit sind andererseits für jene Konzentration noch von einer vollkommen ausreichenden Sicherheit. Der Einfluß einer Assoziation müßte also vollkommen klar und sicher vor Augen treten, wenn wir den Quotienten

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_{0.001}} \qquad (2)$$

zum Vergleich heranziehen.

Dies ist für eine Anzahl von Konzentrationen in der folgenden Tabelle geschehen, die sich auf 18° bezieht; darunter sind für die betreffenden Elektrolyte die aus den Verdünnungswärmen berechneten Assoziationsgrade verzeichnet (l. c. S. 430).

Tabelle I.

Konz.	Li Cl	Na Cl	K Cl	$NaNO_3$	KNO_3
0.005	0.973	0.975	0.977	0.971	0.975
0.01	0.954	0.958	0.961	0.954	0.956
0.05	0.892	0.899	0.910	0.898	0.889
0.1	0.854	0.864	0.880	0.859	0.848
0.5	0.733	0.760	0.804	—	0.722
Assoziationsgrad (für 0.1 normal)	0	0.012	0.019	0.028	0.045

Die Leitfähigkeiten sind die von Kohlrausch, teilweise gemeinschaftlich mit Miß Malby, gefundenen; die Assoziationsgrade sind in Anlehnung an meine oben zitierte Arbeit, großenteils unter weitgehender Ergänzung der ersten

Messungen von ORTHMANN und mir, von Hrn. NAUDÉ bestimmt worden, und können wohl als ziemlich sicher gelten.

Ein Blick auf obige Tabelle lehrt, daß die nach Gleichung (2) berechneten Werte zwar in der Reihenfolge KCl, $NaNO_3$, KNO_3 abnehmen, ganz im Sinne der oben ausgesprochenen Vermutung; die beiden wenig assoziierten Elektrolyte LiCl und NaCl aber fallen heraus; bei 0.1 normal z. B. besitzt das praktisch nicht assoziierte LiCl einen fast gleichen α-Wert, als das zu 5 Prozent assoziierte KNO_3. Der oben gemachte einfachste Ansatz muß also verworfen werden. Immerhin fordert das Ergebnis der obigen Tabelle auf, der Sache näher nachzugehen.

Bei dem besonders stark herausfallenden LiCl ist die Beweglichkeit der beiden Ionen sehr verschieden, es nimmt unter den fünf obigen untersuchten Elektrolyten in dieser Hinsicht eine besondere Stellung ein. Es liegt nahe, nur solche Elektrolyte direkt miteinander zu vergleichen, deren Ionenbeweglichkeiten wenig differieren. In den folgenden Zeilen sind einige Ionenbeweglichkeiten zusammengestellt, die sämtlich nicht sehr voneinander verschieden sind: $K = 64.6$; $Cs = 68$; $Rb = 66$; $Ag = 54.3$; $Tl = 66.0$; $NH_4 = 63.7$; $Cl = 65.5$; $Br = 67.6$; $J = 66.5$; $NO_3 = 61.7$.

Für zahlreiche aus obigen Ionen gebildete Elektrolyte besitzen wir die klassischen Messungen von KOHLRAUSCH bezüglich ihrer Leitfähigkeit bei 18°, und man kennt ferner auch mit hinreichender Genauigkeit in den meisten Fällen die Gefrierpunktserniedrigungen der betreffenden Salze, aus denen wir, allerdings nur für 0°, den Assoziationsgrad, wie früher von mir angegeben (vgl. auch w. u.), berechnen können. Da die Dissoziationswärmen auf Grund der Erfahrungen bei den bisher untersuchten Salzen nicht übermäßig groß (2—3000 Kal.) und auch nicht übermäßig verschieden sind, so ist der Einfluß der Temperatur ebenfalls nicht übermäßig groß und für alle untersuchten Salze nicht sehr verschieden. Die Assoziationsgrade bei 18° dürften übrigens etwa $^4/_5$ derjenigen bei 0° betragen.

In der Tab. II sind zunächst für eine Anzahl von Elektrolyten mit nahe gleichen Ionenbeweglichkeiten genau wie in Tab. I die α-Werte zusammengestellt:

Tabelle II.

	KJ	KBr	KCl	RbCl	NH_4Cl	CsCl	KNO_3	$AgNO_3$	$TlNO_3$
0.005	0.977	0.977	0.977	0.978	0.976	0.976	0.975	0.973	0.971
0.01	0.963	0.961	0.961	0.962	0.959	0.958	0.956	0.953	0.949
0.05	0.915	0.910	0.910	0.904	0.905	—	0.889	0.880	0.865
0.1	0.889	0.883	0.880	0.874	0.870	0.869	0.848	0.834	0.756
0.5	0.828	0.815	0.804	—	0.796	—	0.722	0.685	—

Das Beobachtungsmaterial läßt hier offenbar an Sicherheit nichts zu wünschen übrig. Bei 0.005 normal sind alle Werte nahezu gleich, wir haben es also hier, vielleicht von den beiden letzten Elektrolyten abgesehen, in der Tat mit dem reinen DEBYE-Effekt zu tun; derselbe dürfte beim KJ und nahezu auch beim KBr bis zu 0.1 normal ebenfalls fast ungestört auftreten. Bei allen anderen Elektrolyten tritt aber ein immer stärkerer Abfall

der Werte mit zunehmender Konzentration auf; hier haben wir also offenbar es mit dem Einfluß der Assoziation zu tun, die als zweites Moment die Abnahme der molekularen Leitfähigkeit mit zunehmender Verdünnung verursacht. Der Umstand übrigens, daß wir bei Elektrolyten von durchweg gleichen Ionenbeweglichkeiten den Einfluß der Assoziation so deutlich beobachten können, ist, indem wir berücksichtigen, daß im Sinne bekannter Überlegungen bei gleichen Beweglichkeiten auch der Ionenradius nahezu derselbe ist[1], qualitativ vollkommen im Einklang mit der Formel von DEBYE und HÜCKEL.

Es folgen nunmehr in Reihe 1, Tab. III die Gefrierpunktserniedrigungen t der obigen Elektrolyte, bezogen auf die Konzentration 0.1 normal. Dieselben sind der vortrefflichen Zusammenstellung in der letzten Auflage des LANDOLT und BÖRNSTEIN entnommen. Zur Interpolation auf obige Konzentration benutzt man zweckmäßig die daselbst angegebenen molekularen Gefrierpunktserniedrigungen.

Tabelle III.

	KJ	KBr	KCl	RbCl	NH_4Cl	CsCl	KNO_3	$RbNO_3$	$CsNO_3$	$AgNO_3$	$TlNO_3$
$t =$	0.348×	0.344	0.340	0.346×	0.34×	0.343	0.330	0.334×	0.326	0.333	0.316
$1-\alpha = \frac{0.370-t}{0.185} =$	0.119	0.141	0.162	0.130	0.16	0.146	0.216	0.195	0.238	0.200	0.292
$1-\alpha^1 = (1-\alpha)-0.13 =$	—	0.011	0.032	0	0.03	0.016	0.086	0.065	0.108	0.070	0.162
$0.900 - a_{c.1} =$	0.011	0.017	0.020	0.026	0.030	0.031	0.052	(0.06)	(0.06)	0.066	0.144

Die ältere Theorie berechnete bekanntlich den Grad der Assoziation nach der Formel[2]

$$1-\alpha = \frac{2P_0 - P}{P_0} = \frac{2t_0 - t}{t_0}.$$

Der so berechnete Assoziationsgrad (zweite Reihe der Tab. III) setzt sich, wie wir jetzt wissen, aus dem DEBYE-Effekt und dem Einfluß der Assoziation zusammen. Ersterer kann, wie schon früher geschehen[3], für 0.1 normal wohl ziemlich sicher zu 0.13 geschätzt werden. Durch Subtraktion dieses Wertes erhalten wir (von einigen hier für uns unerheblichen Korrektionen abgesehen) die in Tab. III verzeichneten wahren Assoziationsgrade $1-\alpha^1$. Schließlich sind in der letzten Reihe die aus den Leitfähigkeiten folgenden Werte verzeichnet, wobei für 0.1 normal der DEBYE-Effekt zu 0.900 anzusetzen ist, weil beim KCl der Assoziationsgrad 0.02 beträgt, wir also zu 0.880 diesen Betrag addieren müssen, um die Leitfähigkeit dieses Salzes bei der Konzentration 0.1 normal von dem Einfluß der Assoziation zu befreien. — Für $RbNO_3$ und $CsNO_3$ sind die α-Werte nach Gleichung (2) unter Benutzung der Zahlen von BILTZ[4] eingeklammert hinzugefügt, weil sie sich auf 25° beziehen; bei 18° dürften sie ein wenig höher sein.

[1] Vgl. z. B. NERNST, Theoret. Chem. S. 450 (11.—15. Aufl.).
[2] Vgl. z. B. ibid. S. 620 (11.—15. Aufl.)
[3] Zeitschr. f. Elektrochemie l. c. S. 430.
[4] Zeitschr. physik. Chem. **40**, 185 (1902).

Ein Blick auf Tab. III (dritte und vierte Reihe) lehrt, daß in der Tat mit zunehmender Assoziation auch ein immer größerer Abfall der molekularen Leitfähigkeit verbunden ist. Man sieht sogar, daß im Sinne der Formel (1) von ARRHENIUS eine wohl den Umständen nach hinreichende quantitative Übereinstimmung vorhanden ist, wobei noch zu beachten ist, daß wegen der verschiedenen Temperaturen die $1-\alpha^1$-Werte um 20—30 Prozent zu verkleinern sind.

Es kann also festgestellt werden, daß nunmehr, ähnlich wie ich in meiner früheren Arbeit durch Berücksichtigung des DEBYE-Effekts die Gültigkeit der Formel

$$1+\alpha = \frac{P}{P_0}$$

bewiesen habe, so in dem betrachteten einfachen Falle nunmehr auch die (annähernde) Gültigkeit der zweiten Grundformel der elektrolytischen Dissoziationstheorie, wenigstens für gleiche Ionenbeweglichkeiten,

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} \qquad (1)$$

sich herausgestellt hat[1]. Es sei aber nochmals betont, daß in einigen Punkten (Unterschied zwischen Mol pro Liter und Mol in Liter, Einfluß der Assoziation auf den DEBYE-Effect pro g—Ion usw.) die Rechnung strenger, als hier geschehen, geführt werden müßte, doch durfte bei dem gegenwärtigen Stande der Sachlage hier zunächst wohl besser davon abgesehen werden.

Bei der Zusammenstellung des umfangreichen Materials von Literatur und Beobachtungsdaten haben mich auch diesmal die HH. NAUDÉ und ORTHMANN sachkundig und bereitwilligst unterstützt.

Zusammenfassung.

Für die nach dem Typus des Chlorkaliums zusammengesetzten binären Elektrolyte lassen sich die Assoziationsbeträge (Bruchteil der nicht elektrolytisch gespaltenen Moleküle), wenigstens in gewissen einfachen Fällen, auch aus der Änderung der molekularen Leitfähigkeit mit ziemlicher Genauigkeit berechnen.

---

[1] In Tab. III mußten teilweise mangels neuer Daten die älteren von W. BILTZ (l. c.) ausgeführten Gefrierpunktsbestimmungen benutzt werden; sie sind mit einem × bezeichnet. Es fällt auf, daß hier durchgängig die $1-\alpha^1$-Werte auffallend klein ausfallen. Vergleichen wir einige andere Salze mit den naturgemäß genaueren Messungen von H. JAHN und ADAMS, so findet man für KCl, KBr, CsCl die oben berechneten Werte 0.162, 0.141, 0.146, während nach BILTZ 0.119, 0.081, 0.095 folgt, im Mittel also etwa um 0.05 kleiner. Würde man, wozu man wohl gezwungen ist, um diesen Betrag die entsprechenden $1-\alpha^1$-Werte verkleinern, so verschwände auch der letzte Rest einer Unstimmigkeit. — Übrigens hat auch W. A. ROTH (Zeitschr. physik. Chemie **79** S. 603, 1912) bereits nachgewiesen, daß die Messungen von BILTZ etwas zu große Depressionen geliefert haben.

Über Sequenzen von Potenzresten.

Von Alfred Brauer
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Schur.)

Für jede Primzahl $p > 17$ gibt es, wie Hr. E. Jacobsthal[1] bewiesen hat, stets mindestens eine Sequenz von drei quadratischen Resten und mindestens eine Sequenz von drei quadratischen Nichtresten, d. h. es gibt für jede solche Primzahl stets zwei Zahlen a und b, derart, daß die Zahlen a, $a+1$, $a+2$ quadratische Reste, die Zahlen b, $b+1$, $b+2$ quadratische Nichtreste sind. Es besteht seit langem die Vermutung, daß für jedes l und alle hinreichend großen Primzahlen p stets sowohl Sequenzen von l quadratischen Resten als auch Sequenzen von l quadratischen Nichtresten auftreten[2]. In dieser Arbeit zeige ich, daß diese Vermutung richtig ist. Hierzu benutze ich den folgenden Satz, den Hr. B. L. van der Waerden[3] vor kurzem bewiesen hat:

Teilt man die Zahlen $1, 2, \cdots, N$ in k elementefremde Klassen ein, so enthält für jedes k und jedes l mindestens eine der Klassen eine arithmetische Progression von l Gliedern, wenn nur N hinreichend groß ist.

Im § 1 zeige ich, daß es für jedes k und alle hinreichend großen Primzahlen $p\{p \equiv 1 \pmod k\}$ stets beliebig lange Sequenzen von k-ten Potenzresten gibt und im § 2, daß auch mindestens eine der $k-1$ Klassen von Nichtresten beliebig lange Sequenzen enthält. Im § 3 beweise ich den Satz über Sequenzen k-ter Potenzreste auf kürzerem Wege mit Hilfe einer Erweiterung des Satzes von van der Waerden, die ich Hrn. I. Schur verdanke.

§ 1. Sequenzen von Resten.

Satz 1: Für jedes l und alle hinreichend großen Primzahlen p gibt es mindestens eine Sequenz von l quadratischen Resten.

Beweis: Es genügt, solche Primzahlen zu betrachten, für die der kleinste Nichtrest d

$$d \leq l$$

[1] Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste, Dissertation Berlin 1906.

[2] Für $l = 4$ hat Hr. E. Jacobsthal bereits einige Teilresultate bewiesen a. a. O. 1.

[3] Beweis einer Baudetschen Vermutung, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 15, (1927) S. 212—216.

ist, da sonst bereits die Zahlen 1, 2, $\cdots$, l eine Sequenz von l Resten bilden. Man setze nun

$$n = l(l-1)+1;$$

dann gibt es auf Grund des Satzes von VAN DER WAERDEN eine Zahl W_n, derart, daß für alle Primzahlen $p > W_n$ entweder die Klasse der Reste oder die Klasse der Nichtreste eine arithmetische Progression

$$r, \quad r+s, \quad r+2s, \quad \cdots, \quad r+(n-1)s$$

von n Gliedern enthält. Dann bilden die Zahlen

$$\frac{r}{s}, \quad \frac{r+s}{s}, \quad \frac{r+2s}{s}, \quad \cdots, \quad \frac{r+(n-1)s}{s} \pmod p$$

entweder eine Sequenz von n Resten oder eine Sequenz von n Nichtresten, je nachdem ob r und s denselben oder verschiedenen Restcharakter (mod p) haben. Man braucht nun nur noch die Primzahlen zu betrachten, für die eine Sequenz von n Nichtresten auftritt. Es seien dies unter Änderung der Bezeichnung die Zahlen

$$a, \quad a+1, \quad a+2, \quad \cdots, \quad a+n-1.$$

Dann bilden aber wegen

$$(l-1)d \leq (l-1)l = n-1$$

die darunter vorkommenden Zahlen

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad \cdots, \quad a+(l-1)d$$

eine arithmetische Progression von l Nichtresten, deren Differenz d ein Nichtrest ist. Durch Division durch d (mod p) erhält man hieraus eine Sequenz von l Resten.

Hr. I. SCHUR hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß diese Beweismethode sich auch für k-te Potenzreste (mod p)[1] anwenden läßt, wenn k eine Primzahl ist.

Ist nämlich $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Restklassen (mod p), $\mathfrak{H}$ die Untergruppe derjenigen Restklassen, die die k-ten Potenzreste enthalten, so zerlege man $\mathfrak{G}$ in Nebengruppen mod $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}Q_0 + \mathfrak{H}Q_1 + \cdots + \mathfrak{H}Q_{k-1}.$$

Es sei $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ die Gesamtheit der Zahlen aller Restklassen von

$$\mathfrak{H}Q_\nu (\nu = 0, 1, \cdots, k-1).$$

Setzt man nun

$$n = l^{k-1}(l-1)+1,$$

so folgt aus dem Satz von VAN DER WAERDEN analog wie im Falle $k = 2$ die Existenz einer Zahl W_n, derart, daß für alle Primzahlen $p > W_n$ mindestens eine Klasse $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ eine Sequenz a, $a+1$, $\cdots$, $a+n-1$ von n Zahlen enthält. Für $\nu = 0$ ist man fertig. Ist aber $\nu > 0$, so genügt es, den Fall zu be-

[1] Natürlich kann man annehmen $p \equiv 1 \pmod k$.

trachten, daß der kleinste Nichtrest $d' \leqq l$ ist. Da die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ist, ist eine der Zahlen d', d'^2, $\cdots$, d'^{k-1}, etwa $d'^z = d$ eine Zahl aus $\mathfrak{K}^{(\nu)}$. Wegen $d \leqq l^{k-1}$ folgt analog wie oben, daß man aus a, $a+d$, $\cdots$, $a+(l-1)d$ durch Division durch $d \pmod p$ l aufeinanderfolgende k-te Potenzreste erhält.

Es soll nun gezeigt werden, daß dies Resultat auch für beliebige Zahlen k gilt.

Zunächst möge eine Bezeichnung eingeführt werden. Für jede Zahl w bestimmen die Restklassen, denen die Zahlen $1, 2, \cdots, w \pmod p$ angehören, eine Untergruppe $\mathfrak{A}_w$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Restklassen. Hat nun eine Sequenz von l k-ten Potenzresten die Eigenschaft, daß alle ihre Zahlen zu Restklassen von $\mathfrak{A}_w$ gehören, so heiße die Sequenz eine zur Gruppe $\mathfrak{A}_w$ gehörende Sequenz.

Unter Benutzung dieser Bezeichnung gilt

Satz 2: Für jedes k und l gibt es eine nur von k und l abhängende Zahl z, derart, daß es für alle Primzahlen $p > z$ $\{p \equiv 1 \pmod k\}$ eine Sequenz von l k-ten Potenzresten gibt, die sogar zur Untergruppe $\mathfrak{A}_z$ von $\mathfrak{G}$ gehört.

Beweis: Unter einem Charakter der Ordnung k einer endlichen Abelschen Gruppe möge ein solcher Charakter der Gruppe verstanden werden, der primitive k-te Einheitswurzeln, aber keine primitiven Einheitswurzeln von höherem Grade als k enthält.

Es sei $\mathfrak{H}$ die Gruppe derjenigen Restklassen $\pmod p$, die die k-ten Potenzreste enthalten. Da $\mathfrak{G}$ zyklisch ist, ist die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{H}}$ zyklisch; ihre Elemente seien E, C, C^2, $\cdots$, C^{k-1}. Ist nun ε eine primitive k-te Einheitswurzel, so ordne man den Restklassen, die zu C^ν gehören, die Zahl ε^ν zu ($\nu = 0, 1, \cdots, k-1$). Man erhält dann einen k-ten Potenzcharakter χ der Gruppe $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung k ist. Da dieser Charakter jeder der Zahlen $1, 2, \cdots, p-1$ eine gewisse k-te Einheitswurzel zuordnet, ordnet er insbesondere jeder der Zahlen, die zu Restklassen der Untergruppe $\mathfrak{A}_z$ von $\mathfrak{G}$ gehören, eine gewisse k-te Einheitswurzel zu und liefert daher einen wohlbestimmten Charakter χ_z der Untergruppe $\mathfrak{A}_z$; die Ordnung von χ_z ist dabei ein (echter oder unechter) Teiler von k.

Die Behauptung läßt sich daher auch folgendermaßen formulieren:

Für jedes k und l gibt es eine nur von k und l abhängende Zahl $z = z(k, l)$, derart, daß für alle Primzahlen $p > z$ der Charakter χ_z der Untergruppe $\mathfrak{A}_z$ von $\mathfrak{G}$ eine Sequenz von l Werten $+1$ enthält, d. h. daß es eine Sequenz von l Zahlen a, $a+1$, $\cdots$, $a+l-1$ gibt, die zu Restklassen von $\mathfrak{A}_z$ gehören und für die

$$\chi_z(a) = \chi_z(a+1) = \cdots = \chi_z(a+l-1) = +1$$

ist.

Der Beweis ist sicher erbracht, wenn gezeigt ist, daß nicht nur der Charakter χ_z, sondern jeder beliebige Charakter von $\mathfrak{A}_z$, dessen Ordnung ein Teiler von k ist, eine Sequenz von l Werten $+1$ enthält.

Ist dies bewiesen, so folgt natürlich, daß für $z' > z$ jeder Charakter der Untergruppe $\mathfrak{A}_{z'}$ von $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung ein Teiler von k ist, ebenfalls eine Sequenz von l Werten $+1$ enthält; denn jeder solche Charakter bestimmt, da $\mathfrak{A}_z$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}_{z'}$ ist, einen Charakter von $\mathfrak{A}_z$, dessen Ordnung ein Teiler von k ist.

Für $k = 1$ ist der Satz trivial; man braucht nur $z(1, l) = l$ zu setzen. Der Satz sei nun für ein festes l schon für alle Charaktere, deren Ordnungen echte Teiler von k sind, bewiesen. Man setze

$$(1) \qquad w = \operatorname*{Max}_{\substack{t \mid k \\ t < k}} \{z(t, l)\}.$$

Die Primzahlzerlegung von k sei

$$(2) \qquad k = q_1^{f_1} q_2^{f_2} \cdots q_r^{f_r}.$$

Setzt man nun

$$(3) \qquad n = w^{rk(k-1)}(l-1)+1,$$

so gibt es nach dem Satz von VAN DER WAERDEN eine Zahl W_n, derart, daß bei jeder Einteilung der Zahlen $1, 2, \cdots, W_n$ in k Klassen mindestens eine der Klassen eine arithmetische Progression von n Gliedern enthält. Man setze

$$z = W_n.$$

Es sei ψ_z ein beliebiger Charakter k-ter Ordnung der Untergruppe $\mathfrak{A}_z$ von $\mathfrak{G}$. Dann sind $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{k-1}$ die k Werte des Charakters ψ_z. Alle Zahlen, für die der Charakter denselben Wert hat, mögen zu einer Klasse gehören. Diese k Klassen mögen kurz mit $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{k-1}$ bezeichnet werden. Dann enthält mindestens eine Klasse eine arithmetische Progression von n Gliedern, deren Differenz kleiner als z ist. Daher bleibt man bei Division durch diese Differenz (mod p) innerhalb der Untergruppe $\mathfrak{A}_z$. Folglich enthält mindestens eine Klasse ε^ν eine Sequenz $a, a+1, \cdots, a+n-1$ von n Zahlen. Für $\nu = 0$ ist man fertig.

Man muß nun zwei Fälle unterscheiden:

1. Unter den Zahlen $1, 2, \cdots, w$ sei für jedes $q_\varrho (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$ mindestens eine, die mit d'_ϱ bezeichnet werde und zur Klasse $\varepsilon^{\mu_\varrho}$ gehören möge, derart, daß

$$(4) \qquad \mu_\varrho \not\equiv 0 \pmod{q_\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$

ist. Dann gehört

$$(5) \qquad d' = \prod_{\varrho=1}^{r} d'^{q_1 q_2 \cdots q_{\varrho-1} q_{\varrho+1} \cdots q_r}_\varrho$$

zur Klasse ε^μ, wo

$$(6) \qquad \mu = \sum_{\varrho=1}^{r} \mu_\varrho q_1 q_2 \cdots q_{\varrho-1} q_{\varrho+1} \cdots q_r$$

ist; daher ist wegen (4) und (6)

$$\mu \not\equiv 0 \pmod{q_\varrho}, \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$

folglich wegen (2)

$$(\mu, k) = 1 .$$

Dann gehört eine der Zahlen $d', d'^2, \cdots, d'^{k-1}$, etwa $d'^{\sigma} = d$ zur Klasse ε^{ν}. Da andererseits

$$d'_{\varrho} \leqq w \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$

ist, folgt aus (5), (2) und (3)

$$(7) \qquad d \leqq d'^{k-1} < w^{rk(k-1)} < n < W_n = z .$$

Dann erhält man, analog wie früher beim Spezialfall ausgeführt wurde, eine Sequenz von l Werten $+1$, da man bei den angewandten Operationen wegen (7) innerhalb von $\mathfrak{A}_z$ bleibt.

2. Tritt der Fall 1 nicht ein, so muß, wenn die Zahlen $1, 2, \cdots, w$ zu den Klassen $\varepsilon^{\nu_1}, \varepsilon^{\nu_2}, \cdots, \varepsilon^{\nu_w}$ gehören, für mindestens eine der Primzahlen $q_1, q_2, \cdots, q_r$, etwa für q_α,

$$\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \cdots \equiv \mu_w \equiv 0 \pmod{q_\alpha}$$

sein. Daher ist der durch ψ_z bestimmte Charakter ψ_w von $\mathfrak{A}_w$ von einer Ordnung, die ein Teiler von $\frac{k}{q_\alpha}$ ist. Für ψ_w ist aber wegen (1) die Induktionsvoraussetzung erfüllt. Folglich enthält ψ_w jedenfalls eine Sequenz von l Werten $+1$; also enthält ψ_z dieselbe Sequenz von l Werten $+1$.

Daher ist der Satz in beiden Fällen bewiesen.

§ 2. Sequenzen von Nichtresten.

Satz 3: Für jedes k und l und alle hinreichend großen Primzahlen p $\{p \equiv 1 \pmod k\}$ enthält, wenn d der kleinste k-te Nichtrest (mod p) ist, die Klasse, zu der $\frac{1}{d} \pmod p$ gehört, l aufeinanderfolgende k-te Nichtreste.

Beweis: Man setze

$$n = l! \, (l-1) + 1 .$$

Dann gibt es nach dem Satz 2 eine Zahl z, derart, daß für alle $p > z$ eine Sequenz von n k-ten Potenzresten auftritt. Es seien dies die Zahlen $a, a+1, \cdots, a+n-1$.

1. Ist nun

$$d < l! ,$$

so erhält man aus $a, a+d, \cdots, a+(l-1)d$ durch Division durch $d \pmod p$ eine Sequenz von l Nichtresten derjenigen Klasse, zu der $\frac{1}{d} \pmod p$ gehört.

2. Ist aber

$$d > l!^{\,1},$$

[1] $d = l!$ ist unmöglich, da d Primzahl sein muß.

so sei

$$d = l!\ m + b \qquad (0 < b < l!). \tag{8}$$

Die Zahlen

$$(b-d)+d,\ (b-d)+2d,\ \cdots,\ (b-d)+ld \tag{9}$$

sind dann sämtlich k-te Potenzreste, denn es ist wegen (8)

$$(b-d)+\nu d \equiv 0 \pmod{\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, l)$$

und

$$0 < \frac{b-d}{\nu} + d < d;$$

daher ist $\frac{b-d}{\nu} + d$ und folglich auch $\left(\frac{b-d}{\nu} + d\right)\nu$ Rest. Man hat also in (9) eine Progression von l k-ten Resten, deren Differenz d ein Nichtrest ist. Durch Division durch d (mod p) erhält man hieraus wieder eine Sequenz von l Nichtresten derjenigen Klasse, zu der $\frac{1}{d}$ gehört.

Der Beweis des Satzes ist also in beiden Fällen erbracht.

Hr. C. Stengel[1] hat im Fall $k = 2$ gezeigt, das für $p > 19$ stets Nichtreste der Form $8n + 1$ existieren und darauf hingewiesen, daß dies selbstverständlich würde, wenn man die Existenz einer Sequenz von 8 quadratischen Nichtresten für alle p oberhalb einer angebbaren Grenze beweisen könnte. Aus dem Satz 3 folgt nun, daß für alle k, alle α und β und alle hinreichend großen Primzahlen stets k-te Nichtreste der Form $\alpha n + \beta$ existieren.

Der Satz 3 legt die Vermutung nahe, daß für jedes k und alle hinreichend großen Primzahlen p $\{p \equiv 1 \pmod{k}\}$ in allen Klassen von Nichtresten beliebig lange Sequenzen auftreten. Für $k = 2$ ist dies mit dem Satz 3 identisch. Bisher ist es mir nicht gelungen, den Satz für jedes k zu beweisen; einige Teilresultate erhält man leicht mit den benutzten Methoden. Unter ihnen möge das folgende erwähnt werden, das insbesondere für kubische Reste zeigt, daß für hinreichend großes p alle Klassen mindestens eine Sequenz von 3 Gliedern enthalten.

Satz 4: Ist d der kleinste k-te Nichtrest (mod p), so enthält für hinreichend großes p $\{p \equiv 1 \pmod{k}\}$ die Klasse, zu der $\frac{1}{d^2} \pmod{p}$ gehört, eine Sequenz von 3 Gliedern, die Klasse, zu der $\frac{1}{d^3}$ gehört, eine Sequenz von 2 Gliedern.

Beweis: Nach Satz 3 enthält die Klasse, zu der $\frac{1}{d}$ gehört, für alle hinreichend großen p eine Sequenz von 8 Gliedern:

$$a-3,\ a-2,\ a-1,\ a,\ a+1,\ \cdots,\ a+4. \tag{10}$$

[1] Über quadratische Nichtreste von der Form $8n+1$, Journal für die reine und angewandte Mathematik 153 (1924) S. 208—14.

1. Ist nun $d = 2$ oder $d = 3$, so bilden

$$a - d,\ a,\ a + d$$

eine Progression von 3 Gliedern der Klasse, zu der $\frac{1}{d}$ gehört. Durch Division durch d (mod p) erhält man eine Sequenz von 3 Gliedern der Klasse, zu der $\frac{1}{d^2}$ gehört.

2. Ist aber $d > 3$, so ist 6 ein k-ter Potenzrest; dann bilden wegen (10)

$$(a-3)\ (a+4) = a^2 + a - 12,$$
$$(a-2)\ (a+3) = a^2 + a - 6,$$
$$a\ (a+1) = a^2 + a$$

eine Progression von 3 Gliedern der Klasse, zu der $\frac{1}{d^2}$ gehört; die Differenz dieser Progression ist 6, also ein k-ter Potenzrest. Durch Division durch 6 (mod p) erhält man also auch in diesem Fall eine Sequenz von 3 Gliedern derjenigen Klasse, zu der $\frac{1}{d^2}$ gehört[1].

Ist

$$b - 1,\ b,\ b + 1$$

diese Sequenz, so bilden

$$b^2 - 1,\ b^2$$

eine Sequenz der Klasse, zu der $\frac{1}{d^4}$ gehört.

§ 3. Eine Erweiterung des Satzes von van der Waerden.

Herr I. Schur hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß sich der Satz von van der Waerden mittels einer ähnlichen Methode, wie sie im § 1 angewandt wurde, so erweitern läßt, daß er direkt die Existenz beliebig langer Sequenzen von k-ten Potenzresten ergibt. Dagegen läßt sich dieser Satz allgemein nicht so erweitern, daß er auch die Existenz beliebig langer Sequenzen von Nichtresten direkt liefert. Es gilt:

Satz 5: Verteilt man die Zahlen 1, 2, ···, N irgendwie auf k Klassen, so gibt es für jedes l eine nur von k und l abhängende Zahl N (k, l), derart, daß für alle $N \geqq N(k, l)$ mindestens eine Klasse eine arithmetische Progression von l Gliedern enthält, deren Differenz ebenfalls zu dieser Klasse gehört.

Beweis: Für $k = 1$ ist der Satz richtig, man hat nur $N(1, l) = l$ zu setzen. Er sei für k Klassen schon bewiesen. Dann ist die Behauptung auch richtig, wenn an Stelle von $1, 2, \cdots, N$ für irgend ein c die Zahlen $1 \cdot c$,

[1] Daß ein ähnlicher Schluß für Sequenzen von 4 Gliedern unmöglich ist, liegt daran, daß die Diskriminanten der quadratischen Funktionen von a Quadrate sein müssen, und es bekanntlich zwar 3, aber nicht 4 Quadrate in arithmetischer Progression gibt.

$2c, \cdots, Nc$ betrachtet werden; denn ein Verteilen dieser Größen auf k Klassen bedeutet auch ein Verteilen von $1, 2, \cdots, N$ auf k Klassen.

Auf Grund dieser Annahme läßt sich nun zeigen, daß der Satz auch für $k+1$ Klassen richtig ist. Ist nämlich $W(k+1, z)$ die sich aus dem Satz von VAN DER WAERDEN für Progressionen von z Gliedern bei einer Einteilung in $k+1$ Klassen ergebende Konstante, so genügt es,

$$N(k+1, l) = W\{k+1, (l-1)\,N(k, l)+1\}$$

zu setzen. Denn für $N \geqq N(k+1, l)$ gibt es dann nach dem Satze von VAN DER WAERDEN wenigstens eine Klasse $\mathfrak{K}$, die eine Progression

$$a, \; a+d, \; a+2d, \; \cdots, \; a+(l-1)\,N(k, l)\,d$$

von $(l-1)\,N(k, l)+1$ Gliedern enthält. Diese Progression enthält für $x = 1, 2, \cdots, N(k, l)$ als Teilprogression von l Gliedern

$$a, \; a+xd, \; a+2xd, \; \cdots, \; a+(l-1)xd$$

mit der Differenz xd. Gehört nun für ein x die Zahl xd zu $\mathfrak{K}$, so sind wir fertig. Wir müssen also annehmen, daß $d, 2d, \cdots, N(k, l)d$ sich auf die von $\mathfrak{K}$ verschiedenen k Klassen verteilen. Dann enthält aber nach der Induktionsvoraussetzung eine dieser Klassen eine Progression von l Gliedern, deren Differenz zu derselben Klasse gehört.

Nachträglich sei noch auf die Dissertation von Hrn. W. UNGER »Über einige Summen kubischer und biquadratischer Charaktere«, Bonn (1921) hingewiesen, in der gezeigt wird, daß in den Fällen $k = 3$ und $k = 4$ für hinreichend großes p die Klasse der Reste und alle Klassen der Nichtreste Sequenzen von 2 Gliedern enthalten.

Über die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen.

Von Prof. Dr. A. Hammerstein
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Erhard Schmidt.)

Einen konstruktiven Aufbau von Bohrs Theorie der fastperiodischen Funktionen hat Weyl[1] mit Hilfe von Methoden, die der Integralgleichungstheorie sowie der Lehre von den vertauschbaren unitären Matrizen entlehnt sind, gegeben. In der folgenden Note soll gezeigt werden, daß man unter Benützung der von Weyl eingeführten Sätze aus der Matrizenrechnung durch Schlußweisen der Variationsrechnung einen sehr einfachen Zugang zur Vollständigkeitsrelation erhält, freilich unter Preisgabe des konstruktiven Prinzips.

Die fastperiodische Funktion $f(x)$ besitze die Fourierreihe

$$\sum A_\nu e^{i\Lambda_\nu x}, \quad \left(A_\nu = A(\Lambda_\nu) = M\left\{f(x)e^{-i\Lambda_\nu x}\right\}\right).$$

Man sieht unmittelbar, daß folgende drei Aussagen völlig äquivalent sind:

I. $$M|f|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2.$$ (Vollständigkeit)

II. Aus $A(\lambda) = 0$ für alle λ folgt $f(x) = 0$ für alle x. (Eindeutigkeit)

III. $$M_\xi\{f(x+\xi)\bar{f}(\xi)\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|^2 e^{i\Lambda_\nu x}.$$

In der Tat, gilt I, so folgt daraus, wie man nach Bohr[2] leicht zeigt, II und daraus III, da die Funktion $M_\xi\left(f(x+\xi)\bar{f}(\xi)\right)$ die Fourierkoeffizienten[3]

$$M_x M_\xi\{f(x+\xi)f(\xi)e^{-i\lambda x}\} = M_\xi M_x\{f(x+\xi)f(\xi)e^{-i\lambda x}\}$$
$$= M_\xi M_\eta\{f(\eta)\bar{f}(\xi)e^{-i\lambda\eta}e^{i\lambda\xi}\} = A(\lambda)A(\lambda)$$

hat.

Gilt hingegen II, so erschließt man daraus wie eben III, und hieraus mit $x = 0$ sodann I.

[1] Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen. Math. Ann. 97.
[2] Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. Acta math. 45, S. 54.
[3] Die Vertauschbarkeit der Mittelbildungen ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der inneren Mittelwerte statthaft. (Verschärfter Mittelwertsatz, Bohr l. c. S. 45.) Davon wird auch weiterhin Gebrauch gemacht.

Endlich zieht III wieder I nach sich und dieses II.

Es genügt also wegen II z. B. nachzuweisen, daß, falls $f(x)$ nicht identisch verschwindet, $|A(\lambda)|^2 = |M\{f(y)e^{-i\lambda y}\}|^2$ ein positives Maximum hat. Nun ist der Wert $|A(\lambda)|^2$ selbst der Behandlung schwer zugänglich. Dagegen ergibt sich ein leicht zu untersuchender Ausdruck, wenn man $|A(\lambda)|^2$ durch die Substitution $y = x + \xi$ in die Form setzt:

$$|A(\lambda)|^2 = |M_\xi\{f(x+\xi)e^{-i\lambda\xi}\}|^2 = M_x|M_\xi\{f(x+\xi)e^{-i\lambda\xi}\}|^2,$$

und die Extremumsaufgabe dadurch in eine Frage der Variationsrechnung verwandelt, daß man die speziellen Funktionen $e^{-i\lambda\xi}$ durch beliebige normierte fastperiodische Funktionen $\phi(\xi)$ $(M|\phi|^2 = 1)$ ersetzt. Dann gilt in der Tat der Satz:

Ist die fastperiodische Funktion $f(x)$ nicht identisch 0, so erteilt unter allen normierten fastperiodischen Funktionen $\phi(\xi)$ mindestens eine, $\Phi(\xi)$, dem Wert[1]

$$J(\phi) = M_x|M_\xi\{f(x+\xi)\,\phi(\xi)\}|^2$$

ein Maximum. Sie ist von der Gestalt $\Phi(\xi) = e^{-i\Lambda\xi}$.

Daraus folgt aber II ohne weiteres, denn es ist ja

$$A(\Lambda) = J(e^{-i\Lambda\xi}) \geqq J\left(\frac{\bar{f}(\xi)}{\sqrt{M|f|^2}}\right) > 0.$$

Die Funktion $\Phi(\xi)$ ist natürlich nicht eindeutig bestimmt.

Der Beweis vollzieht sich in zwei Schritten. Die Existenz einer Lösung wird mit den direkten Methoden der Variationsrechnung gezeigt; ihre spezielle Gestalt folgt dann wie bei Weyl auf Grund des Satzes über vertauschbare unitäre Matrizen.

Zunächst gilt folgender Hilfssatz:

Ist ϕ fastperiodisch, $M|\phi|^2 = 1$ und $J(\phi) \neq 0$, so hat man, wenn

$$\omega(\xi) = \frac{1}{J(\phi)^{\frac{1}{2}}} M_\eta\{\bar{f}(\xi+\eta)\,\bar{\phi}(\eta)\}$$

gesetzt wird,

$$J(\omega) \geqq J(\phi).$$

Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn $\bar{\phi}(x)$ linear von $M_\eta M_\xi\{f(x+\xi)\bar{f}(\eta+\xi)\,\phi(\eta)\}$ abhängt.

Dies ist eine unmittelbare Folge der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \frac{1}{J(\phi)} M_x|M_\xi\{f(x+\xi)\,M_\eta\bar{f}(\xi+\eta)\,\bar{\phi}(\eta)\}|^2 \cdot M_x|\bar{\phi}(x)|^2 \\ &\geqq \frac{1}{J(\phi)} |M_x M_\xi\{f(x+\xi)\,\phi(x)\}\,M_\eta\{\bar{f}(\xi+\eta)\,\bar{\phi}(\eta)\}|^2 \\ &= \frac{1}{J(\phi)} |M_\xi|M_x\{f(x+\xi)\,\phi(x)\}|^2|^2 = J(\phi). \end{aligned}$$

[1] Der Mittelwert über x existiert, da $|M_\xi\{f(x+\xi)\,\phi(\xi)\}|^2$ fastperiodisch ist.

Es bedeute jetzt L die wegen $|M_\xi\{f(x+\xi)\,\phi(\xi)\}|^2 \leqq M|f|^2\,M|\phi|^2$ endliche positive obere Grenze von $J(\phi)$. Ist nun ϕ_ν eine Minimalfolge, d. h. ist $J(\phi_\nu) \to L$, wobei $J(\phi_\nu) \geqq \frac{L}{2}$ angenommen sei, so bilden die Funktionen $\omega_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{J(\phi_\nu)}}\,M_\eta\{\bar{f}(x+\eta)\,\phi_\nu(\eta)\}$ ebenfalls eine solche, da $M|\omega_\nu|^2 = 1$ und nach dem Hilfssatz $L \geqq J(\omega_\nu) \geqq J(\phi_\nu)$ gilt.

Wie man abermals aus der Schwarzschen Ungleichung erkennt, ist

$$|\omega_\nu(x+\tau)-\omega_\nu(x)|^2 \leqq \frac{1}{J(\phi_\nu)}\,M_\eta|\bar{f}(x+\tau+\eta)-\bar{f}(x+\eta)|^2\,M|\phi_\nu|^2$$

$$\leqq \frac{2}{L}\,M|f(x+\tau+\eta)-f(x+\eta)|^2,$$

was besagt, daß die gleichmäßig beschränkte Folge ω_ν gleichartig stetig sowie gleichartig fastperiodisch ist[1].

Es läßt sich also eine Teilfolge bilden, die gleichmäßig gegen eine fastperiodische Grenzfunktion $\Phi(x)$ konvergiert. Man erschließt dies in üblicher Weise so[2]: Zunächst kann nach dem bekannten Diagonalverfahren eine solche Teilfolge $\tilde{\omega}_\nu(x)$ hergestellt werden, die in jedem rationalen Punkt r_μ gegen einen endlichen Grenzwert $\Phi(r_\mu)$ konvergiert. Um zu zeigen, daß dieselbe für jedes x gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion geht, hat man zu vorgegebenem ε eine nur von ε abhängende Zahl N derart zu finden, daß für $n > N$, $m > N$ stets $|\tilde{\omega}_n(x)-\tilde{\omega}_m(x)| < 3\varepsilon$ wird. Man wähle auf Grund der gleichartigen Fastperiodizität zu ε die Zahl $l_0(\varepsilon)$ so, daß in jedem Intervall der Länge l_0 eine gemeinsame Verschiebungszahl der Funktionen $\tilde{\omega}_n(x)$ liegt; dann gibt es im Intervall $0 \leqq y \leqq l_0$ einen Punkt y derart, daß sich $|\tilde{\omega}_n(x)-\tilde{\omega}_m(x)|$ von $|\tilde{\omega}_n(y)-\tilde{\omega}_m(y)|$ um höchstens 2ε unterscheidet.

Mit Hilfe der gleichartigen Stetigkeit folgt aber für die Zahlen des Intervalles $0 \leqq y \leqq l_0$ auf geläufige Art die Existenz einer Zahl $N(\varepsilon)$, so daß für $n > N$, $m > N$ auch $|\tilde{\omega}_n(y)-\tilde{\omega}_m(y)| < \varepsilon$ wird.

Offenbar ist nun $M|\Phi|^2 = 1$ und $J(\Phi) = L$, womit der erste Teil des Beweises erbracht ist.

Die Lösung Φ ist nicht eindeutig bestimmt. Bedeutet y irgendeinen reellen Wert, so ist mit $\Phi(x)$ auch $\Phi(x+y)$ eine Lösung, da, wie aus der Definition ersichtlich, stets $J(\phi(x)) = J(\phi(x+y))$ und überdies $M_x|\Phi(x+y)|^2 = 1$ gilt.

Setzt man jetzt $\Omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{L}}\,M_\eta\{\bar{f}(\xi+\eta)\,\bar{\Phi}(\eta)\}$, so ist $M|\Omega|^2 = 1$, und nach dem Hilfssatz wird

$$L \geqq J(\Omega) > J(\Phi) = L, \qquad \text{d. h. } J(\Omega) = J(\Phi);$$

der Zusatz lehrt daher die Existenz von zwei nicht gleichzeitig verschwindenden Konstanten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ derart, daß für alle x

$$\varkappa_1\,\Phi(x) = \varkappa_2\,M_\eta\,M_\xi\{f(x+\xi)\,\bar{f}(\eta+\xi)\,\bar{\Phi}(\eta)\}$$

---

[1] Vgl. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II, S. 117.
[2] Z. B. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik S. 40.

ausfällt. Multipliziert man diese Gleichung mit $\Phi(x)$ und nimmt den Mittelwert über x, so ergibt sich

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 J(\Phi) \qquad \text{also } \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} = \frac{1}{L}.$$

Daher genügt die Konjugierte jeder Lösung der Variationsaufgabe der Mittelgleichung

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{L} M_\eta M_\xi \{ f(x+\xi) \bar{f}(\eta+\xi) \bar{\Phi}(\eta) \}.$$

Diese ist im wesentlichen mit der von Weyl angegebenen identisch.

Hat man umgekehrt eine normierte Lösung dieser Gleichung, so löst die Konjugierte auch die Variationsaufgaben, wie man durch Multiplikation mit $\Phi(x)$ und Mitteln nach x erkennt. Daraus ergibt sich aber, daß jede normierte lineare Kombination von Lösungen selbst wieder Lösung ist.

Sind nun $\Phi_1(x), \cdots \Phi_n(x)$ linear unabhängige Lösungen, so können sie also ohne Beschränkung als normiert und orthogonalisiert angenommen werden, d. h.

$$M\{\Phi_\nu \bar{\Phi}_\mu\} = \begin{cases} 0 \text{ für } \nu \neq \mu \\ 1 \quad » \quad \nu = \mu. \end{cases}$$

Daher liefert die Besselsche Ungleichung

$$L \cdot n = \sum_{\nu=1}^{n} J(\Phi_\nu) = M_x \sum_{\nu=1}^{n} | M_\xi \{ f(x+\xi) \Phi_\nu(\xi) |^2$$
$$\leqq M_x M_\xi | f(x+\xi) |^2,$$
$$n \leqq \frac{1}{L} M | f |^2.$$

Es gibt also nur endlich viele linear unabhängige Lösungen $\Phi_1(x), \cdots \Phi_n(x)$, und folglich müssen die Lösungen $\Phi_1(x+y), \cdots \Phi_n(x+y)$ davon linear abhängen. Die Gleichungen

$$\Phi_n(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} e_{n\lambda}(y) \Phi_\lambda(x)$$

erklären zufolge der linearen Unabhängigkeit von $\Phi_1, \cdots \Phi_n$ eindeutig eine unitäre Matrix $E(y) = (e_{n\lambda}(y))$. Jetzt schließt man wie Weyl[1], daß wegen

$$E(y) E(y_1) = E(y_1) E(y)$$

$E(y)$ durch unitäre Transformation in eine Diagonalmatrix verwandelt werden kann, woraus sodann das Vorhandensein von Lösungen der Form $e^{-i\lambda x}$ gefolgert wird.

[1] L. c. S. 344.

Ausgegeben am 6. März.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

III. Gesamtsitzung. 2. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Rubner sprach über die Welternährung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. (Ersch. später.)

Nach einer Darlegung über die auffallende Übereinstimmung aller bisher untersuchten Kulturvölker hinsichtlich ihres Eiweiß- und Gesamtenergieverbrauchs geht der Vortragende auf die Unterschiede der Völker in ihrer Nahrungsmittelversorgung ein, bespricht den Wechsel der Nahrungsmittel in früherer Zeit und erläutert, welche Veränderungen in der Ernährung der Völker in den uns nächst folgenden Zeiten zu erwarten sind.

2. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte seine beiden Vorträge: »Geschichte der griechischen Sprache« (Berlin 1928) und »Kyrene« (Berlin 1928).

3. Hr. Heymann legte eine Abhandlung von Prof. Dr. Eduard Stiamer vor: »Aus der Vorgeschichte der sizilischen Vesper« (Sonderabdr. 1927).

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. E. Korschelt übersandte sein Werk: »Regeneration und Transplantation«, I. Band: Regeneration (Berlin 1927).

5. Vorgelegt wurde die 14. Lief. des 2. Bandes des »Rheinischen Wörterbuches«, hrsg. von Josef Müller (Bonn 1928).

6. Das ordentliche Mitglied Hr. Adolf Erman hat am 26. Januar 1928 sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat dem Jubilar eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

Adresse an Hrn. Adolf Erman zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 26. Januar 1928.

Hochverehrter Herr Kollege!

An dem heutigen Festtage, an dem Sie auf ein halbes Jahrhundert ununterbrochener, von den reichsten Erfolgen gekrönter wissenschaftlicher Arbeit zurückschauen können, darf unter den Glückwünschenden aus allen Landen, die Ihrer und Ihres Werkes mit dankbarer Freude gedenken, die Preußische Akademie einen führenden Platz beanspruchen. Denn seit 32 Jahren sind Sie der Unsere, und aufs engste verwachsen sind alle Ihre Arbeiten mit den wissenschaftlichen Aufgaben, die die Akademie zu unternehmen und zu fördern berufen ist. Aber die Verbindung reicht noch in weit höhere Zeiten hinauf; denn Sie gehören bereits der vierten Gelehrtengeneration Ihrer Familie an, und sowohl Ihr Urgroßvater wie Ihr Großvater sind lange Jahre hindurch Mitglieder unserer Akademie gewesen.

Schon früh hat das Wunderland am Nil wie auf so viele so auch auf Sie seine Anziehungskraft erwiesen; Ihre wissenschaftliche Ausbildung haben Sie dann zunächst bei Richard Lepsius, dann bei Georg Ebers erhalten, damals noch dem einzigen Ägyptologen, der seinen Schülern lehrend übermittelte, was bisher an Verständnis der Sprache und der Literatur erreicht war. Von Anfang an haben Sie erkannt, daß die Vorbedingung jedes weiteren Fortschritts nur durch wissenschaftlichen Ausbau der Grammatik und scharfe Scheidung der Hauptepochen der ägyptischen Sprachgeschichte gewonnen werden konnte, und diese Aufgabe mit klarem Verständnis ergriffen. Bereits die erste Arbeit, die Sie, noch als Student, veröffentlicht haben, brachte eine wichtige Entdeckung auf grammatischem Gebiete. Es folgte die Dissertation über die Pluralbildung und dann die »Neuägyptische Grammatik«, die die in der volkstümlichen Sprache des Neuen Reichs geschriebenen Schriftstücke scharf trennte von der klassisch gewordenen Sprache der älteren Zeit, die man in den offiziellen und religiösen Texten dauernd, wenn auch mit immer mehr sich häufenden Fehlern und Mißverständnissen, festzuhalten suchte. Das Verständnis dieser alten Sprache und ihres Baues und damit die Erreichung eines auf fester Basis ruhenden Verständnisses der Texte haben Sie dann, schrittweise vorwärtsschreitend bis zu den Pyramideninschriften hinauf, in einer langen Reihe fruchttragender Arbeiten erschlossen und in Ihrer »Ägyptischen Grammatik« zusammengefaßt, die zum vierten Male neu zu gestalten Sie jetzt im Begriff sind. So haben Sie die deutsche Schule

der Ägyptologie begründet, die, von den Anhängern des Alten lange hartnäckig bekämpft und als phantastisch verworfen, sich nicht nur siegreich behauptet, sondern in den letzten Jahrzehnten die Alleinherrschaft gewonnen hat, gegen die jeder Widerspruch verstummt ist. Zugleich haben Sie in Ihrer Lehrtätigkeit an der Universität fortdauernd eine große Zahl streng geschulter Jünger Ihrer Wissenschaft ausgebildet, die erfolgreich Ihre Arbeiten fortführen und ergänzen konnten.

Aber nicht minder war Ihr Interesse den Denkmälern und damit der Geschichte und vor allem der Kunst sowie überhaupt dem gesamten Kulturleben Ägyptens zugewendet. Auch hier haben Sie, weiter geschult durch eine zeitweilige Tätigkeit am Münzkabinett des Berliner Museums und Ihre Bearbeitung der Renaissancemedaillen, die Grundlage geschaffen durch Ihr großes Werk »Ägypten und ägyptisches Leben im Altertum«, in dem Sie zum erstenmal die Hauptepochen der ägyptischen Geschichte und ihrer staatlichen und kulturellen Gestaltung energisch voneinander schieden und lebensvoll darstellten, ein Werk, das, so viel auch im einzelnen durch die gewaltige Vermehrung des Materials und den Fortschritt der Forschung ergänzt und vertieft ist, doch unerschüttert dasteht und sich dauernd behaupten wird. Dazu ist dann vor wenigen Jahren, das reiche Ergebnis jahrzehntelanger Forschungsarbeit zusammenfassend, die Übersetzung der gesamten in den Papyri und in inschriftlichen Texten, wenn auch meist nur in Trümmern, erhaltenen Dichtungen, Erzählungen, Lehrbücher und Weisheitsschriften in Ihrer »Literatur der Ägypter« getreten.

Als Sie nach Lepsius' Tode 1885 die Leitung des Ägyptischen Museums übernahmen, haben Sie dasselbe mit weitem Blick aus der eingetretenen Stagnation herausgerissen, wesentlich umgestaltet und durch immer neue Erwerbungen seinen Bestand mehr als verdoppelt, so daß es jetzt nicht nur durch den Umfang seiner Schätze, sondern vor allem auch durch die systematische Anordnung und die gleichmäßige Vertretung aller Epochen von der Vorzeit bis zur römischen, äthiopischen und koptischen Kunst alle anderen Museen in Europa weitaus übertrifft. Dadurch haben Sie zugleich auch weiteren Kreisen ein weit tieferes Verständnis Ägyptens und seiner Kunst erschlossen, als das vorher möglich war. Wesentlich dazu beigetragen haben die von Ihnen bearbeiteten Handbücher des Museums, von denen wir nur die lebensvolle und tiefgreifende Darstellung der ägyptischen Religion erwähnen wollen. Daneben haben Sie, im richtigen Moment tatkräftig zugreifend, gleichzeitig auch die Anfänge unseres Vorderasiatischen Museums geschaffen, das sich dann zu voller Selbständigkeit hat entwickeln können.

Dann aber haben Sie sich seit 1897 einer gewaltigen, die Arbeitskraft eines einzelnen weit übersteigenden Aufgabe zugewendet, der Schaffung eines großen Wörterbuches der ägyptischen Sprache auf Grund einer möglichst vollständigen Sammlung und Verzettelung des gesamten Sprachmaterials. Die Preußische Akademie hat den Plan aufgenommen, die andern deutschen Akademien haben mitgewirkt, das preußische Kultusministerium sowie S. M. der Kaiser reiche Mittel bewilligt; doch nur ein Mann, der neben der unermüdlichen von wissenschaftlichem Enthusiasmus gestärkten Arbeitskraft auch

die von Ihnen errungene Stellung und das allgemeine Vertrauen besaß, konnte die bereitwillige und ausdauernde Mitwirkung der zahlreichen Gelehrten aus allen Kulturländern gewinnen, die die Beschaffung des Materials, die Neuvergleichung aller irgendwie wichtigen Texte und ihre Verzettelung mit Ihnen zusammen übernommen und durchgeführt haben. Die Ausarbeitung des Textes aber ist Ihr Werk, und auch in den schweren Zeiten des Krieges und der Inflation haben Sie den Mut nicht sinken lassen, sondern zäh und unermüdlich weitergearbeitet und den Text in allem Wesentlichen fertiggestellt.

So haben in den letzten beiden Jahren anderthalb Bände des auf vier bis fünf Bände berechneten Werkes erscheinen können. An dem heutigen Festtage kann die Akademie keinen wärmer und tiefer empfundenen Wunsch aussprechen, als daß es Ihnen beschieden sein möge, in ungebrochener Kraft des Körpers und des Geistes das gewaltige Werk zum Ende zu führen und in seiner mustergültigen Ausgestaltung vollendet zu erblicken.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 6. März.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 IV—X

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Library of Congress
FEB 17 1930
Smithsonian Report

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 9. Februar. (S. 25)
K. Reinhardt: Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche. (S. 26)
Gesamtsitzung am 16. Februar. (S. 47)
L. E. J. Brouwer: Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. (S. 48)
Fick: Bewegungsumfang im Schultergelenk. (Mitteilung aus der Sitzung der phys.-math. Klasse vom 31. März 1927.) (S. 53)
Klassensitzung am 23. Februar. (S. 75)
Penck: Die Ursachen der Eiszeit. (Mitteilung vom 3. Februar 1927.) (S. 76)
Gesamtsitzung am 1. März. (S. 86)
K. Dörge: Über den Fundamentalsatz der Algebra. (S. 87)
A. Fraenkel: Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen. (S. 90)
Klassensitzung am 8. März. (S. 92)
Gesamtsitzung am 15. März. (S. 93)
Klassensitzung am 22. März. (S. 95)
G. Pólya: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül. (S. 96)
Schur: Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. (S. 100)

MIT TAFEL I—III

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

IV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 9. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Penck sprach über das Felsengebirge im westlichen Nordamerika.

Das Felsengebirge ist kein Gebirge von alpinem Typus. Es kann eher mit den Sudeten verglichen werden und stellt gleich diesen einen Schwarm von Aufwölbungen älterer Gesteine im Bereiche flachgelagerter mesozoischer Schichten dar. Letztere sind am Saume der einzelnen Aufsattelungen aufgebogen. Diese werden im Norden gekappt durch eine miozäne Abtragungsfläche; daran schließen sich unmittelbar miozäne Schichten an, die sich in die Great Plains allmählich herabsenken. Die Stirn der Rockies ist hier ein postmiozäner Denudationsrand, geknüpft an den Außenabfall des älteren Aufwölbungsschwarmes.

2. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Prof. Dr. K. Reinhardt in Greifswald vor: »Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche«.

Der Verfasser beweist darin u. a. den folgenden Satz: Durch topologische Abbildung der Ebene kann man jede Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche in eine andere überführen, deren Bereiche von Geraden und Kreisbögen begrenzt sind. Angenommen ist dabei, daß der Rand eines jeden Bereiches aus endlich vielen Bögen zweimal stetig differenzierbarer Kurven besteht. Die benutzten topologischen Abbildungen führen eine Zerlegung, die aus Fundamentalbereichen einer Bewegungsgruppe besteht, in eine ebensolche Zerlegung über.

JAN 7 1933

Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche.

Von Prof. Dr. Karl Reinhardt
in Greifswald.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Im folgenden benutze ich die Benennung »Bereich« stets zur Bezeichnung eines einfach zusammenhängenden beschränkten Gebietes der (euklidischen) Ebene, dessen Rand von einer Jordankurve gebildet wird. Hat der Bereich die Eigenschaft, daß man die Ebene in zu ihm kongruente Exemplare zerlegen kann, so heiße er ein Zerlegungsbereich. Die vorliegende Arbeit soll ein Beitrag zur Lösung einer Frage sein, die Hilbert in seinem auf dem internationalen Mathematikerkongreß zu Paris 1900 gehaltenen Vortrag über mathematische Probleme[1] aufgeworfen hat. Er vermutet, daß jeder Zerlegungsbereich Fundamentalbereich einer Bewegungsgruppe ist. Man kann dieses Problem dadurch zu bewältigen versuchen, daß man (in genauer zu bestimmender Weise) alle Zerlegungsbereiche auf gewisse einfache Typen von Zerlegungsbereichen zurückzuführen versucht.

Eine solche Methode der Zurückführung besteht in der topologischen Deformation (umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung der ganzen Ebene auf sich), die ich in dieser Arbeit in der einfachsten Form benutze. Liegen zwei verschiedene Zerlegungsbereiche vor und zu jedem eine Ebenenzerlegung, dergestalt, daß die eine dieser beiden Zerlegungen durch eine topologische Deformation in die andere übergeführt werden kann, so mögen die beiden Zerlegungsbereiche einerseits und die beiden Zerlegungen andererseits zueinander äquivalent[2] heißen. Um diese Methode anwenden zu können, gebe ich zunächst eine Grundkonstruktion an. Je nach der Beschaffenheit der-

[1] Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1900.

[2] Es bleibe dahingestellt, ob dabei die topologische Deformation mit der Identität durch eine stetig von einem Parameter abhängende Menge von topologischen Deformationen so verbunden werden kann, daß bei Durchlaufung des Parameters nur Ebenenzerlegungen in kongruente Bereiche überstrichen werden. Bei den Ergebnissen der Arbeit ist dies der Fall. — Im übrigen sind zwei Zerlegungsbereiche, die einem dritten äquivalent sind, natürlich keineswegs stets einander äquivalent.

selben zerfallen die Zerlegungsbereiche — in einer von der gegebenen Zerlegung abhängigen Weise — in drei Gattungen. Ich entwickele nun in der vorliegenden Arbeit Methoden, die folgende zwei Sätze über die Reduktion von Zerlegungsbereichen zu beweisen gestatten:

Hauptsatz 1: Besteht der Rand eines Zerlegungsbereichs der dritten Gattung aus endlich vielen Bögen, von denen jeder einzelne in jedem Punkt eine sich stetig ändernde Krümmung besitzt, so ist er einem Zerlegungsbereich äquivalent, dessen Rand aus endlich vielen Strecken und Kreisbögen besteht.

Hauptsatz 2: Jeder Zerlegungsbereich der ersten und zweiten Gattung ist einem Zerlegungspolygon äquivalent.

Im übrigen enthält die Arbeit noch einige allgemeine Ergebnisse, die in diesen beiden Hauptsätzen nicht formuliert sind. Sie zerfällt in vier Teile. Im ersten Teil werden einige einfache Sätze über die Natur der hier in Rede stehenden Zerlegungen abgeleitet. Sodann wird die Grundkonstruktion angegeben und der Hauptsatz 2 für Bereiche der ersten Gattung aufgestellt (Satz 4). Im zweiten Teil werden einige Hilfssätze abgeleitet, auf die sich die Untersuchungen des dritten und vierten Teils stützen. Im dritten Teil wird der Hauptsatz 2 für Bereiche der zweiten Gattung bewiesen (Satz 16). Im vierten Teil schließlich wird zunächst ein ganz allgemeiner Satz über die Zerlegung in Jordanbereiche hergeleitet (Satz 19) und sodann der Hauptsatz 1 aufgestellt (Satz 20)[1].

Erster Teil.

Es sei ein Zerlegungsbereich gegeben und eine zu ihm gehörige Ebenenzerlegung. Solche Punkte der Ebene, die Randpunkte von mindestens drei Bereichen der Zerlegung sind, mögen Netzpunkte heißen. Da in jedem beschränkten Gebiet der Ebene offenbar nur endlich viele Bereiche der Zerlegung liegen können, folgen sofort die beiden Sätze:

Satz 1: Jeder Netzpunkt ist Randpunkt von endlich vielen Bereichen der Zerlegung. Ihre Anzahl heiße die »Vielfachheit« des Netzpunktes. Die Vielfachheiten aller Netzpunkte sind beschränkt.

Satz 2: Der Rand eines beliebigen Bereiches der Zerlegung kann nur mit endlich vielen anderen solchen Bereichen Randpunkte gemeinsam haben. Die Zahl dieser Bereiche ist für alle Bereiche der Zerlegung beschränkt.

Ich nenne die auf dem Rand eines beliebig herausgegriffenen Bereichs der Zerlegung liegenden Netzpunkte die Ecken dieses Bereichs. Die Ecken

[1] Zweck der vorliegenden Arbeit ist also die Umreißung von (übrigens verallgemeinerungsfähigen) Methoden zur Zurückführung »beliebiger« Zerlegungsbereiche auf Zerlegungspolygone. Einer weiteren Arbeit bleibt die Entwicklung anderer Methoden vorbehalten, welche beliebige Zerlegungspolygone auf einfachste Typen solcher zurückzuführen gestatten.

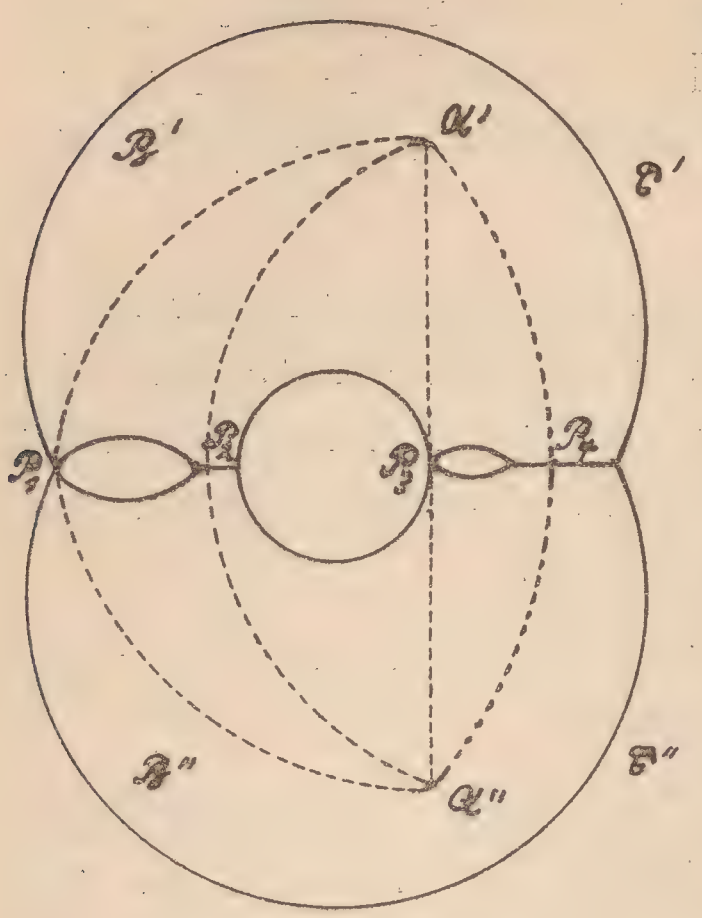


Abb. 1.

sind also durch die Zerlegung definiert und können für verschiedene Bereiche der Zerlegung verschiedene Randpunkte sein. Es gilt nun der

Satz 3: Jeder Bereich der Zerlegung besitzt nur endlich viele Ecken. Die Eckenzahl ist für alle Bereiche der Zerlegung beschränkt[1].

Infolge von Satz 2 braucht zum Beweise nur gezeigt zu werden, daß zwei Bereiche der Zerlegung stets nur in endlich (und sogar beschränkt) vielen Netzpunkten aneinanderstoßen können. Es sei zunächst bemerkt, daß, falls in der Ebene überhaupt zwei beliebige Bereiche ganz außerhalb voneinander liegen und eine gewisse Menge von Randpunkten (aber mindestens zwei) gemeinsam haben, es möglich ist, auf beiden Rändern entsprechende Umlaufssinne festzusetzen, und die gemeinsamen Randpunkte sich dann auf beiden Rändern in gleicher Rangordnung befinden[2]. Wählt man nun auf den Rändern C' und C'' der in Rede stehenden beiden Bereiche B' und B'' der Zerlegung eine Folge von gemeinsamen Netzpunkten $P_1, P_2, P_3, \cdots$ (Abb. 1), die sämtlich einem Teilbogen von C' (bzw. C'') angehören, auf diesem im selben Sinne aufeinanderfolgen und gegen einen Grenzpunkt konvergieren, nimmt man ferner innerhalb B' und B'' je einen Punkt Q' und Q'' an, und verbindet man dann Q' und Q'' durch zu je zweien (außer Q' bzw. Q'') punktfremde Jordanbögen entsprechend wie in Anm. 2) mit $P_1, P_2, P_3, \cdots$, so wird durch diese

[1] Für das Bestehen dieses Satzes ist wesentlich, daß der Zerlegungsbereich von einer Jordankurve begrenzt wird. Nimmt man etwa das folgende Gebiet, das durch die in einem rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem gegebenen Kurven:

$$y = \sin\frac{1}{x} \qquad (0 < x < 1),$$

$$y = 3 + \sin\frac{1}{x} \qquad (0 < x < 1),$$

$$x = 0 \qquad (-1 \leqq y \leqq 4),$$

$$x = 1 \qquad (\sin 1 \leqq y \leqq 3 + \sin 1)$$

berandet ist, so läßt sich die Ebene in zu ihm kongruente Exemplare auf einfache Weise zerlegen, aber z. B. sämtliche Punkte der Strecke $x = 0$, $-1 \leqq y \leqq +1$ sind Ecken des Ausgangsbereichs.

[2] Sind nämlich (Abb. 1) B' und B'' die beiden Bereiche, C' und C'' bzw. ihre Randkurven, P_1 und P_2 zwei gemeinsame Randpunkte, so wähle man in B' einen beliebigen Punkt Q' und in B'' einen beliebigen Punkt Q'', und verbinde Q' (bzw. Q'') mit P_1 und P_2 durch zwei (außer P_1 und P_2) ganz innerhalb B' (bzw. B'') verlaufende und (außer Q' (bzw. Q'')) punktfremde Jordanbögen. Diese vier Jordanbögen bestimmen einen Bereich B und ein Außengebiet $\overline{B}$, und die beiden Teilbögen, in die C' (bzw. C'') durch P_1 und P_2 zerlegt wird, unterscheiden sich dadurch, daß der eine ganz in $\overline{B}$ und der andere ganz in B verlaufen muß. Hierdurch können auf C' und C'' zwei entsprechende Umlaufssinne definiert werden. Die andere Behauptung über die gleiche Rangordnung beliebig vieler gemeinsamer Randpunkte ergibt sich durch entsprechende Überlegungen.

von einer gewissen Nummer $i = n$ an eine Folge von (dem Bereich B in Anm. 2 entsprechenden) Bereichen $Q' P_i Q'' Pi+1$ bestimmt, die sämtlich in einem festen Kreis liegen müssen und zu je zweien punktfremd sind[1]. Nun ist aber jeder Punkt P_i Randpunkt noch mindestens eines weiteren Zerlegungsbereichs, und ein solcher muß offenbar (von $i = n+1$ an) ganz innerhalb eines der eben genannten Bereiche liegen, nämlich innerhalb eines derjenigen beiden, für die P_i gemeinsamer Randpunkt ist. Es gäbe also innerhalb eines Kreises unendlich viele verschiedene Bereiche der Zerlegung, was unmöglich ist. Auf ganz entsprechende Weise folgt, daß die endliche Zahl von Netzpunkten, die irgend zwei Bereiche der Zerlegung gemeinsam haben können, für die ganze Zerlegung beschränkt sein muß. Damit ist Satz 3 bewiesen[2]. Die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ecken eines Bereichs der Zerlegung liegenden Bögen, die (außer den Endpunkten) nur aus gemeinsamen Randpunkten von je zwei Bereichen der Zerlegung bestehen, mögen Netzlinien heißen.

Nunmehr führe ich folgende Grundkonstruktion aus: Ich denke mir die Zerlegung und außerdem noch gesondert ein Exemplar des zugehörigen Zerlegungsbereichs. Die Bereiche der Zerlegung seien $B_1, B_2, B_3, \cdots$, das gesonderte Exemplar sei E. Dann markiere ich (vermöge der Kongruenz[3]) auf dem Rande von E die sämtlichen Ecken aller B_i, und nenne die so entstehenden Punkte Ecken erster Art von E. Es können endlich oder unendlich viele sein. Weiter übertrage ich umgekehrt alle Ecken erster Art von E auf die Ränder aller B_i. Ich greife nun irgend ein B_i heraus und betrachte die so auf seinem Rand entstandenen Ecken erster Art als Punkte der Ränder der an dieses B_i unmittelbar angrenzenden Bereiche der Zerlegung. Sofern sie als solche nicht selbst Ecken erster Art sind, denke ich sie mir markiert und führe diese Konstruktion für sämtliche B_i durch. Dann übertrage ich die derart auf den Rändern aller B_i eventuell neu entstandenen Punkte auf den Rand von E und nenne diese Punkte Ecken zweiter Art von E. Nun bezeichne ich alle Ecken zweiter Art auf den Rändern aller B_i, fasse sie als Punkte der Ränder der jeweils angrenzenden Bereiche der Zerlegung auf, markiere sie auf denselben, falls sie für diese noch nicht Ecken erster oder zweiter Art sind, und erhalte durch Übertragung der nunmehr eventuell neu entstandenen Punkte auf den Rand von E die Ecken dritter Art. So fahre ich fort. Das Verfahren, das im ganzen höchstens abzählbar unendlich viele Punkte als Menge M der Ecken sämtlicher Arten auf dem Rande von E liefert, gibt die durch die Zerlegung bedingte Zuordnung der Randpunkte von E.

Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder die Menge M enthält unendlich viele Punkte, oder sie enthält nur endlich viele Punkte. Im zweiten Fall muß die Grundkonstruktion nach einer endlichen Anzahl von Schritten ab-

---

[1] Die genauen Beweise dieser Behauptungen ergeben sich nach der oben angedeuteten Methode zwar leicht, lassen sich aber nicht ganz knapp darstellen und sind daher hier weggelassen.

[2] Es bleibe dahingestellt, ob zwei Bereiche der Zerlegung überhaupt so aneinandergrenzen können, daß ihre Ränder zwei Netzpunkte gemeinsam haben, ohne daß die »zwischenliegenden« Teilbögen der Ränder beider Bereiche völlig zusammenfallen.

[3] Falls E Symmetrien besitzt, sei eine der Deckbewegungen willkürlich herausgegriffen und fortan festgehalten.

brechen, d. h. es muß eine Zahl n derart geben, daß, falls die Ecken n-ter Art von E auf die Ränder der Bereiche B_i übertragen werden, für jeden Bereich B_i jede Ecke n-ter Art gleichzeitig Ecke n-ter oder $(n-1)$-ter Art des entsprechenden angrenzenden Bereichs der Zerlegung ist. Im ersten Falle kann die Grundkonstruktion ebenfalls nach endlich vielen Schritten abbrechen, sie kann aber auch ohne Ende weitergehen[1]. Ich nenne den Zerlegungsbereich von erster Gattung, wenn die Menge M nur endlich viele Punkte enthält. Er heiße von zweiter Gattung, wenn M zwar eine unendliche Menge ist, die Grundkonstruktion aber nach endlich vielen Schritten abbricht. Er sei schließlich von dritter Gattung, wenn die Grundkonstruktion niemals endet. Der Fall, daß der Zerlegungsbereich einer von erster Gattung ist, läßt sich sofort erledigen.

Hat man nämlich dann die Gesamtkonstruktion so weit festgesetzt, daß die Ecken n-ter Art auf die Ränder der Bereiche B_i übertragen sind, so zerfällt der Rand C von E in endlich viele Teilbögen von der Beschaffenheit, daß durch die Zerlegung die Kongruenz gewisser dieser Teilbögen, die man je zu einer Gruppe zusammenfassen kann, bewirkt wird. Die Teilbögen einer Gruppe sind dadurch gekennzeichnet, daß es zu jedem von ihnen einen anderen Bogen derselben Gruppe gibt, so daß diese beiden Bögen an irgendeiner Stelle der Zerlegung aneinandergrenzen, daß jeder Bogen der Gruppe auch stets — bei jedem Bereich der Zerlegung — an einen Bogen derselben Gruppe grenzt, und daß die Gruppe sich nicht in Teilgruppen derart zerlegen läßt, daß jede Teilgruppe die erstgenannten beiden Eigenschaften besitzt. Man kann also die Bögen einer solchen Gruppe durch zueinander kongruente andere Bögen in entsprechender Weise ersetzen. Geschieht dies so, daß die neue Randkurve wieder eine Jordankurve ist, so erhält man einen neuen Zerlegungsbereich, der eine entsprechende Zerlegung wie der ursprüngliche gestattet. Insbesondere kann man die sämtlichen Bögen aller Gruppen durch geradlinige (zwei aufeinanderfolgende Ecken verbindende) Strecken ersetzen oder, falls dadurch ein sich überschneidendes Polygon als Randkurve entstehen würde, durch geeignet gewählte Polygonzüge[2]. Daraus ergibt sich der

---

[1] Alle diese Fälle können tatsächlich eintreten. Dies erkennt man schon an der Zerlegung der Ebene in Rechtecke, wenn man dieselben zunächst zu unendlich langen Streifen so zusammensetzt, daß stets dieselben gegenüberliegenden Seiten ganz aneinandergrenzen. Legt man dann diese Streifen in verschiedener Weise gegeneinander verschoben aneinander, so kann man alle in Rede stehenden Fälle erzeugen. Ist a die Länge der Rechtecksseite, die bei der Streifenbildung frei bleibt, so erhält man z. B. den zweiten Fall, wenn man abwechselnd einen unverschobenen und einen um einen rationalen Teil von a verschobenen Streifen aneinander reiht. Verschiebt man abwechselnd nicht und um einen irrationalen Teil von a, so erhält man den ersten Fall, wobei die Grundkonstruktion ins Unendliche weitergeht. Verschiebt man schließlich erst um $\frac{1}{2}a$, dann um $\frac{1}{4}a$ und $\frac{3}{4}a$, ferner der Reihe nach um $\frac{1}{8}a$, $\frac{3}{8}a$, $\frac{5}{8}a$, $\frac{7}{8}a$; $\frac{1}{16}a$ bis $\frac{15}{16}a$ usw., so bekommt man ebenfalls den ersten Fall, aber so, daß die Grundkonstruktion bereits nach dem ersten Schritt abbricht.

[2] Strenggenommen sind hierbei Bewegungen erster und zweiter Art zu unterscheiden, und es ist die Möglichkeit zu betrachten, daß ein Bogen an sich selbst grenzt. Tritt dieser Fall nicht ein, so ist der eine Gruppe bildende Bogen frei veränderlich, falls nur Bewegungen einer Art vorkommen, sonst muß er stets axiale Symmetrie behalten. Tritt der eben ausge-

Satz 4: Ist der Zerlegungsbereich von erster Gattung, so gilt Hauptsatz 2.

Die eigentlichen Schwierigkeiten treten in den Fällen auf, in denen der Zerlegungsbereich von zweiter oder dritter Gattung ist.

Zweiter Teil.

Lemma 1: Gegeben sei ein Jordanbogen mit den Endpunkten A und B und eine Folge monoton abnehmender und gegen Null konvergierender positiver Zahlen d_ν ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$), von denen die erste d_1 etwa kleiner als ein Fünftel des Abstandes von A und B sein möge. Gibt es dann auf dem Jordanbogen zu jedem d_ν eine Anzahl von Punkten, von denen je zwei aufeinanderfolgende den gleichen Abstand $a_\nu < d_\nu$ besitzen, von denen der erste innerhalb eines Kreises mit dem Radius d_ν um A und der letzte innerhalb eines Kreises mit dem Radius $2 \cdot d_\nu$ um B liegt, und die sämtlich einem Kreise angehören, so ist der Jordanbogen ein Kreisbogen zwischen A und B[1].

Betrachtet man nämlich die Folge der Kreisbögen, die zu den d_ν gehören und mit dem ersten Punkt der jeweiligen Punktmenge beginnen und mit dem letzten enden, so kann man aus dieser eine Teilfolge auswählen, die gegen einen A mit B verbindenden Kreisbogen konvergiert. Da jeder Punkt dieses Grenzkreisbogens offenbar Häufungspunkt von Punkten des Jordanbogens sein muß, so gehört der ganze Grenzkreisbogen dem Jordanbogen an. Weitere Punkte kann der Jordanbogen aber dann nicht mehr besitzen. Denn nimmt man aus einem Jordanbogen einen inneren Punkt mit einer beliebig kleinen Umgebung heraus, so bilden die beiden A und B enhaltenden restlichen Teilbögen zwei getrennte Punktmengen.

Ich beweise nun das

Lemma 2: Besteht der Rand eines Zerlegungsbereichs aus endlich vielen Bögen, von denen jeder einzelne in jedem Punkt eine Tangente und eine Krümmung k besitzt, wobei k positiv gezählt werde, wenn die Richtung vom Kurvenpunkt nach dem Krümmungsmittelpunkt in das Innere des Zerlegungsbereichs weist, und negativ im anderen Fall, und die Tangente und k sich längs eines Bogens stetig ändern sollen, so ist, falls s die von einem beliebigen Punkte aus bis zu einem veränderlichen Punkte gemessene Bogenlänge des Randes des Zerlegungsbereichs bedeutet, wobei s positiv gezählt werde, wenn die Richtung vom Anfangs-

schlossene Fall dagegen ein, so muß er bei Bewegungen von nur erster Art Rotationssymmetrie besitzen, und bei Bewegungen von nur zweiter Art oder von beiden Arten ist er bereits selbst eine geradlinige Strecke, so daß er dann überhaupt nicht verändert werden kann, aber auch nicht verändert zu werden braucht.

[1] Unter den »Kreisbögen zwischen zwei Punkten A und B« ist hier und im folgenden natürlich auch immer die Strecke $A\,B$ enthalten. Im übrigen kann Lemma 1 selbstverständlich allgemeiner gefaßt werden; es ist hier so ausgesprochen, wie es später zur Verwendung kommt.

punkt zum veränderlichen Punkt den Bereich zur Linken läßt, und andernfalls negativ, und falls S die in diesem Sinne genommene Gesamtlänge des Randes ist, das Integral $\int_0^S k \cdot ds$ gleich Null.

Zum Beweise beachte man, daß, falls man jedem Bereich der Zerlegung den positiven Umlaufssinn gibt, ein Bogen, in welchem zwei Bereiche aneinandergrenzen, für beide entgegengesetzten Durchlaufungssinn haben wird. Betrachtet man dann eine Folge von einander umfassenden Teilbereichen der Zerlegung, in der Weise etwa, wie ich es S. 3 und 4 meiner Dissertation[1] auseinandergesetzt habe, so daß der ν-te Teilbereich A_ν Bereiche der Zerlegung umschließt und a_ν »Randbereiche« enthält und (siehe Hilfssatz 1 a. a. O.) $\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{A_\nu} = 0$ ist, und bildet man die Summe der in Rede stehenden Integrale über alle vom ν-ten Teilbereich umschlossenen Bereiche der Zerlegung, so ist natürlich, wenn man $\int_0^S k \cdot ds = J$ setzt:

$$\frac{1}{A_\nu} \cdot \sum_{i=1}^{A_\nu} \int_0^S k_i \cdot ds_i = J.$$

Da sich je zwei Teilintegrale über eine innere Netzlinie des Teilbereichs gegenseitig aufheben, so ist $\sum_{i=1}^{A_\nu} \int_0^S k_i \cdot ds_i$ gleich einem Integral über den Rand des Teilbereichs; ist K das Maximum des absoluten Wertes von k für den Zerlegungsbereich, so ist demnach der absolute Wert jener Summe kleiner als $a_\nu \cdot K \cdot S$, woraus wegen $\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{A_\nu} = 0$ die Behauptung $J = 0$ folgt.

Aus dem Lemma 2 ergibt sich ohne weiteres, daß das über die Randkurve eines beliebigen einfach zusammenhängenden Teilbereichs der Zerlegung erstreckte Integral $\int k \cdot ds$ (das Vorzeichen von k ist dabei durch die Randbereiche des Teilbereichs bestimmt) stets gleich Null sein muß. Also gibt es keinen konvexen Teilbereich der Zerlegung, es sei denn, daß er von einem Polygon begrenzt wird. Insbesondere folgt hieraus:

Lemma 3: Ein Kreis kann niemals in Zerlegungsbereiche von der in Lemma 2 genannten Art zerlegt werden.

Schließlich brauche ich noch das

Lemma 4: Besitzt ein Jordanbogen in jedem Punkte eine Tangente und eine Krümmung, ändern sich Tangente und Krümmung längs des Bogens stetig und nimmt die Krümmung in einer auf

[1] Über die Zerlegung der Ebene in Polygone, Borna-Leipzig 1918.

dem Bogen überall dicht liegenden Punktmenge nur endlich viele Werte an, so ist der Bogen ein Kreisbogen.

Dies ist klar, denn ist P ein Punkt der überall dicht liegenden Menge, so folgt aus der Stetigkeit der Krümmung, daß es zu P eine Umgebung gibt, so daß in jedem Punkt jener Menge, die dieser Umgebung angehört, und damit in jedem Punkt der Umgebung überhaupt die Krümmung den gleichen Wert wie in P besitzt, so daß die Umgebung ein Kreisbogen ist. Ebenso gibt es zu jedem nicht jener Menge angehörenden Punkte des Bogens eine solche Kreisbogenumgebung, und da man mit endlich vielen dieser Umgebungen den Bogen überdecken kann, so ist Lemma 4 bewiesen.

Dritter Teil.

Nunmehr kann man den Fall, daß der Zerlegungsbereich von zweiter Gattung ist, behandeln. Ich schicke zunächst einen allgemeinen Satz voraus, auf den sich die späteren Beweise stützen. Unter einer Normalfolge von Punkten auf C will ich eine Punktfolge verstehen, die einem Teilbogen von C angehört, so daß die einzelnen Punkte der Folge auf diesem Bogen einander im selben Sinne folgen und gegen einen Grenzpunkt konvergieren (siehe beim Beweise von Satz 3). Dann beweise ich den

Satz 5: Seien bei einer geschlossenen Jordankurve C zwei Folgen von Teilbögen c_ν' und c_ν'' ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$) vorhanden, die folgende Eigenschaften besitzen:

(a) die Bögen c_ν' gehören alle demselben Teilbogen $A_1 B_1$ von C an; ebenso gehören die Bögen c_ν'' alle demselben Teilbogen $A_2 B_2$ von C an;

(b) jeder Bogen c_ν' mit den Endpunkten A_ν' und B_ν' soll dem entsprechenden Bogen c_ν'' mit den entsprechenden Endpunkten A_ν'' und B_ν'' kongruent sein;

(c) die Kongruenz der Bögen c_ν' und c_ν'' soll über A_ν' und A_ν'' hinaus nicht fortgesetzt werden können, d. h. wenn c_ν' mit c_ν'' zur Deckung gebracht wird, soll der von A_ν' nach der anderen Seite wie c_ν' ausgehende Bogen von C mit dem von A_ν'' nach der anderen Seite wie c_ν'' ausgehenden Bogen von C sich nicht mehr decken[1];

(d) die Abstände $A_\nu' B_\nu' = A_\nu'' B_\nu''$ sollen oberhalb einer endlichen Schranke bleiben;

(e) die Punkte A_ν' sollen eine Normalfolge bilden; die Punkte A_ν'', B_ν', B_ν'' sollen entweder je auch eine Normalfolge bilden, oder eine oder zwei dieser Punktfolgen sollen mit einem einzigen Punkte zusammenfallen (insbesondere ist also zugelassen, daß sämtliche Bögen der Folge c_ν'' identisch sind); die Grenzpunkte der Folgen A_ν', A_ν'', B_ν', B_ν'' (oder bei den drei letzteren die Punkte, mit denen sie eventuell zusammenfallen) seien bzw. A', A'', B', B''.

[1] Diese Aussage kann ersichtlich leicht punktmengentheoretisch völlig scharf gefaßt werden.

Dann sind die Bögen $A'B'$ und $A''B''$ kongruente Kreisbögen, der Kreisbogen $A''B''$ läßt sich über A'' hinaus nicht fortsetzen, und die Folge A''_ν muß mit dem Punkt A'' zusammenfallen.

Zum Beweise betrachte ich zwei aufeinanderfolgende Punkte A'_ν und $A'_{\nu+1}$; die Nummer ν soll dabei bereits so hoch gewählt werden, daß, falls ein beliebig kleines positives ε_ν vorgegeben ist, das aber schon kleiner als ein Fünfundzwanzigstel des Abstands von A' und B' sein soll, die vier Punkte A'_ν, A''_ν, B'_ν, B''_ν und die Kurvenbögen $A'_\nu A'$, $A''_\nu A''$, $B'_\nu B'$, $B''_\nu B''$ innerhalb von Kreisen mit dem Radius ε_ν um die bzw. Punkte A', A'', B', B'' liegen. Nun kann die Normalfolge A'_ν auf dem Teilbogen $A_1 B_1$ auf derselben Seite von A' liegen wie B' oder auf der entgegengesetzten Seite; und dasselbe gilt für die Normalfolge A''_ν auf dem Teilbogen $A_2 B_2$ in bezug auf A'' und B'', sofern nicht alle A''_ν mit A'' identisch sind. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder die Folgen A'_ν und A''_ν verhalten sich in dem eben genannten Sinn in bezug auf $A'B'$ und $A''B''$ entgegengesetzt, wozu auch der Fall gerechnet werden soll, daß die Folge A''_ν mit A'' identisch ist. Oder diese beiden Folgen verhalten sich in bezug auf $A'B'$ und $A''B''$ gleich.

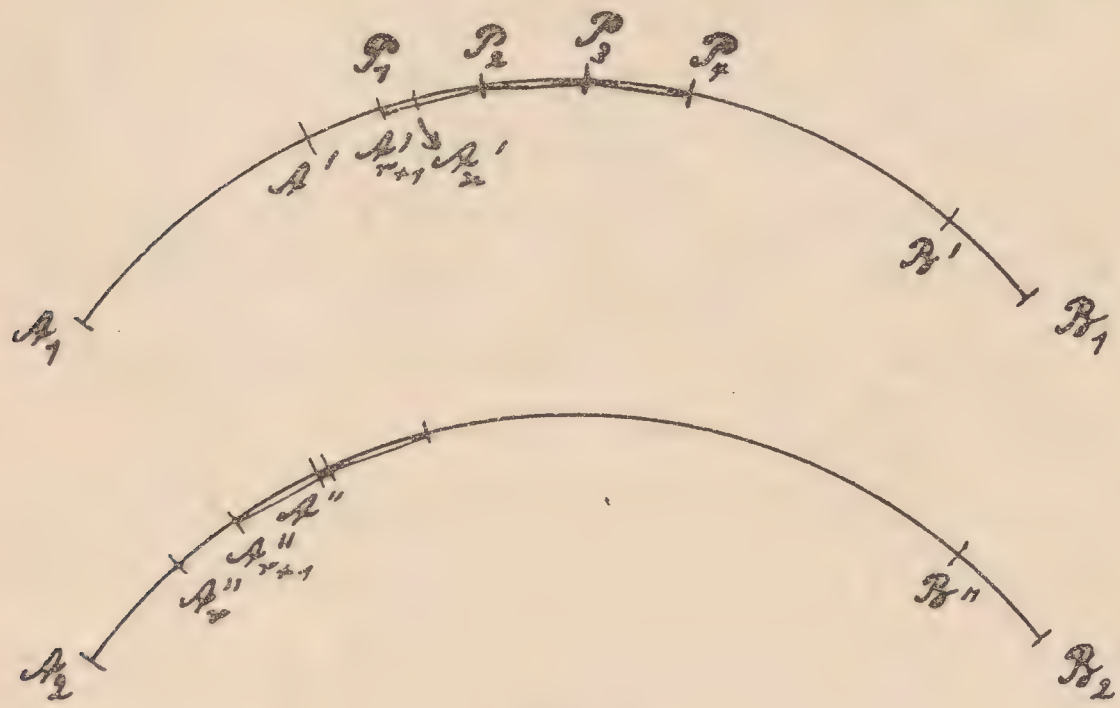


Abb. 2.

Ich nehme zunächst den ersten Fall (Abb. 2). Liege etwa die Folge A'_ν auf derselben Seite von A' wie B' und die Folge A''_ν auf der anderen Seite von A'' wie B''. Dann fasse ich $A''_{\nu+1}$ als Punkt des Bogens c''_ν auf und markiere ihn vermöge der Kongruenz von c''_ν und c'_ν auf c'_ν. Dieser so erhaltene Punkt heiße P_2. Ich fasse ihn als Punkt von $c'_{\nu+1}$ auf, markiere ihn auf $c''_{\nu+1}$, betrachte ihn als Punkt von c''_ν und markiere ihn auf c'_ν. So entsteht der Punkt P_3. Mit diesem verfahre ich genau so wie mit P_2 usw. Nun müssen die Punkte $A'_{\nu+1} = P_1, P_2, P_3 \cdots$ offenbar auf einem Kreis liegen, der Abstand von je zwei aufeinanderfolgenden ist kleiner als $5 \cdot \varepsilon_\nu$, der erste liegt innerhalb eines Kreises mit dem Radius $5 \cdot \varepsilon_\nu$ um A' und der letzte innerhalb eines Kreises mit dem Radius $10 \cdot \varepsilon_\nu$ um B'[1]. Das Verfahren bleibt anwendbar und vereinfacht sich noch, wenn alle A''_ν mit A'' identisch sind. Wenn umgekehrt die Folge A''_ν auf derselben Seite von A'' wie B'' und die Folge A'_ν auf der anderen Seite von A' wie B' liegt, vertauschen nur die beiden Nummern ν und $\nu+1$ ihre Rolle.

Ich betrachte jetzt den zweiten Fall (Abb. 3). Es möge etwa gleichzeitig die Folge A'_ν auf derselben Seite von A' wie B' und die Folge A''_ν auf derselben Seite von A'' wie B'' liegen. Dann fasse ich A''_ν als Punkt von $c''_{\nu+1}$ auf und markiere diesen Punkt vermöge der Kongruenz von $c''_{\nu+1}$ und $c'_{\nu+1}$ auf $c'_{\nu+1}$.

[1] Diese ganz rohen Abschätzungszahlen sind so gewählt, daß sie ohne weiteres auch in allen folgenden Fällen gelten.

Der markierte Punkt sei P_2. Nun ist in diesem Fall das Ausschlaggebende, daß P_2 nicht mit A'_ν zusammenfallen kann. Denn sonst wäre offenbar die Kongruenz der Bögen c'_ν und c''_ν über A'_ν bzw. A''_ν hinaus fortsetzbar, was nach Voraussetzung (*c*) nicht der Fall sein sollte. Liegt nun P_2 auf c'_ν, so fasse ich diesen Punkt als Punkt von c'_ν auf, markiere ihn auf c''_ν, fasse diesen Punkt als Punkt von $c''_{\nu+1}$ auf und markiere ihn auf $c'_{\nu+1}$. Der so entstandene Punkt sei P_3. Mit P_3 verfahre ich genau so usw. Die so entstehenden Punkte $A'_\nu = P_1, P_2, P_3, \cdots$ haben offenbar genau dieselben Eigenschaften, wie sie oben bei der entsprechenden Punktmenge angegeben wurden. Liegt aber P_2 nicht auf c'_ν selbst, so muß umgekehrt der Punkt, der durch Auffassung von A'_ν als Punkt von $c'_{\nu+1}$ und Markierung auf $c''_{\nu+1}$ entsteht, auf c''_ν liegen, und die Überlegung kann unter Vertauschung der ein- und zweigestrichenen Buchstaben angestellt werden. Markiert man dann die so auf c''_ν entstehende Punktmenge auf c'_ν, so hat man wieder eine Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \cdots$ von derselben Beschaffenheit. Wenn schließlich die Folge A'_ν auf der anderen Seite von A' wie B' und die Folge A''_ν auf der anderen Seite von A'' wie B'' liegt, vertauschen auch hier nur die beiden Nummern ν und $\nu+1$ ihre Rolle.

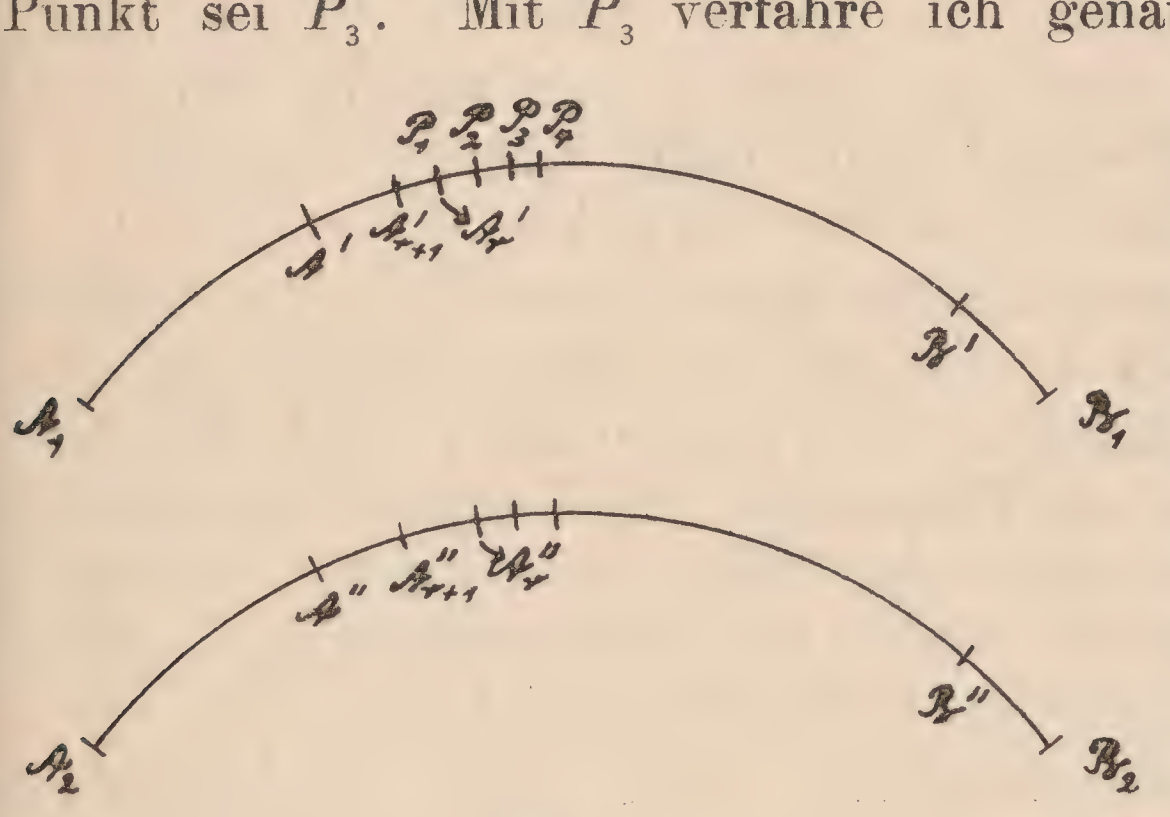


Abb. 3.

In allen Fällen sind ersichtlich die Voraussetzungen von Lemma 1 für den Bogen $A'B'$ und mit $5\,\varepsilon_\nu = d_\nu$ erfüllt; folglich ist $A'B'$ ein Kreisbogen. Dieselben Voraussetzungen gelten aber auch in jedem Fall für den Bogen $A''B''$, der demnach ebenfalls ein Kreisbogen, und zwar ein zu $A'B'$ kongruenter Kreisbogen ist. Läge nun die Folge A''_ν auf derselben Seite von A'' wie B'', so wäre offenbar in jedem Fall Voraussetzung (*c*) verletzt. Läge sie auf der anderen Seite, und wäre einer der Kreisbögen $A'B'$ und $A''B''$ über A' bzw. A'' hinaus fortsetzbar, so wäre sie ebenfalls in jedem Fall verletzt, wie man leicht erkennt. Liegt sie aber auf der anderen Seite, und ist keiner der beiden Kreisbögen fortsetzbar, so liegt auch die Folge A'_ν auf der anderen Seite von A' wie B', und es müßte offenbar bei der Kongruenz je zweier c'_ν und c''_ν der Punkt A' dem Punkt A'' entsprechen, was ebenfalls der Voraussetzung (*c*) widerspricht. Daher kann die Folge A''_ν nur mit A'' identisch sein; in diesem Fall aber kann ebenfalls der Kreisbogen $A''B''$ nicht über A'' hinaus fortgesetzt werden, ohne daß die Voraussetzung (*c*) zerstört wird. Damit ist Satz 5 völlig bewiesen.

Nun stelle ich folgendes fest: Es sei auf dem Rand C von E eine beliebige Ecke P gegeben. Dann läßt sich C in endlich viele Teilbögen c_ν ($\nu = 1, 2, 3, \cdots n$) so zerlegen, daß P Teilpunkt ist und alle anderen Teilpunkte ebenfalls Ecken sind. Jeder Teilbogen c_ν soll gleichzeitig Bogen des Randes eines anderen Exemplars des Zerlegungsbereichs sein, so daß dieser

also an E in c_ν (und zwar »von außen« oder »von innen«; siehe Beweis von Satz 6) angrenzt, aber derart, daß, falls C in einem der beiden möglichen Sinne durchlaufen wird, dieses Angrenzen im Endpunkt von c_ν gerade aufhört (während es vor dem Anfangspunkt eventuell schon stattgefunden haben kann). Eine derartige Einteilung von C will ich eine zu P und dem betreffenden Umlaufssinn gehörige Kette nennen. n heiße die Gliederzahl der Kette. Ich beweise nun den

Satz 6: Es gibt zu jeder Ecke und jedem der beiden Umlaufssinne eine Kette, und die Gliederzahlen aller dieser Ketten, die zu Ecken gleicher Art gehören, sind beschränkt.

Zum Beweise betrachte ich zunächst die Ecken erster Art. Ist eine beliebige solche vorgegeben, so muß es (mindestens) einen Bereich der Zerlegung geben, für den sie Netzpunkt ist. Nun nehme man einfach die sämtlichen Netzpunkte dieses Bereiches als Teilpunkte und die zwischenliegenden Netzlinien als Bögen c_ν. Dann hat man, und zwar für beide Umlaufssinne, je eine zur gegebenen Ecke gehörige Kette. Die Gliederzahlen aller dieser Ketten sind nach Satz 3 auch beschränkt (obere Schranke: N_1).

Satz 6 gilt also für die Ecken erster Art. Nun zeige ich, daß er für die Ecken k-ter Art gilt, wenn er für die Ecken $(k-1)$-ter Art richtig ist. Sei P eine beliebige Ecke k-ter Art. Dann gibt es in der Zerlegung (mindestens) eine Netzlinie, in welcher zwei Bereiche B_1 und B_2 aneinanderstoßen, so daß die Ecke P von B_1 gleichzeitig Ecke $(k-1)$-ter Art von B_2 ist (Abb. 4). Die Endpunkte dieser Netzlinie seien A und B. Dann sind A und B Ecken erster Art sowohl von B_1 als von B_2. Es werde nun eine zu P und dem Sinn APB gehörige Kette gesucht. (Für den umgekehrten Sinn BPA geht das Folgende genau so.) Dann fasse man P als Ecke $(k-1)$-ter Art von B_2 auf und konstruiere die zu ihr und dem Sinn APB gehörige Kette auf dem Rand von B_2, die nach Voraussetzung existiert. Diejenigen Glieder dieser Kette, die der Netzlinie AB angehören, übertrage man einfach auf den Rand des Bereichs B_1, und zwar das erste nur von A an und das letzte nur bis B hin[1]. Im übrigen nehme man als Teilpunkte die sämtlichen auf dem Rand von B_1 liegenden Netzpunkte, die nicht der Netzlinie AB angehören. Dann hat man eine Kette für P von der gewünschten Beschaffenheit. Ist außerdem

Abb. 4.

[1] Um allen vorkommenden Fällen gerecht zu werden, muß das letzte vor B kommende Glied offenbar als Gesamtrand von B_2 aufgefaßt werden.

N_{k-1} die obere Schranke für die Gliederzahlen aller zu den Ecken $(k-1)$-ter Art gehörigen Ketten, so ist eine obere Schranke für die auf die eben geschilderte Weise entstehenden, zu den Ecken k-ter Art gehörigen Ketten offenbar $N_{k-1}+N_1$, so daß Satz 6 damit vollständig bewiesen ist.

Ich fasse nun zunächst den Fall ins Auge, daß unendlich viele Ecken erster Art vorhanden sind, und betrachte deren Häufungspunkte. Zu jedem solchen gibt es (mindestens) eine Normalfolge von Ecken erster Art. Ich beweise nun den

Satz 7: Ist H Häufungspunkt von Ecken erster Art, so ist ein von H ausgehender Teilbogen von C, der fast alle Punkte einer zu H gehörigen Normalfolge enthält, ein Kreisbogen.

Ich verstehe unter der Richtung einer Normalfolge die Richtung vom ersten Punkt der Folge zu ihrem Grenzpunkt auf dem sie enthaltenden Teilbogen. Nun bestimme ich zu jedem Punkt der zu H gehörigen Normalfolge und dem durch ihre Richtung gegebenen Umlaufssinn nach vorhin die Kette. Da es unendlich viele Ketten sind und die Gliederzahlen der Ketten nach Satz 6 beschränkt sind, müssen unendlich viele Ketten von gleicher Gliederzahl vorhanden sein. Die übrigen lasse ich weg. Die restlichen Punkte der Normalfolge bezeichne ich mit $P_1, P_2, P_3, \cdots$. Sei n die gemeinsame Gliederzahl der zugehörigen gleichgliedrigen Ketten. Ich denke mir die n Teilbögen der zu P_i gehörigen Kette in der Reihenfolge, die der Richtung der Normalfolge entgegengesetzt ist, mit $b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, \cdots b_{ni}$ bezeichnet. Bedeuten diese Buchstaben gleichzeitig die Längen der betreffenden Bögen[1], so muß unter den Folgen $b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, \cdots b_{ni}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ offenbar eine erste sein, deren limes superior von Null verschieden ist. Diese Folge von Bögen betrachte ich. Ihre Anfangspunkte (in der Richtung der Normalfolge) besitzen einen von H verschiedenen Häufungspunkt J[2]. Ich greife eine Teilfolge heraus, deren Anfangspunkte gegen J konvergieren. Ihre Endpunkte müssen offenbar gegen H konvergieren. Die jetzt ins Auge gefaßten Bögen sind sämtlich gleichzeitig Randbögen von Bereichen, die an E angrenzen, oder, anders ausgesprochen, kommen sämtlich nochmals als Stücke von C vor. Deren Anfangspunkte haben mindestens einen Häufungspunkt L; ich greife eine Teilfolge heraus, deren Anfangspunkte gegen L konvergieren. Die Endpunkte haben einen Häufungspunkt K. Ich wähle die Teilfolge noch so, daß die Endpunkte gegen K konvergieren, und ferner so, daß auch alle Bögen der zweiten Folge einem

[1] Ein Jordanbogen braucht keine Länge zu besitzen. Ich habe mich hier dieser vereinfachenden Annahme bedient, um den Gedankengang nicht zu sehr zu komplizieren. Im allgemeinen Fall müssen die b_{ki} natürlich die Bogenlängen zwischen den entsprechenden Punkten auf dem der Jordankurve zugeordneten Kreis bedeuten. Dann geht alles genau so.

[2] Wäre dieser Häufungspunkt wieder H, so gäbe es also eine Folge von Teilbögen von C, die gegen C konvergieren, und zwar so, daß ihre Endpunkte eine Normalfolge bilden, die von der einen Seite, und ihre Anfangspunkte eine Normalfolge, die von derselben oder der andern Seite gegen H konvergiert, oder die dauernd mit H identisch ist. Nimmt man dann einen Punkt J in beliebiger Nähe von H auf der der Normalfolge der Endpunkte entgegengesetzten Seite, so gelten die folgenden Betrachtungen sämtlich für den Bogen HJ. Dieser müßte also ein Kreisbogen sein, und da J beliebig nahe an H liegt, müßte C ein Kreis sein, was unmöglich ist.

festen Teilbogen von C angehören. Schließlich beschränke ich mich noch auf eine solche Teilfolge, daß die vier gegen H, J, K, L konvergierenden Punktfolgen Normalfolgen sind, wobei es ersichtlich sehr wohl sein kann, daß einige der zu den drei letzten Grenzpunkten gehörigen Folgen mit diesen Grenzpunkten identisch sind.

Nun sind offenbar die sämtlichen Voraussetzungen von Satz 5 mit $H = A'$, $J = B'$, $K = A''$ und $L = B''$ erfüllt. Dann folgt nach diesem Satz, daß $H\,J$ ein Kreisbogen ist. Dies war aber zu beweisen. Im übrigen ergibt sich noch, daß sämtliche Ecken erster Art, die die Normalfolge auf jenem Kreisbogen bilden, durch ein und dieselbe Ecke erster Art, von der einseitig ein nicht über sie fortsetzbarer Kreisbogen ausgeht, erzeugt werden.

Zu jedem Häufungspunkt von Ecken erster Art gibt es also nach einer oder, wenn die Ecken sich von beiden Seiten gegen ihn häufen, nach beiden Seiten einen Kreisbogen (natürlich können beide Bögen auch demselben Kreise angehören). Ich denke mir jeden solchen Kreisbogen so groß als möglich. Dann kann es nur endlich viele solcher Kreisbögen geben. Denn würden sich solche Bögen irgendwo häufen, so wäre ein Häufungspunkt der zu den Bögen gehörigen Punkte H auch Häufungspunkt von Ecken erster Art, und es müßte also von ihm ein einziger Kreisbogen ausgehen, in den von einem gewissen an die sich häufenden Bögen eindringen müßten, so daß diese nicht die größtmöglichen gewesen wären. Es gilt also der

Satz 8: Besitzt E unendlich viele Ecken erster Art, so enthält der Rand C von E endlich viele Kreisbögen von der Beschaffenheit, daß jeder dieser Bögen unendlich viele Ecken erster Art enthält. Die übrigen Bögen von C können nur endlich viele Ecken erster Art enthalten.

Es kann noch etwas weiteres über die unendliche Menge der Ecken erster Art, die auf einem der in Satz 8 genannten Kreisbögen vorkommt, ausgesagt werden. Ich beweise nämlich den

Satz 9: Die unendliche Menge der Ecken erster Art, die auf einem der in Satz 8 genannten (abgeschlossenen) Kreisbögen liegt, besitzt daselbst ein Maximum und ein Minimum.

Es ist ohne weiteres klar, wie die Begriffe »Maximum«, »Minimum«, »obere und untere Grenze« hier gemeint sind, falls dem betreffenden Kreisbogen eine bestimmte Richtung zugeschrieben ist. Zum Beweise beachte man, daß, falls die obere Grenze H nicht angenommen würde, es eine Normalfolge von Ecken erster Art zu ihr geben würde. Würde man nun mit dieser genau so verfahren, wie beim Beweise von Satz 7, nur mit dem Unterschied, daß jetzt die Ketten zu einem Umlaufssinn konstruiert werden müssen, welcher der Richtung der Normalfolge entgegengesetzt ist, und würde man wieder die erste nicht gegen Null konvergierende Teilbogenfolge ins Auge fassen, deren Anfangspunkte gegen J und deren Endpunkte gegen H konvergieren, so würde sich wie dort zeigen lassen, daß der Bogen $H\,J$ ein Kreis sein müßte, falls die Normalfolge der Endpunkte nicht mit H identisch wäre, wie es nach Voraussetzung allein möglich ist. Nun sieht man nach der Schluß-

bemerkung beim Beweise von Satz 7 sofort, daß dieser Kreisbogen eine Fortsetzung des in Frage stehenden Kreisbogens sein müßte, und außerdem folgt, daß er in der Umgebung von J noch Ecken erster Art enthalten müßte[1], was der Voraussetzung widerspricht. Damit ist der Beweis geführt. Zusammenfassend ergibt sich der

Satz 10: Besitzt E unendlich viele Ecken erster Art, so kann der Rand C von E durch endlich viele dieser Ecken derart in Teilbögen zerlegt werden, daß das Innere eines solchen Teilbogens entweder überhaupt keine Ecken erster Art oder deren unendlich viele besitzt, und daß diese letzteren Teilbögen Kreisbögen sind.

Auf ganz entsprechende Weise läßt sich nun offenbar der Fall behandeln, daß unendlich viele Ecken von ein und derselben höheren Art vorhanden sind. Zunächst gilt ein dem Satz 7 ganz entsprechender Satz, da die Beschränktheitsaussage von Satz 6, auf die im wesentlichen sich der Beweis von Satz 7 stützte, für Ecken beliebiger, aber gleicher Art gültig ist. Man hat also den

Satz 11: Ist H Häufungspunkt von Ecken ν-ter Art, so ist ein von H ausgehender Teilbogen von C, der fast alle Punkte einer zu H gehörigen Normalfolge enthält, ein Kreisbogen.

Nun sind, da C ein Bereich zweiter Gattung sein sollte, die Artzahlen der sämtlichen Ecken beschränkt. Daher folgt aus den Sätzen 7 und 11 ganz entsprechend wie Satz 8 der

Satz 12: Besitzt E unendlich viele Ecken mit beschränkten Artzahlen, so enthält der Rand C von E endlich viele Kreisbögen von der Beschaffenheit, daß jeder dieser Bögen unendlich viele Ecken (von mindestens einer Art) enthält. Die übrigen Bögen von C können nur endlich viele Ecken enthalten.

Ferner gilt auch, wie man sofort sieht, der dem Satz 9 entsprechende

Satz 13: Die unendliche Menge der Ecken, die auf einem der in Satz 12 genannten (abgeschlossenen) Kreisbögen liegt, besitzt daselbst ein Maximum und ein Minimum.

Demnach folgt weiter der

Satz 14: Besitzt E unendlich viele Ecken mit beschränkten Artzahlen, so kann der Rand C von E durch endlich viele dieser Ecken derart in Teilbögen zerlegt werden, daß das Innere eines solchen Teilbogens entweder überhaupt keine Ecken oder deren unendlich viele besitzt, und daß diese letzteren Teilbögen Kreisbögen sind.

Nun kann man die in dem letzten Satz auftretenden Teilbögen ganz ähnlich behandeln, wie dies früher in dem Fall, daß überhaupt nur endlich

[1] Man sieht sofort, daß, wenn die beim Verfahren sich ergebenden Ecken »jenseits von J« sich gegen J häufen würden, der Kreisbogen HJ noch über J müßte fortgesetzt werden können. — Im übrigen brauchen die Ecken erster Art (wie erst recht die höherer Art) keineswegs eine abgeschlossene Menge zu bilden.

viele Ecken von E vorhanden sind, geschehen ist. Ich interessiere mich hier nur für die Bögen, die im Inneren keine weiteren Ecken enthalten. Jeder derselben gehört einer Gruppe an (siehe Beweis von Satz 4), wobei allerdings zugelassen werden muß, daß einer solchen Gruppe auch ein Teilbogen eines der Kreisbögen angehört, von denen in Satz 14 die Rede ist. Die Eigenschaften der Gruppenbildung ergeben sich genau wie früher. Ebenfalls wie früher kann man die Bögen einer Gruppe, der keiner der vorhin genannten Kreisbögen angehört, durch kongruente Polygonzüge oder durch Strecken ersetzen. Falls einer Gruppe einer jener Kreisbögen angehört, genügt es, festzustellen, daß dann alle ihr angehörigen Bögen kongruente Kreisbögen sind[1].

Jetzt ist zum Beweise des Hauptsatzes in dem vorliegenden Fall nur noch zu zeigen, daß die in Satz 14 genannten Kreisbögen Strecken sind. Ich weise dies zunächst für diejenigen Bögen nach, die unendlich viele Ecken erster Art enthalten.

Zum Beweise verfahre ich so: Ich greife einen der Kreisbögen heraus und nehme an, er besitze einen endlichen Radius. Dieser Kreisbogen sei k_1.

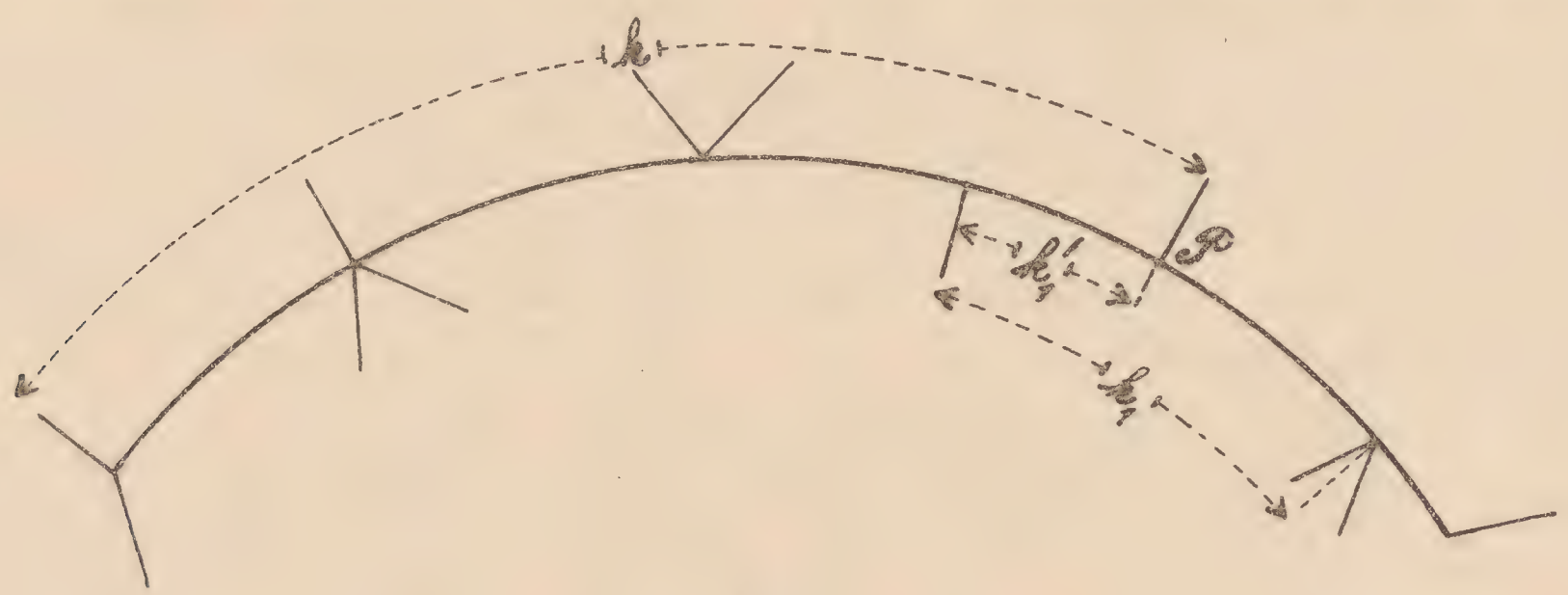


Abb. 5.

Ich fasse dann die sämtlichen größtmöglichen Kreisbögen k_ν des Randes von E ins Auge, die den gleichen Radius haben und Ecken erster Art enthalten. Es ist nun wesentlich, daß die Anzahl aller dieser Bögen nach dem Inhalt von Satz 14 nur endlich ($= m$) sein kann. Nun betrachte ich eine Ecke erster Art P im Inneren von k_1. Sie ist irgendwo in der Zerlegung Netzpunkt, und k_1 selbst ist dort Netzlinie (Abb. 5). Ich verfolge diese Netzlinie von dem Netzpunkt aus nach einer Seite, und zwar so lange, als sie mit dem durch k_1 bestimmten Kreis identisch ist. Den so bestimmten Kreisbogen nenne ich k. Dann setzt sich k einmal zusammen aus einer gewissen Anzahl von vollen Bögen k_ν, und zweitens ebenfalls aus einer gewissen Anzahl von vollen Bögen k_ν und einem durch P bestimmten Teilbogen von k_1. Diesen letzteren bezeichne ich mit k'_1. Bedeuten die k_ν, k, k'_1 gleichzeitig die Längen der betreffenden Kreisbögen, so muß also $k'_1 = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \cdot k_\nu$ sein, wo die λ_ν positive oder negative

[1] Natürlich könnten diese dann ebenfalls durch Polygonzüge ersetzt werden, doch ist dies für das Folgende unwesentlich. Überhaupt könnte man zunächst darauf ausgehen, auf den in Satz 14 genannten Kreisbögen Teilbögen nachzuweisen, auf denen die Ecken überall dicht liegen, während sie sich sonst nicht häufen können. Doch kommt man hier ohne dies aus. Siehe indessen Satz 19 auf S. 45.

ganze Zahlen oder Null bedeuten. Nun kann ich diese Betrachtung für unendlich viele Punkte P, d. h. für unendlich viele Zahlen k_1' ausführen. Dann können aber die λ_ν nicht beschränkt sein. Sind sie aber nicht beschränkt, so müssen Netzbögen k von beliebig großer Länge vorkommen. Insbesondere müßte also ein geschlossener Kreis als Netzlinie vorkommen. Dies ist aber nach Lemma 3 unmöglich. Folglich ist die eingangs gemachte Voraussetzung, daß k_1 endlichen Radius habe, falsch, und k_1 ist eine Strecke.

Es könnte nun sein, daß überhaupt nicht unendlich viele Ecken erster Art vorhanden waren. Ich zeige nun aber allgemein: Diejenigen im Satz 14 vorkommenden Kreisbögen, die unendlich viele Ecken ν-ter Art enthalten, sind Strecken, falls entweder nur endlich viele Ecken $(\nu - 1)$-ter Art vorhanden sind, oder aber beim Vorhandensein von unendlich vielen Ecken $(\nu - 1)$-ter Art schon nachgewiesen ist, daß die Kreisbögen, denen sie angehören, Strecken sind. Damit ist dann offenbar alles bewiesen[1].

Sei nun k_1 ein Kreisbogen von endlichem Radius, der unendlich viele Ecken ν-ter Art enthält. Jede dieser Ecken ν-ter Art ist in der Zerlegung einmal durch eine Ecke $(\nu - 1)$-ter Art erzeugt worden. Sind diese unendlich vielen Ecken $(\nu - 1)$-ter Art alle voneinander verschieden (oder sind wenigstens unendlich viele verschiedene darunter), so gehören unendlich viele davon einem Kreisbogen an, von dem nach Voraussetzung schon gezeigt wurde, daß er mit einer Strecke identisch ist. Folglich muß dann auch k_1 eine Strecke sein. Sind unter den erzeugenden Ecken $(\nu - 1)$-ter Art aber nur endlich viele verschiedene, so kommt mindestens eine davon unendlich oft vor. Die zugehörigen Ecken ν-ter Art auf k_1 betrachte ich und verfahre dann ganz genau so wie beim Beweise für die Ecken erster Art, indem ich den einen Kreisbogen k_1 mit den unendlich vielen Ecken ν-ter Art, alle größtmöglichen Kreisbögen mit gleichem Radius, die Ecken erster Art enthalten, und den einen Kreisbogen mit der Ecke $(\nu - 1)$-ter Art ins Auge fasse, der durch eben diese Ecke in zwei Teilkreisbögen gespalten wird. Diese sämtlichen Bögen (außer k_1) sind wieder nur in endlicher Anzahl vorhanden, und deshalb verläuft der Beweis in leicht ersichtlicher Weise genau wie oben. Das Wesentliche dabei ist jedoch, daß es sich stets um dieselbe erzeugende Ecke $(\nu - 1)$-ter Art handelt.

Zusammenfassend folgt der

Satz 15: Die in Satz 14 genannten Kreisbögen sind Strecken.

Die ganzen seitherigen Betrachtungen gipfeln also nun in dem

Satz 16: Ist die durch die Grundkonstruktion erzeugte Menge der Ecken zwar unendlich, aber die Menge ihrer Artzahlen noch endlich, so gilt der eingangs ausgesprochene Hauptsatz 2. In diesem Fall müssen beliebig lange Strecken als Netzlinien vorkommen.

[1] Es bleibe hier ganz dahingestellt, ob tatsächlich der Fall eintreten kann, daß endlich viele Ecken $(\nu - 1)$-ter Art überhaupt unendlich viele Ecken ν-ter Art erzeugen können. Man kann übrigens unschwer nachweisen, daß dieser Fall nicht vorkommen kann.

Vierter Teil.

Ich behandele nun noch den Fall, daß der Zerlegungsbereich von dritter Gattung ist, die Grundkonstruktion also niemals aufhört, und Ecken beliebig hoher Art vorhanden sind. Zunächst mache ich von einer weitergehenden Voraussetzung über die Kurve C noch keinerlei Gebrauch.

Ich schicke folgende Überlegung vorweg. Man nehme auf C einen Teilbogen, der nur aus inneren Punkten besteht und keine Ecken enthält. Denkt man ihn sich auf den Rändern von allen Bereichen der Zerlegung markiert, so grenzen an ihn lauter ihm kongruente Teilbögen mit den gleichen Eigenschaften. Denn die angrenzenden Bögen können nicht durch Netzpunkte zerspalten werden, und Ecken können auf ihnen ebenfalls nicht liegen, da sonst der ursprüngliche Bogen Ecken enthalten haben müßte. Mit jedem der neuen Bögen kann man die gleiche Überlegung anstellen. So erhält man eine endliche oder (zunächst auch) abzählbar unendliche Menge von kongruenten Bögen auf C. Nun denke man sich den ursprünglichen Bogen so groß als möglich; dann wird er (und alle ihm nach der eben angestellten Überlegung zugeordneten Bögen) von Ecken oder von Häufungspunkten von Ecken, die selbst keine Ecken sind, begrenzt. Ich behaupte, daß dies letztere nicht eintreten kann, sondern daß die Grenzpunkte dann immer Ecken sind.

Zum Beweise ist zunächst festzustellen, daß die Anzahl der nach der anfänglichen Überlegung entstehenden Bögen offenbar nur endlich sein kann; denn zwei solcher Bögen können nur entweder punktfremd sein oder ganz zusammenfallen. Ferner ist jeder dieser Bögen in der Zerlegung frei veränderlich (im Sinne von S. 30, Beweis von Satz 4)[1]. Wäre nun ein Grenzpunkt nur Häufungspunkt von Ecken, ohne selbst Ecke zu sein, so könnte man eine beliebige der sich häufenden Ecken herausgreifen und den Bogen bis zu dieser Ecke sowie sämtliche Angrenzungen desselben betrachten. Nun wird entweder bei mindestens einer dieser Angrenzungen der erweiterte Bogen durch einen Netzpunkt zerspalten, so daß dann an der betreffenden Stelle eine Ecke erster Art vorhanden ist. Oder aber, falls dies nicht einträte, müßte jene Ecke selbst einmal zu einer Ecke erster Art werden, da sie von einer solchen erzeugt worden sein mußte (falls sie nicht selbst schon Ecke erster Art war). Nun kann man diese Betrachtung für eine Ecke wiederholen, die näher an dem Grenzpunkt des Bogens liegt als die eben nachgewiesene Ecke erster Art. Und dieses Verfahren könnte bis ins Unendliche

[1] Strenggenommen, kann es vorkommen, daß einer der Bögen durch Spiegelung an sich selbst grenzt, so daß alle Bögen dann geradlinige Strecken sein müssen (vgl. Anm. 2 S. 30). In diesem Fall würde der letzte Schluß von der Nichtfortsetzbarkeit des Kreisbogens versagen. Er brauchte nicht besonders zu interessieren, da es ja hier immer nur auf die Herstellung von geradlinigen Strecken überhaupt ankommt. Da jedoch Satz 17 allgemein ausgesprochen ist, sei hier darauf hingewiesen, daß auch in diesem Fall der Satz gilt, da man ihn auch folgendermaßen beweisen kann: Nach dem Schluß des Beweises von Satz 7, S. 38, werden die sämtlichen betrachteten Ecken erster Art von einer und derselben Ecke erster Art, von der einseitig ein nicht fortsetzbarer Kreisbogen ausgeht, erzeugt. Dies gilt insbesondere auch nach der Richtung des oben betrachteten Bogens; dies ist aber unmöglich, da der letztere (einseitige) Kreisbogen die Ecken, die in der Umgebung seines Endpunktes liegen müßten, auf den Bogen übertragen würde.

fortgesetzt werden. So entstehen unendlich viele Ecken erster Art, und da es nur endlich viele Bögen sind, muß eine unendliche Teilmenge davon sich gegen den Grenzpunkt von mindestens einem dieser Bögen häufen. Diese liegt nach Satz 7 auf einem Kreisbogen, und da derselbe über den Grenzpunkt hinaus infolge der freien Veränderlichkeit des ursprünglichen Bogens nicht fortgesetzt werden kann, so folgt nach Satz 9, daß der Grenzpunkt selbst eine Ecke erster Art, d. h. beim ursprünglichen Bogen überhaupt eine Ecke ist[1].

Man gelangt so zu dem

Satz 17: Ein offener Teilbogen von C, der von Ecken frei ist, und der nicht vergrößert werden kann, ohne diese Eigenschaft zu verlieren, wird stets von Ecken begrenzt.

Ich zeige nunmehr, daß von einem Häufungspunkt von beliebigen Ecken nach der Seite der sich häufenden Punkte aus ein Teilbogen geht, auf dem die Ecken überall dicht liegen.

Sei der Häufungspunkt zunächst ein solcher von Ecken erster Art. Dann wird nach dem Schluß des Beweises von Satz 7, S. 38, jede Ecke einer auf dem dann vorhandenen Kreisbogen liegenden Normalfolge von derselben Ecke erster Art, von der einseitig ein Kreisbogen k ausgeht, erzeugt. Die Angrenzungen beider Kreisbögen gehen mindestens bis zu einem von dem Häufungspunkt H verschiedenen Punkt J (Abb. 6). Ich behaupte, daß auf dem Bogen HJ die Ecken überall dicht liegen müssen. Denn käme auf HJ ein von Ecken freier Teilbogen vor, den ich nach H zu mir so groß als möglich gewählt denke, so daß er nach Satz 17 hier von einer Ecke P begrenzt würde, so würde ich zunächst eine solche Angrenzung von k herausgreifen, daß die Ecke erster Art Q, die sie erzeugt, von der nächsten nach P zu folgenden Ecke erster Art R auf dem Kreisbogen um weniger entfernt wäre, als die Länge des freien Teilbogens beträgt. Dann erzeugt P bei dieser Angrenzung auf k eine Ecke S. Nehme ich nun diejenige Angrenzung von k, die R erzeugt, so wird bei derselben durch S auf dem freien Teilbogen eine Ecke T erzeugt, was der Annahme des von Ecken freien Teilbogens widerspricht. Dieselbe Überlegung bleibt gültig, wenn es sich um Häufungspunkte von Ecken höherer, aber gleicher Art handelt, da das Prinzip der Eckenübertragung auch hier richtig ist, wie man sich leicht überlegt.

Abb. 6.

Hat man aber einen Häufungspunkt von Ecken beliebig hoher Art, so muß man folgendermaßen verfahren. Zunächst sei zweierlei festgestellt. Erstens ist offenbar jede Ecke höherer Art (mindestens) einer Ecke erster

[1] Siehe Anm. 1 S. 42.

Art verwandt. Sie ist nämlich von (mindestens) einer Ecke erster Art erzeugt, und deshalb gibt es offenbar eine (zweiseitige) Umgebung um sie, die einer Umgebung dieser Ecke erster Art kongruent ist. Ich wähle die Umgebung jeweils so groß als möglich. Dann wird sie ersichtlich von Ecken begrenzt. Diese so bestimmte Umgebung will ich Umgebung der Eckenverwandtschaft nennen. Sind zwei Ecken höherer Art derselben Ecke erster Art verwandt, so nenne ich sie auch untereinander verwandt. Auch zwei solche Ecken besitzen eine Umgebung der Verwandtschaft, die ebenfalls von Ecken begrenzt ist. Schließlich liegen offenbar bei zwei entsprechenden Umgebungen der Verwandtschaft an kongruenten Stellen entweder beide Male Ecken oder beide Male keine Ecken. Zweitens werde bemerkt, daß nach dem bis jetzt Bewiesenen, wenn man nur die Ecken erster Art ins Auge faßt, die Randkurve C in endliche viele Bögen zerfällt, so daß auf gewissen dieser Bögen nur endlich viele Ecken erster Art liegen (Ecken erster Art P_1), auf den anderen aber die Ecken erster Art in Umgebungen, auf denen Ecken überall dicht liegen (Ecken erster Art P_2). Dies folgt entsprechend wie früher die Aussage über die Kreisbögen (Beweis von Satz 8, S. 38), indem man die Bögen der Dichtigkeit, die unendlich viele Ecken erster Art enthalten, so groß wie möglich wählt und dann nachweist, daß sie sich nicht häufen können.

Nun fasse ich einen Häufungspunkt H von Ecken beliebig hoher Art ins Auge. Jede der sich häufenden Ecken ist einer Ecke erster Art verwandt. Ich betrachte diejenigen, die Ecken erster Art P_1 verwandt sind. Greife ich eine beliebige solche P_1 heraus, so gibt es entweder in beliebiger Nähe von H noch solche Ecken höherer Art, die ihr verwandt sind, oder es gibt eine (einseitige) Umgebung, in der keine solchen mehr liegen. Dies letztere kann, da die Ecken P_1 nur in endlicher Zahl vorkommen, nur in einer endlichen Zahl von Fällen eintreten. Ich bestimme hierzu die größtmögliche Umgebung, innerhalb welcher also keine Ecken höherer Art mehr liegen, die einer jener endlich vielen Ecken erster Art P_1 verwandt sind. In dieser Umgebung liegen dann nur noch solche Ecken höherer Art, die einer der endlich vielen anderen Ecken erster Art P_1 verwandt sind, und möglicherweise noch solche Ecken höherer Art, die gewissen der unendlich vielen Ecken erster Art P_2 verwandt sind.

Nun behaupte ich, daß in der so bestimmten (einseitigen) Umgebung von H die Ecken überall dicht liegen. In der Tat, gäbe es hier einen von Ecken freien Teilbogen, so würde ich ihn nach H zu möglichst groß wählen. Dann wäre er nach Satz 17 hier von einer Ecke begrenzt. Diese Ecke P ist nach dem Vorhergehenden entweder einer Ecke erster Art P_2 verwandt. Dies ist aber unmöglich, da die Umgebung der Verwandtschaft in diesem Fall die Ecken überall dicht enthält. Oder P ist einer Ecke erster Art P_1 verwandt. Nun liegen aber nach dem Vorangegangenen Ecken höherer Art, die derselben Ecke P_1 und damit auch der Ecke P verwandt sind, in beliebiger Nähe von H. Ich wähle eine solche Q, daß es eine weitere Ecke R gibt, so daß die Entfernung QR kleiner als der Abstand der Endpunkte des freien Bogens ist, was immer möglich ist. Nun ist Q dem P verwandt.

Ich bestimme die Umgebungen dieser Verwandtschaft. Entweder die zu Q gehörige enthält noch R; dann gäbe es auf dem freien Bogen eine R entsprechende Ecke. Oder sie enthält R nicht mehr. Dann endet sie nach R zu und vor R in einer Ecke, und dieser Ecke entspricht nun auf dem freien Bogen erst recht eine andere Ecke. Also kann es keine von Ecken freien Bögen geben.

Zusammenfassend folgt also der

Satz 18: Ist H Häufungspunkt von Ecken beliebiger Art, so liegen auf einem von H ausgehenden Teilbogen von C, der unendlich viele Ecken enthält, die Ecken überall dicht.

Durch den bekannten Schluß folgt hieraus weiter der

Satz 19: Die Randkurve C eines Zerlegungsbereichs zerfällt in endlich viele Teilbögen, so daß jeder Teilbogen entweder nur endlich viele Ecken enthält oder die Ecken auf ihm überall dicht liegen. Der Grenzpunkt zwischen zwei Teilbögen verschiedener Art ist stets eine Ecke[1].

Von hier an setze ich nun noch voraus, daß C aus endlich vielen Bögen besteht, von denen jeder einzelne eine stetige Tangente und eine stetige Krümmung besitzt. Ich betrachte nun einen der in Satz 19 genannten Teilbögen der Dichtigkeit, soweit sich längs ihm die Krümmung stetig ändert. Ich will beweisen, daß dies ein Kreisbogen sein muß. Ich teile ferner nach früher (dritter Teil) die Ecken erster Art in zwei Klassen: in endlich viele und in unendlich viele, von denen jede einem von endlich vielen Kreisbögen angehört[2]. Hieraus folgt, daß, soweit C überhaupt in einer Ecke erster Art eine bestimmte Krümmung besitzt, den sämtlichen Ecken erster Art nur endlich viele verschiedene Krümmungen zukommen. Da jede Ecke höherer Art (mindestens) einer Ecke erster Art verwandt ist, kommen demnach für sämtliche Ecken, soweit sie überhaupt bestimmte Krümmungen besitzen, nur endlich viele Krümmungen in Betracht. Dann kann ich aber auf den obengenannten Teilbogen das Lemma 4 anwenden. Aus ihm folgt, daß dieser Teilbogen ein Kreisbogen sein muß[3].

Damit erhält man den

Satz 20: Jeder Zerlegungsbereich, dessen Rand aus endlich vielen Bögen besteht, von denen jeder einzelne eine stetige Tan-

---

[1] Natürlich braucht auch nur ein einziger Teilbogen vorzukommen, der nur endlich viele Ecken enthält, und kein anderer: wenn überhaupt nur endlich viele Ecken vorhanden sind. Aber es kann auch das Umgekehrte eintreten: es können die Ecken auf ganz C überall dicht liegen, wie man an Beispielen erkennt.

[2] Hier benutze ich das Ergebnis des dritten Teils. Es ist aber selbstverständlich, daß jenes Ergebnis unter den jetzigen weitergehenden Voraussetzungen wesentlich einfacher abgeleitet werden kann.

[3] Hier ist die Stelle, wo ein besonderer Satz über Jordanbögen eingreifen muß, falls für diese nachgewiesen werden soll, daß sie Kreisbögen sind, wenn auf ihnen Ecken beliebig hoher Art überall dicht liegen. Die Schwierigkeit, die hier gegenüber den Methoden des dritten Teils eintritt, liegt darin, daß die Umgebungen der Eckenverwandtschaft bei Ecken beliebig hoher Art beliebig klein werden können, so daß eine genauere Untersuchung dieser Kongruenzumgebungen nötig wird.

gente und eine stetige Krümmung besitzt, ist einem anderen Zerlegungsbereich äquivalent, dessen Rand aus endlich vielen Strecken und endlich vielen Kreisbögen besteht. Auf den Kreisbögen liegen die Ecken überall dicht.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß hier keineswegs — wie bei den Bereichen zweiter Gattung — beliebig lange Strecken als Netzlinien vorzukommen brauchen. Ein Beispiel dafür bietet die bekannte Parkettbodenzerlegung in Rechtecke, von denen jedes zwei zueinander inkommensurable Seiten besitzt, falls jedes Rechteck durch dieselbe Mittellinie in zwei kongruente Exemplare zerlegt wird.

Ausgegeben am 5. Mai.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Schuchhardt sprach über die steinzeitliche Einwanderung der Thüringer nach dem Norden.

Sprachforschung und Anthropologie nehmen zwei Einwandererschichten an, aus denen das Germanentum in Norddeutschland und Skandinavien zusammengeschmolzen sei. Archäologisch läßt sich nach der ersten, die vom Niederrhein und aus Nordfrankreich gekommen war, um 2000 v. Chr. eine starke Einwanderung aus Thüringen (schnurkeramische Kultur) nach dem Norden erkennen. Ihre kleinen Einzelgräber mit dem Inventar eines Jäger- und Kriegervolkes schieben sich zwischen die nordischen Megalithgräber der Ackerbauer und Viehzüchter. Die beiden Bevölkerungsschichten haben sich vielfach rasch vereinigt, und aus dieser Vereinigung muß das Germanentum entstanden sein. Da die Thüringer durch eine ähnliche Eroberung Südwestdeutschlands und der Schweiz dort das Keltentum geschaffen und sich stark an der ersten großen Wanderung gegen Südosten die Donau hinunter beteiligt haben, werden sie als das indogermanische Urvolk zu betrachten sein.

2. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit von Prof. Dr. L. E. J. Brouwer in Amsterdam vor: »Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus«. (Ersch. später.)

Es werden vier auf intuitionistischem Boden erwachsene Einsichten formuliert, deren volle und nicht wie bisher nur teilweise Anerkennung durch die Formalisten den Grundlagenstreit erledigen würde.

3. Hr. Eduard Meyer überreichte die 52. wissenschaftliche Veröffentlichung der Deutschen Orient-Gesellschaft: »Felsreliefs in Assyrien: Bawian, Maltai und Gundük« von W. Bachmann (Leipzig 1927).

Die Akademie hat die korrespondierenden Mitglieder ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Hendrik Antoon Lorentz in Haarlem am 4. Februar, Hrn. Felix Marchand in Leipzig am 4. Februar und Hrn. Theodor Curtius in Heidelberg am 9. Februar durch den Tod verloren.

Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus.

Von Prof. Dr. L. E. J. Brouwer
in Amsterdam.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Literatur.

Hilbert.

Mathematische Probleme, Vortrag, gehalten auf dem Intern. Mathem.-Kongreß zu Paris 1900 (nach dem Abdruck im Archiv d. Math. u. Phys. [3] 1 [1901] hier zitiert als F 1).

Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verhandlungen des III. Intern. Mathem.-Kongr. Heidelberg 1904, Leipzig 1905 (hier zitiert als F 2).

Axiomatisches Denken, Math. Annalen 78 [1918] (hier zitiert als F 3).

Neubegründung der Mathematik, Hamburger math. Seminarabhandlungen 1 [1922] (hier zitiert als F 4).

Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Annalen 88 [1922] (hier zitiert als F 5).

Über das Unendliche, Math. Annalen 95 [1926] (hier zitiert als F 6).

Brouwer.

Over de grondslagen der wiskunde, Amsterdam-Leipzig 1907 (hier zitiert als I 1).

De onbetrouwbaarheid der logische principes, Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2 [1908] (hier zitiert als I 2).

Intuitionism and Formalism, Amer. Bull. 20 [1913] (hier zitiert als I 3).

Besprechung des Buches von Schoenflies: Die Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen, Jahresber. d. D. M. V. 23 [1914] (hier zitiert als I 4).

Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde, N. archief v. wisk. [2] 12 [1918] (hier zitiert als I 5).

Intuitionistische Mengenlehre, Jahresber. d. D. M. V. 28 [1920] (hier zitiert als I 6).

Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie, Journ. f. Math. 154 [1924] (hier zitiert als I 7).

Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, Jahresber. d. D. M. V. 33 [1925] (hier zitiert als I 8).

Über Definitionsbereiche von Funktionen, Math. Annalen 97 [1927] (hier zitiert als I 9).

§ 1.

Die Richtigkeitsdifferenzen zwischen der formalistischen Neubegründung und dem intuitionistischen Neubau der Mathematik werden beseitigt sein, und die Wahl zwischen beiden Beschäftigungen sich auf eine Geschmacksangelegenheit reduzieren, sobald die folgenden in erster Linie auf den Formalismus bezüglichen, aber in der intuitionistischen Literatur zuerst formulierten Einsichten allgemein durchgedrungen sein werden. Dieses Durchdringen ist deshalb nur eine Zeitfrage, weil es sich um reine Besinnungsergebnisse handelt, die kein diskutables Element enthalten und zu denen jedermann, der sie ein-

mal verstanden hat, sich bekennen muß. Von den vier Einsichten ist bisher für zwei dieses Verständnis und dieses Bekenntnis in der formalistischen Literatur erreicht. Das Eintreten der gleichen Sachlage für die beiden übrigen wird das Ende des Grundlagenstreites in der Mathematik bedeuten.

Erste Einsicht. Die Unterscheidung der formalistischen Bemühungen in einen Aufbau des »mathematischen Formelbestandes« (formalistischen Bildes der Mathematik) und eine intuitive (inhaltliche) Theorie der Gesetze dieses Aufbaues, sowie die Erkenntnis, daß für die letztere Theorie die intuitionistische Mathematik der Menge der natürlichen Zahlen unentbehrlich ist.

Zweite Einsicht. Die Verwerfung der gedankenlosen Anwendung des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, sowie die Erkenntnis, erstens daß die Erforschung des Berechtigungsgrundes und des Gültigkeitsbereichs des genannten Satzes einen wesentlichen Gegenstand der mathematischen Grundlagenforschung ausmacht, zweitens daß dieser Gültigkeitsbereich in der intuitiven (inhaltlichen) Mathematik nur die endlichen Systeme umfaßt.

Dritte Einsicht. Die Identifizierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit dem Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems.

Vierte Einsicht. Die Erkenntnis, daß die (inhaltliche) Rechtfertigung der formalistischen Mathematik durch den Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit einen circulus vitiosus enthält, weil diese Rechtfertigung auf der (inhaltlichen) Richtigkeit der Aussage, daß aus der Widerspruchslosigkeit eines Satzes die Richtigkeit dieses Satzes folge, d. h. auf der (inhaltlichen) Richtigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beruht.

1. Die erste Einsicht fehlt noch in F 2 (vgl. insbesondere den mit derselben in Widerspruch stehenden Absatz V auf S. 184—185). Nachdem sie durch Poincaré stark vorbereitet worden war, tritt sie zum ersten Male in der Literatur auf in I 1, wo S. 173—174 die genannten Teile der formalistischen Mathematik als mathematische Sprache und Mathematik 2. Ordnung unterschieden und der intuitive Charakter des letzteren Teiles betont wird[1]. Mit der Bezeichnung der Mathematik 2. Ordnung als Metamathematik ist sie in F 4 (vgl. insbesondere S. 165 u. 174) in der formalistischen Literatur durchgebrochen. Der Anspruch der formalistischen Schule, mit dieser dem Intuitionismus entnommenen Einsicht den Intuitionismus ad absurdum zu führen (vgl. Math. Zeitschr. 26, S. 3), ist wohl nicht ernst zu nehmen.

2. Die gedankenlose Anwendung des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten findet sich noch in F 2 und F 3 (vgl. z. B. F 3, S. 413, Z. 11—4 v. u., und insbesondere F 2, S. 182, Z. 16—19 v. o., S. 182, Z. 2 v. u. —

[1] Eine mündliche Erörterung der ersten Einsicht Hrn. Hilbert gegenüber hat im Herbst 1909 in mehreren Unterhaltungen stattgefunden.

S. 183, Z. 2 v. o., S. 184, Z. 21—13 v. u., wo jedesmal der Satz vom ausgeschlossenen Dritten als mit dem Satz vom Widerspruch im wesentlichen gleichbedeutend angesehen wird). Zum ersten Male findet sich die zweite Einsicht in der Literatur in I 2, und sodann mehr oder weniger ausführlich in jeder der Veröffentlichungen I 3—8. Abgesehen von der mit ihr aufs engste verbundenen Erkenntnis der intuitionistischen Widerspruchslosigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, bricht sie in der formalistischen Literatur durch in F 5[1], wo einerseits die beschränkte inhaltliche Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten anerkannt (vgl. insbesondere S. 155 — 156), andererseits die widerspruchslose Kombination einer logischen Formulierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit anderen Axiomen im Rahmen der formalistischen Mathematik als Aufgabe gestellt wird. Besonders eloquent wird dann auf die beschränkte inhaltliche Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hingewiesen in F 6, S. 173—174, wo aber die Erweiterung seiner Anzweiflung auf die übrigen Aristotelischen Gesetze über das Ziel hinausschießt.

3. Während der Zeit der gedankenlosen Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der formalistischen Literatur wird das Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems zunächst in F 1, S. 52 als Axiom bzw. Überzeugung, sodann in F 3, S. 412—413 in zwei verschiedenen Formen (in welchen statt von »Lösbarkeit« der Reihe nach von »prinzipieller Lösbarkeit« und von »Entscheidbarkeit durch eine endliche Anzahl von Operationen« gesprochen wird) als Gegenstand noch zu erledigender Probleme hingestellt. Aber auch nach der Erörterung der dritten Einsicht in I 2, S. 156, I 4, S. *80*, I 6, S. 203—204, und nach dem Durchbruch der zweiten Einsicht in der formalistischen Literatur wird in F 6, S. 180, wo das Problem der Widerspruchsfreiheit des Axioms von der Lösbarkeit eines beliebigen mathematischen Problems als Beispiel einer »in den mathematischen Denkbereich fallenden Frage grundsätzlicher Art, an die man sich früher nicht heranmachen konnte« hingestellt wird, diese Frage als unabhängig von der Sicherung der (die Widerspruchsfreiheit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit umfassenden) Grundlagen der mathematischen Wissenschaft noch offenstehend vorgeführt.

4. Die vierte Einsicht wird zum Ausdruck gebracht in I 9, S. 64. In der formalistischen Literatur findet sich von ihr bisher keine Spur, wohl aber manche ihr widersprechende Äußerung, z. B. in F 1, S. 55—56 und vor allem in F 6, wo S. 162—163 noch ausgerufen wird: »Nein, wenn über den Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der Berechtigung zu einer Maßnahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Maßnahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet wird.«

Nach dem Vorstehenden hat der Formalismus vom Intuitionismus nur Wohltaten empfangen und weitere Wohltaten zu erwarten. Dementsprechend

[1] Nachdem schon in F 4, S. 160 Aufmerksamkeit auf den Satz vom ausgeschlossenen Dritten bekundet wird.

sollte die formalistische Schule dem Intuitionismus einige Anerkennung zollen, statt gegen denselben in höhnischem Ton zu polemisieren und dabei nicht einmal die richtige Erwähnung der Autorschaft einzuhalten. Überdies sollte die formalistische Schule bedenken, daß im Rahmen des Formalismus von der eigentlichen Mathematik bisher noch immer nichts gesichert ist (weil ja der metamathematische Widerspruchsfreiheitsbeweis des Axiomensystems nach wie vor aussteht), wogegen der Intuitionismus auf der Grundlage seiner konstruktiven Mengendefinition und seiner Haupteigenschaft der finiten Mengen[1] schon einige Lehrgebäude der eigentlichen Mathematik in unerschütterlicher Sicherheit neu errichtet hat. Wenn also die formalistische Schule nach ihrer Äußerung in F 6, S. 180 beim Intuitionismus Bescheidenheit bemerkt hat, so sollte sie darin Anlaß finden, in bezug auf diese Tugend dem Intuitionismus nicht nachzustehen.

§ 2.

In I 7, S. 3 wurde bemerkt, daß bei den Bestrebungen zur Durchführung des Widerspruchsfreiheitsbeweises der formalistischen Metamathematik die intuitionistische Widerspruchslosigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten als ermutigender Umstand gelten kann.

Wenn die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für endlichviele mathematische Eigenschaften bzw. für eine beliebige Spezies von mathematischen Eigenschaften[2] als mehrfacher Satz vom ausgeschlossenen Dritten erster bzw. zweiter Art bezeichnet wird, dann ist einerseits klar, daß die Widerspruchslosigkeit des einfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten keineswegs unmittelbar diejenige des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten nach sich zieht, andererseits, daß die im vorigen Absatze in Erinnerung gebrachte Bemerkung erst dann ihre volle Tragweite erlangt, wenn nicht nur für den einfachen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, sondern auch für den mehrfachen Satz vom ausgeschlossenen Dritten erster Art, die Widerspruchslosigkeit feststeht. In der Tat wird im folgenden der Beweis der letzteren Widerspruchslosigkeit erbracht. Des weiteren wird sich ergeben, daß der (für die formalistischen Hoffnungen belanglose) mehrfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten zweiter Art keine Widerspruchslosigkeit besitzt.

Die Widerspruchsfreiheit des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten erster Art beweisen wir mittels vollständiger Induktion. Es sei n eine natürliche Zahl, es sei die Widerspruchsfreiheit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für n beliebige mathematische Eigenschaften bewiesen, es seien $n+1$ mathematische Eigenschaften $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$, vorgegeben, und es sei einen Augenblick angenommen, daß die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ zu einem Widerspruch führte. Das würde heißen, daß jede der 2^{n+1} Kombinationen von $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$, je mit dem Richtigkeits- oder mit dem Absurditätsprädikat versehen, zu einem Widerspruch führte.

---

[1] Vgl. I 9, S. 66 (Theorem 2).

[2] D. h. die Existenzaussage eines Simultangesetzes, das für sie alle die Richtigkeit oder Absurdität entscheidet.

Wir behaupten, daß unter dieser Annahme der einfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten für a_{n+1} notwendig absurd sein muß. Denn wäre a_{n+1} richtig bzw. absurd, so wäre auf Grund der Widerspruchsfreiheit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für n beliebige mathematische Eigenschaften die Kombination der Richtigkeit bzw. Absurdität von a_{n+1} mit der kombinierten Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $a_1, a_2, \cdots, a_n$ widerspruchsfrei, entgegen der Annahme des vorigen Absatzes. Die Annahme des vorigen Absatzes hat sich also als unstatthaft erwiesen, und die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für $n+1$ beliebige mathematische Eigenschaften hat sich als widerspruchsfrei herausgestellt.

Gegenbeispiele der Widerspruchsfreiheit des mehrfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten zweiter Art liefert der aus der Haupteigenschaft der finiten Mengen folgende Satz, daß bei Zerlegung des Einheitskontinuums in zwei Teilspezies eine dieser Teilspezies mit dem Einheitskontinuum identisch und die andere leer ist. Aus diesem Satze folgt nämlich, daß die kombinierte Aussage des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für eine beliebige Eigenschaft in bezug auf alle Punktkerne des Einheitskontinuums dann und nur dann widerspruchsfrei ist, wenn die Eigenschaft entweder für alle Punktkerne des Einheitskontinuums richtig oder für alle Punktkerne des Einheitskontinuums absurd ist. Insbesondere sind die beiden folgenden Aussagen kontradiktorisch:

1. Alle Punktkerne des Einheitskontinuums sind entweder rational oder negativ-irrational.

2. Für alle Punktkerne des Einheitskontinuums ist die Rationalitätsfrage entweder entscheidbar oder unentscheidbar.

Formulieren wir in Analogie mit dem Obigen folgende drei Fassungen des Prinzips der Reziprozität der Komplementärspezies:

1. Jedes Element der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R (einfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies).

2. Jede endliche Spezies von Elementen der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R (mehrfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies erster Art).

3. Jede Spezies von Elementen der Komplementärspezies der Komplementärspezies von R gehört zu R (mehrfaches Prinzip der Reziprozität der Komplementärspezies zweiter Art).

Alsdann besteht auch hier die Widerspruchsfreiheit nur für 1. und 2. und nicht für 3. Ein Gegenbeispiel liefert die Spezies G derjenigen Punktkerne des Einheitskontinuums C, für welche die Rationalitätsfrage entscheidbar ist. Denn die Komplementärspezies der Komplementärspezies in C von G ist mit C identisch (weil nämlich die Komplementärspezies in C von G leer ist), während wir oben gesehen haben, daß G unmöglich mit C identisch sein kann.

Bewegungsumfang im Schultergelenk.

Von R. Fick.

(Vorgetragen am 31. März 1927 [s. Jahrg. 1927 S. 105].)

Hierzu Taf. I—III.

Die vorliegende Arbeit bildet die Grundlage zu einer größeren Untersuchung über die Wirkung der Schultermuskeln, die ich noch in Innsbruck mit Unterstützung meines damaligen Assistenten Dr. Otto P. Maier ausführte, dem ich auch an dieser Stelle nochmals für seine unermüdliche Hilfe danken möchte.

Der Zweck war vor allem die Ergänzung der von meinem japanischen Schüler K. Shino[1] (jetzt Prof. der Anat. in Mukden) in meiner Anstalt durchgeführten ähnlichen Arbeit. In Shinos Untersuchung wurde die äußerste Bewegungsbahn des Armes im Schultergelenk und die dabei mögliche Muskelarbeit festgestellt. Bei der äußersten Armerhebung finden nun aber, wie bei allen Grenzbewegungen in Kugelgelenken, immer gewisse Drehungen des Armes um seine Längsachse, die von mir so genannten »Grenzkreiselungen«, statt. Für die praktische Medizin scheint es mir aber erwünscht, namentlich auch den Umfang der »reinen« Bewegungen, ehe die zwangsmäßige Grenzkreiselung beim letzten Teil der Bewegung eintritt, und die bei diesen »reinen« Bewegungen stattfindende Muskelarbeit kennenzulernen.

Aus diesem Grunde vor allem unternahm ich nochmals die mühsame Untersuchung, die aber auch an und für sich nicht überflüssig sein dürfte, da ja bisher außer der von Shino eigentlich nur eine einzige genaue Untersuchung der Schulterbewegungen, nämlich die von Braune und Fischer[2], vorliegt. Aber auch diese berücksichtigt nur die gezwungene äußerste Grenzbewegung und enthält überdies keine Angaben über die selbständigen Kreiselungsmöglichkeiten, die wir auch berücksichtigten.

Der allgemeine Gang der Untersuchung war der gleiche, wie er sich bei unserer früheren mit Shino ausgeführten bewährt hatte. Wir befestigten eine von den Eingeweiden befreite, aber noch von Muskeln und Haut bedeckte obere Körperhälfte in dem von mir früher beschriebenen Halbkreisrahmengestell[3] so, daß der Schultergelenkmittelpunkt im Mittelpunkt des drehbaren Halbkreisrahmens stand. Das Schulterblatt wurde auch wieder durch ein ausgehöhltes dreieckiges Brettchen (s. Bild 1 a. f. S.) an der Stützsäule der ganzen Vorrichtung durch ein queres Brett unbeweglich befestigt; ebenso das an ein Brettchen angenagelte Schlüsselbein, so daß nur das Schultergelenk be-

[1] K. Shino, Über die Bewegungen im Schultergelenk und die Arbeitsleistung der Schultermuskeln. In: His' Archiv 1913.

[2] W. Braune und O. Fischer, Abhdlgn. d. k. sächs. Ges. der Wiss. 1888.

[3] R. Fick, Handbuch der Gelenk-Muskellehre Bd. II S. 276.

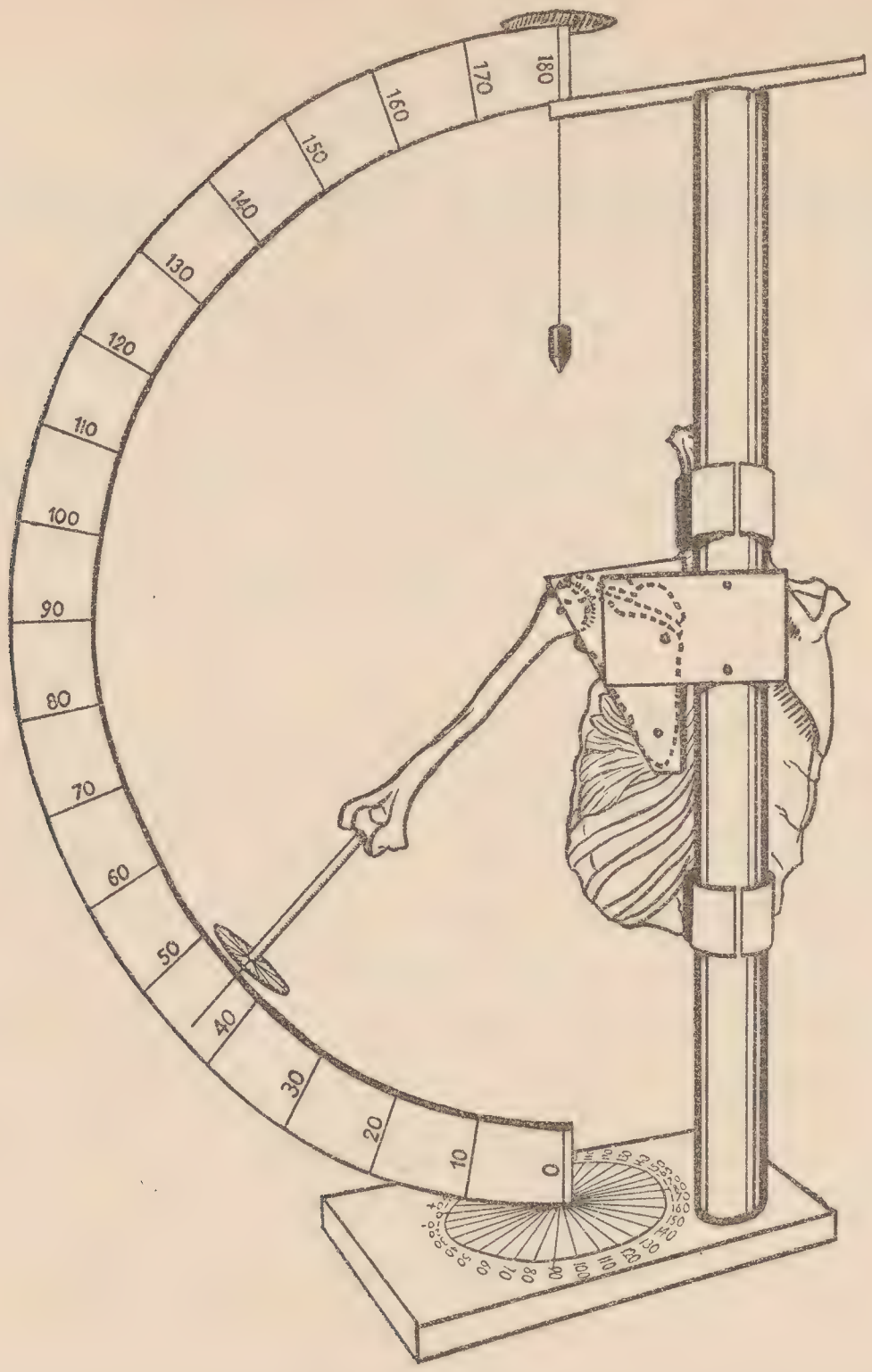


Bild 1. Präparat im Meßrahmengestell; linke Körperseite.

wegt werden konnte. Auch die Wirbelsäule wurde durch eine ihrer Krümmung entsprechend ausgeschweifte hohle Leiste (mit 4 Schrauben, an 2 Hals- und 2 unteren Brustwirbeln) fest mit der Stammsäule des Gestelles verbunden.

Die Schulterblattstellung entsprach der gewöhnlichen Stellung bei aufrechter Haltung der Wirbelsäule und mäßig »zurückgenommener« Schulter. Die Schulterblattebene steht dabei bekanntlich nicht der Stirnebene (»Frontalebene«) des Körpers gleich, sondern das Schulterblatt steht mit seinem seitlichen Rand etwas schräg nach vorn. Die Schulterblattebene macht mit der Stirnebene einen seitlich offenen Winkel von etwa 30° (s. Bild 2).

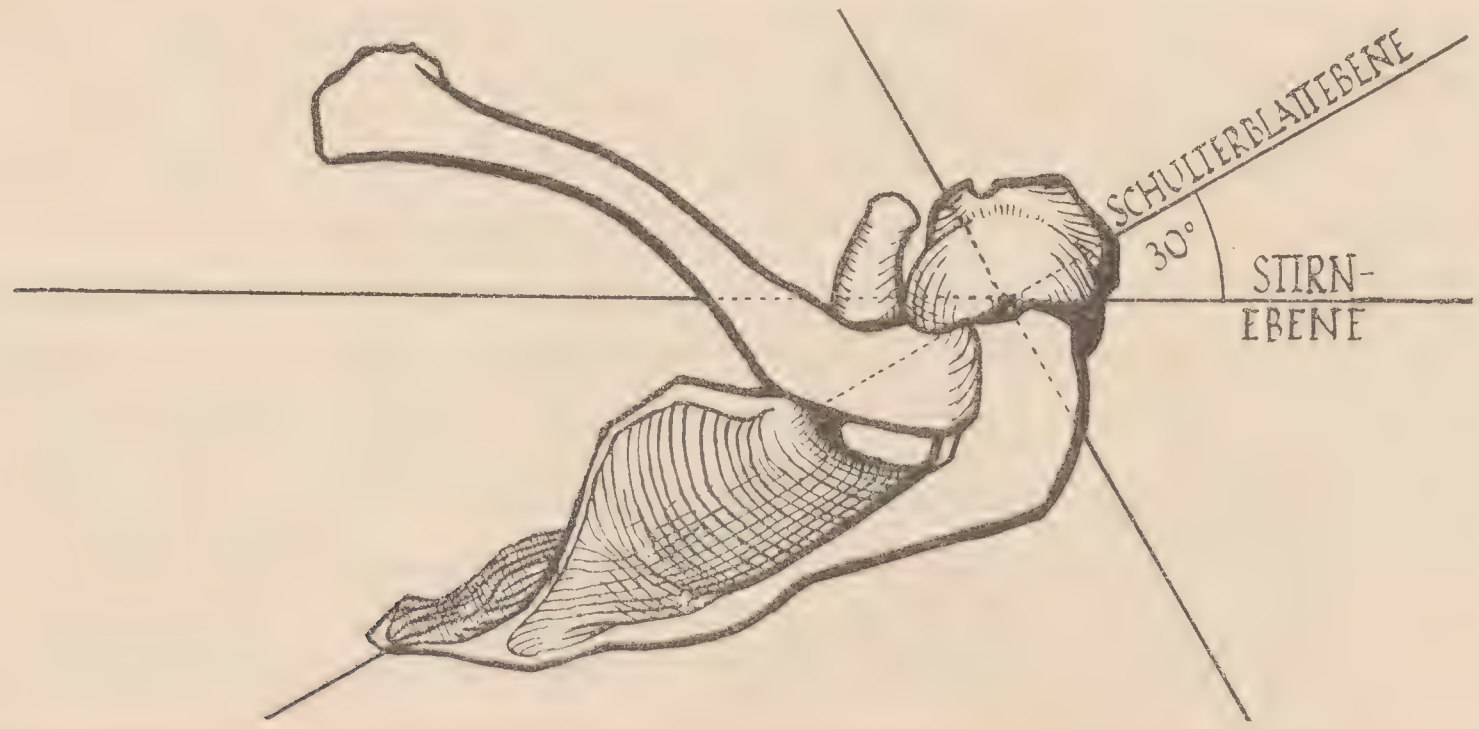


Bild 2. Projektion der Stellung des Schulterblattes in der »Bewegungskugel« auf eine wagrechte Ebene; rechte Körperseite.

Meßart.

Wir untersuchten wieder zuerst die Armhebungen, indem wir den Oberarm bzw. den seiner Seelenaxe entsprechend in ihn eingesteckten Holzstab jeweils an dem Halbkreisrahmen entlang (s. Bild 1) möglichst hoch hinaufführten. Der Halbkreisrahmen ist oben und unten um einen Zapfen drehbar; die Zapfen entsprechen den Enden des Durchmessers des Halbkreises. Bei der

Bild 3. Projektion der Längskreise (»Meridiane«) der Bewegungskugel auf eine wagrechte Ebene; rechte Körperseite.

Umdrehung um diese Achse beschreibt der halbkreisförmige Holzrahmen natürlich eine Kugel im Raum. Der Rahmenrand stellt gewissermaßen einen körperlichen »größten Kugelkreis« (»Meridian«) dieser Kugel dar. Unten und oben sind an den Drehzapfen (s. oben) Blechscheiben mit Gradeinteilung (s. Bild 1) angebracht, so daß man den Betrag der Drehung des Rahmens bequem ablesen kann. Die Gradeinteilung an den Scheiben machten wir wieder so, daß die Nullinie mit der Schulterblattebene, welch letztere ja im Gestell festgelegt war, zusammenfiel. Die Stirnebene (Frontalebene) durch das Schultergelenk lag also um 30° hinter der Nullebene (s. Bild 3).

Der Halbkreis- (Meridian-) Rahmen wurde zunächst in die Nullstellung gebracht, so daß er also der Schulterblattebene entsprach. Dann wurde an ihm entlang der Oberarmstock (s. oben) möglichst hoch hinaufgehoben. Es mußte nun auch festgestellt werden, welche Stellung dabei die Ellbogenachse (oder die den medialen und lateralen Ellbogenknorren verbindende Querlinie) gegenüber ihrer Stellung in der Ausgangslage einnimmt. D. h. es sollte nun festgestellt werden, ob und wieviel Grade der Oberarm bei der Hebung einwärts oder auswärts gekreiselt (also »proniert« oder »supiniert«) ist. Das wird dadurch ermöglicht, daß am Ende des Oberarmstockes (Armlängsachse) eine Kreisscheibe mit Gradeinteilung senkrecht zur Längsachse des Armes angebracht war (s. Bild 1). Diese Scheibe wurde in der Ausgangsstellung bei herabhängendem Arm so festgestellt, daß ihre Nullinie mit der Schulterblattebene, d. h. also dem »Nullkreis« (»Nullmeridian«) des Schultergelenkes übereinstimmte. (Die Grenzlagen zeigten, wie bemerkt, immer eine gewisse »Kreiselung« gegenüber der Stellung in der Ausgangslage.)

Nach Untersuchung der möglichst weit getriebenen Grenzhebung wurde der Arm ein zweites Mal dem Halbkreisrahmen entlang gehoben, aber nur so weit, als er sich ohne Kreiselung heben ließ. In dieser Weise wurde der Hebungsspielraum des Gelenkes von 10° zu 10° genau untersucht.

I. Armhebung.

1. Größte Armhebung am Haut-Muskelpräparat (mit Zwangskreiselung).

Der in der Überschrift bezeichnete Bewegungsumfang ist auf der Zahlentafel 1, auf den Kugelbildern 4—6 (Anhängetafel I) sowie endlich an der ausgezogenen Linie (obere Bogenlinie) der Linientafel 1 (S. 58) zu verfolgen.

Wir sehen daraus wieder bestätigt, daß die auch heutzutage noch oft in Anatomie- und Chirurgie-Lehrbüchern zu findende Angabe, daß der Arm im Schultergelenk allein nicht über die Wagrechte gehoben werden könne, vollkommen falsch ist. Auch mit Shino hatten wir am rechten Schultergelenk fast 100° Erhebung gefunden. Und zwar fanden wir diese höchste Erhebung damals auf dem Kugelkreis M −20, also 10° vor der Stirnebene durch das Schultergelenk.

Mit O. P. Maier fanden wir, wie die Zahlentafel und die Kugelbilder zeigen, eine Erhebung bis zu 103° und sogar an zwei Stellen, nämlich auf dem Längskreis M +10, d. h. also dicht vor der Schulterblattebene, und auf dem Längskreis M +40, also nicht weit von der Scheitelebene (M +60 = Scheitelebene [Sagittalebene (s. Bild 3)]), also beinahe bei »gerader Vorhebung«. Unser neues Präparat verhält sich betreffs der Stelle der höchsten Erhebungsmöglichkeit ähnlich dem von Braune u. Fischer untersuchten rechten Gelenk, bei dem die Höchsthebung bei M +20 lag, während sie bei ihrem linken Gelenk und bei einem von H. Strasser untersuchten Gelenk ähnlich wie beim Präparat Shiinos, nämlich bei M −10, lag.

Bei Shiinos Präparat konnte der Arm vom Längskreis M −40 bis M +26 über die Wagrechte erhoben werden, bei unserem jetzigen Präparat vom Längskreis M −50 bis M +70°. Der Spielraum über der Wagrechten er-

Zahlentafel I.

Armhebungsgrenze mit und ohne Kreiselung am Haut-Muskelpräparat.

Auf Längskreis	Hebung mit Kreiselung bis zum Breitekreis	Hebung ohne Kreiselung bis zum Breitekreis	Absolute [1] Pfeilneigung	Wirkliche [1] Supination
M −130	P 31	P 29	D +115	−15
M −120	P 37	P 30	D +105	−15
M −110	P 44	P 39	D +95	−15
M −100	P 49	P 42	D +85	−15
M −90	P 55	P 50	D +75	−15
M −80	P 60	P 58	D +55	−25
M −70	P 69	P 61	D +10	−60
M −60	P 80	P 73	D 0	−60
M −50	P 89	P 80	D +20	−30
M −40	P 92	P 87	D +30	−10
M −30	P 96	P 91	D +5	−25
M −20	P 98	P 94	D −45	−65
M −10	P 100	P 90	D −35	−45
M ±0	P 101	P 92	D −50	−50
M +10	P 103	F 97	D −60	−50
M +20	P 101	P 95	D −65	−45
M +30	P 101	P 94	D −65	−35
M +40	P 103	P 94	D −65	−25
M +50	P 100	P 94	D −60	−10
M +60	P 94	P 92	D −65	−5
M +70	P 91	P 80	D −45	+25
M +80	P 80	P 72	D −55	+25
M +90	P 73	P 59	D −55	+35
M +100	P 65	P 51	D −50	+50

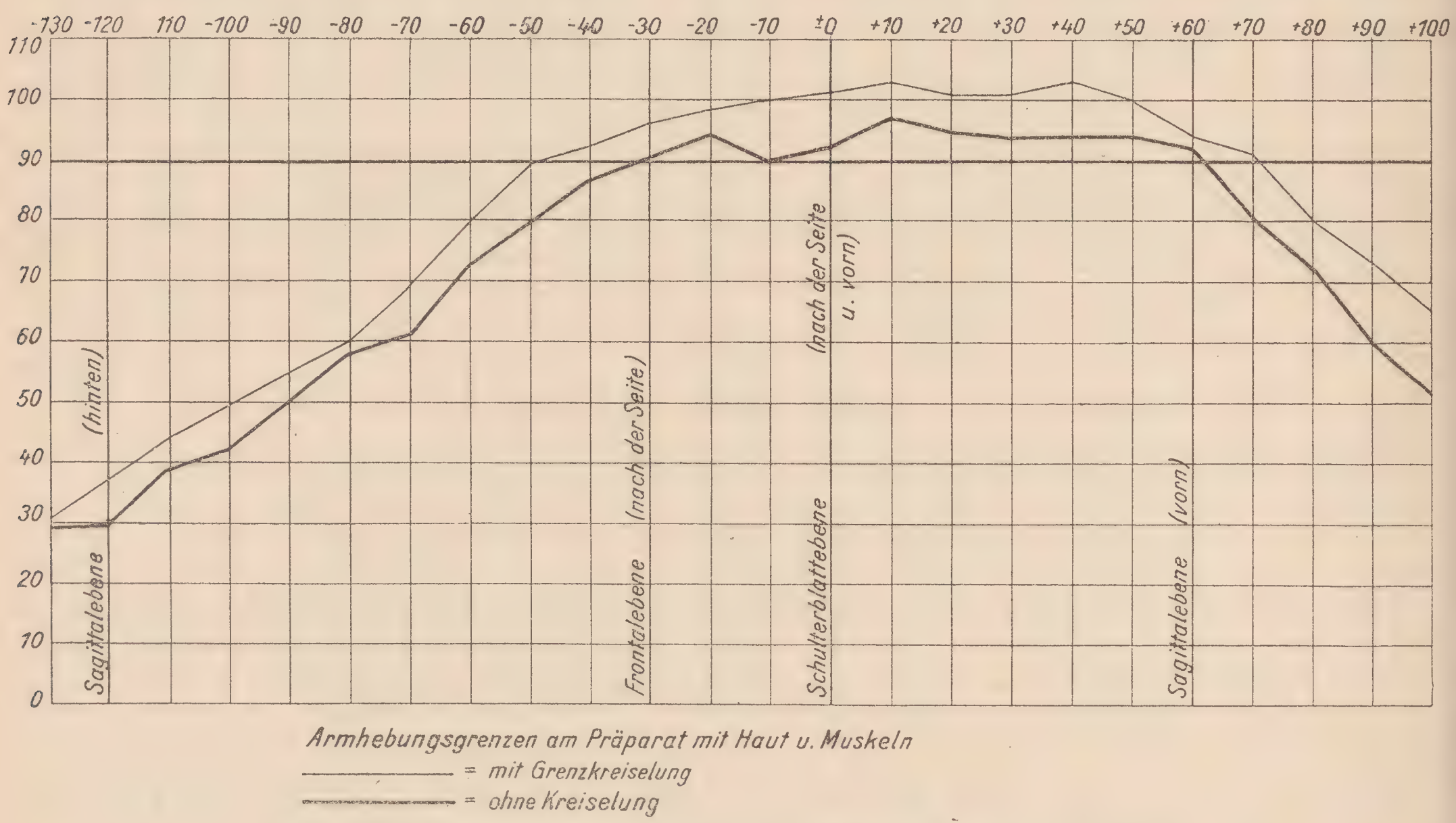
reicht demnach eine recht große Breite: von Ebenen noch 20° hinter der »reinen Seithebung« (M −30 = Ebene der »reinen Seithebung«, d. h. der Stirnebene [Frontalebene] durch das Schultergelenk), bis noch 10° medialwärts von der »geraden Vorhebung«. (M +60 = Ebene der »geraden Vorhebung«, d. h. in der Scheitelebene [Sagittalebene] durch das Schultergelenk) (am anschaulichsten ist es zu sehen an der schwach ausgezogenen Linie des Kugelbildes 5). Vom Längskreis M −50 an nimmt die Erhebungsmöglichkeit auf der Hinterseite der Bewegungskugel ziemlich rasch ab, so daß die schwachausgezogene Linie auf dem Kugelbild 6 und auf der Tafel I (S. 58) ziemlich steil abwärts verläuft. Den tiefsten Stand erreicht sie auf dem Längskreis M −130, wo der Arm nur noch um 31° erhoben werden kann. Ähnlich rasch nimmt die Erhebungsmöglichkeit auf der Vorderseite des kugelförmigen Bewegungsgebietes von der Stelle aus, wo der Arm gerade noch zur Wagrechten erhoben werden kann (Längskreis M +70) nach medialwärts ab (Kugelbild 4, Tafel I [S. 58]). Schon auf dem nur um 30° weiter medialwärts gerichteten

[1] Erklärung siehe S. 64.

Längskreis (M +100) ist nur noch 65° Erhebungsmöglichkeit. Noch weiter medialwärts stößt der Arm bei der Erhebung an den Brustkorb an. Weiter nach hinten ist dann auch die Tragsäule der Meßvorrichtung im Wege.

Wie beim früheren Präparat lag auch hier wieder der untere Kugelpol beträchtlich innerhalb des Bewegungsgebietes, nicht nahe an der Grenze, so daß der Arm von der gerade herabhängenden Stellung aus, wo er auf den unteren Pol der Kugel zielt, etwa nur noch lateralwärts hätte bewegt werden können, wie das annähernd beim Präparat W. Braune-O. Fischers der Fall war.

Hervorzuheben ist übrigens noch, daß die Grenzbewegungslinie auf der »Bewegungs«- oder »Bahnkugel« bei allen bisher untersuchten Präparaten



Linientafel I. Höchste Armhebung am Haut-Muskelpräparat.
Mit Kreiselung = schwach ausgezogene obere Linie. Ohne Kreiselung = stark ausgezogene untere Linie.
(Die Ziffern links [Ordinaten] = Breitekreise, die Ziffern oben [Abszissen] = Längenkreise.)

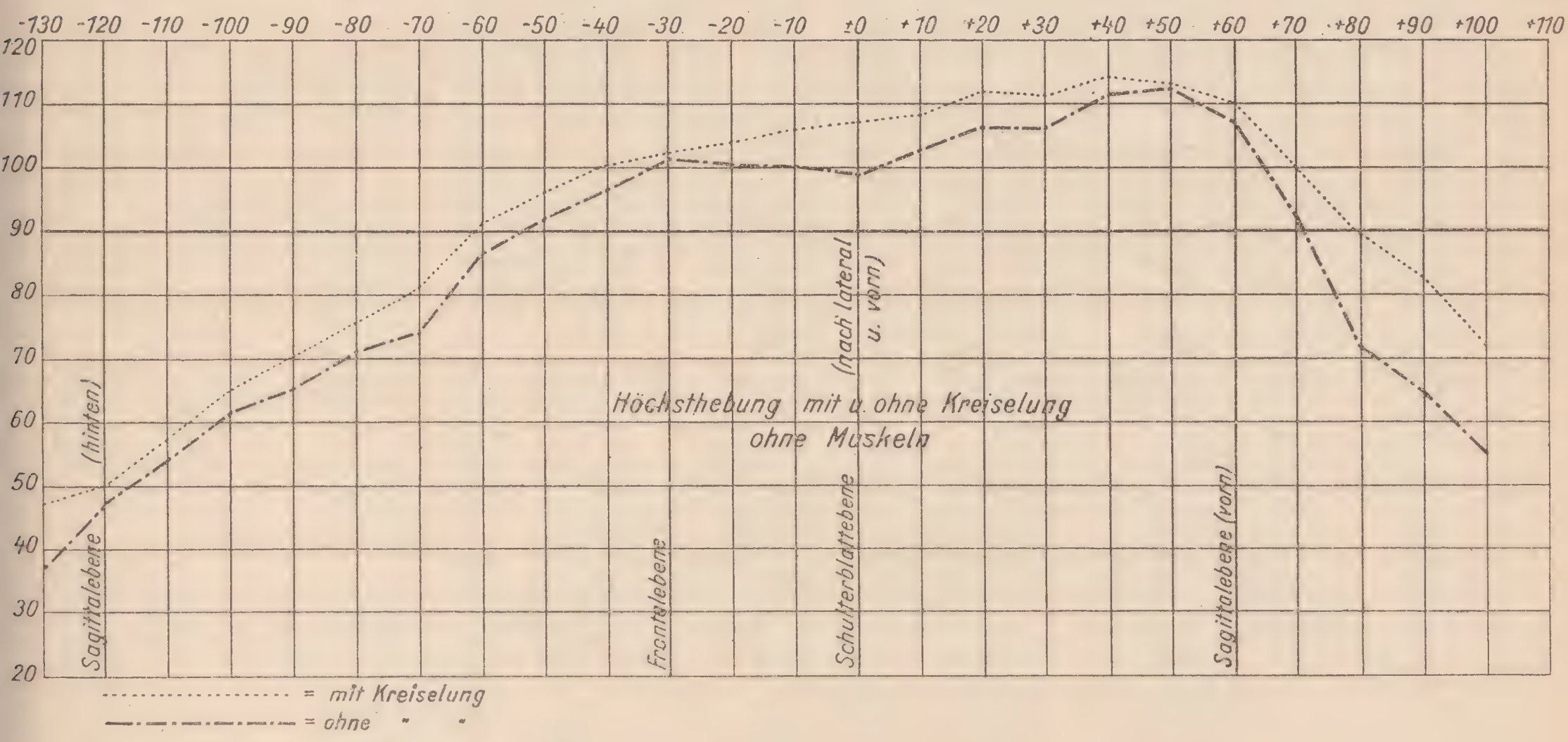
(Braune-Fischer, Strasser, Shiino) sehr ähnlich verläuft. Namentlich zeigt sich bei allen Präparaten, daß die Erhebungsfähigkeit auf der lateralen Seite der hinteren Halbkugel langsamer abnimmt als auf der medialen Seite (vgl. Kugelbild 4 gegen 6; Linientafel I linke Bildseite gegen rechte Seite), wo die Grenzlinie besonders rasch abfällt. Bei unserem Präparat beginnt der steile Abfall schon am Längskreis M +60 (Kugelbild 4 u. Tafel I), also »gerade vorn« (ventral) in der Scheitelebene (Sagittalebene) durch das Gelenk. Bei Shiinos Präparat begann der Steilabfall erst auf dem Längskreis M +90, also in der auf der Schulterblattebene senkrechten Ebene.

Die Mitte des ganzen Bewegungsfeldes liegt ungefähr auf dem Nulllängskreis (M ±0), in Höhe des Breitekreises P 45. In der »Mittelstellung« steht der Arm also nach vorn lateral. Um diese Stellung kann er

auf einem Kegelmantel herumbewegt werden, dessen Basis durch die Grenzlinie auf der Bahnkugel gebildet wird und dessen Spitze natürlich im Mittelpunkt des Schultergelenkes liegt. (Das Kugelbild 7 ist so aufgenommen, daß man etwa gerade auf die Mitte des Bewegungsfeldes schaut.)

2. Größte Armerhebung am Bänderpräparat.

Der Bewegungsspielraum nach Durchschneidung der Muskeln erfuhr an den meisten Stellen des Bewegungsgebietes, wie der Vergleich der Tafel II auf S. 60 mit der I. von S. 57 und der Vergleich der Kugelbilder 4—6 [punktierte gegen schwach ausgezogene bzw. gestrichelte gegen stark ausgezogene Linie] und der Linientafeln I und II ergibt, eine ziemlich gleichmäßige,



Linientafel II. Höchste Armhebung am Bänderpräparat.
Mit Kreiselung = punktierte äußere Linie. Ohne Kreiselung = strichpunktierte untere Linie.
(Die Ziffern links [Ordinaten] = Breitekreise, die Ziffern oben [Abszissen] = Längenkreise.)

etwa 6° betragende Erweiterung. Auf den vordersten Teilen der Kugel, vom Längskreis M +10 bis M +65, ist die Erweiterung aber bedeutender. Da beträgt sie etwa 10—12°. Shiino hat seinerzeit sich der sehr großen Mühe unterzogen und das Bewegungsfeld nach Durchschneidung jedes einzelnen Muskels aufs neue untersucht. Er bestätigte dabei zahlenmäßig, was schon die Anschauung ergibt, daß bei der Hemmung der Armhebung nach vorn lateral natürlich die beiden »runden Muskeln« (m. teretes) mit dem »breitesten Rückenmuskel« und dem »Grätenteil des Dreieckmuskels« (pars spinalis m. deltoidei) hauptsächlich schuld sind.

Nach Abtragung der Muskeln wird, wie ich bereits in meinem Handbuch auseinandersetzte, die Bewegung nach vorn durch die hinteren Kapselteile und die hinteren Teile des Haken-Armbandes (lgt. coracohumerale) gehemmt. Bei Hebung nach hinten spannen sich die oberen und vorderen Kapselteile und die vorderen Teile des Haken-Armbandes. Bei Seithebung stößt schließlich der große Armhöcker an den oberen Pfannenrand, und zu-

Zahlentafel II.

Armhebung mit und ohne Kreiselung am Bänderpräparat.

Längskreis	Hebung mit Kreiselung bis zum Breitekreis	Hebung ohne Kreiselung bis zum Breitekreis	Absolute Pfeilneigung	Wirkliche Supination
M −130	P 47	P 37	D +120	−10
M −120	P 50	P 47	D +115	−5
M −110	P 57	P 54	D +110	±0
M −100	P 65	P 61	D +95	−5
M −90	P 70	P 65	D +80	−10
M −80	P 75	P 71	D +65	−15
M −70	P 81	P 74	D ±0	−70
M −60	P 91	P 86	D +10	−50
M −50	P 96	P 92	D +40	−10
M −40	P 100	P 95	D +34	−6
M −30	P 102	P 101	D +15	−15
M −20	P 104	P 100	D −50	−70
M −10	P 106	P 100	D −50	−60
M ±0	P 107	P 99	D −51	−51
M +10	P 108	P 103	D −70	−60
M +20	P 112	P 106	D −65	−45
M +30	P 111	P 106	D −63	−33
M +40	P 114	P 111	D −55	−15
M +50	P 113	P 112	D −56	−6
M +60	P 110	P 107	D −63	−3
M +70	P 100	P 92	D −40	+30
M +80	P 90	P 72	D −45	+35
M +90	P 83	P 65	D −55	+35
M +100	P 72	P 55	D −55	+45

gleich spannen sich meist auch die unteren Kapselteile. Die Bewegung nach innen hemmt die Brustwand, wenn diese beseitigt ist, die oberen Kapselteile und das Haken-Armband.

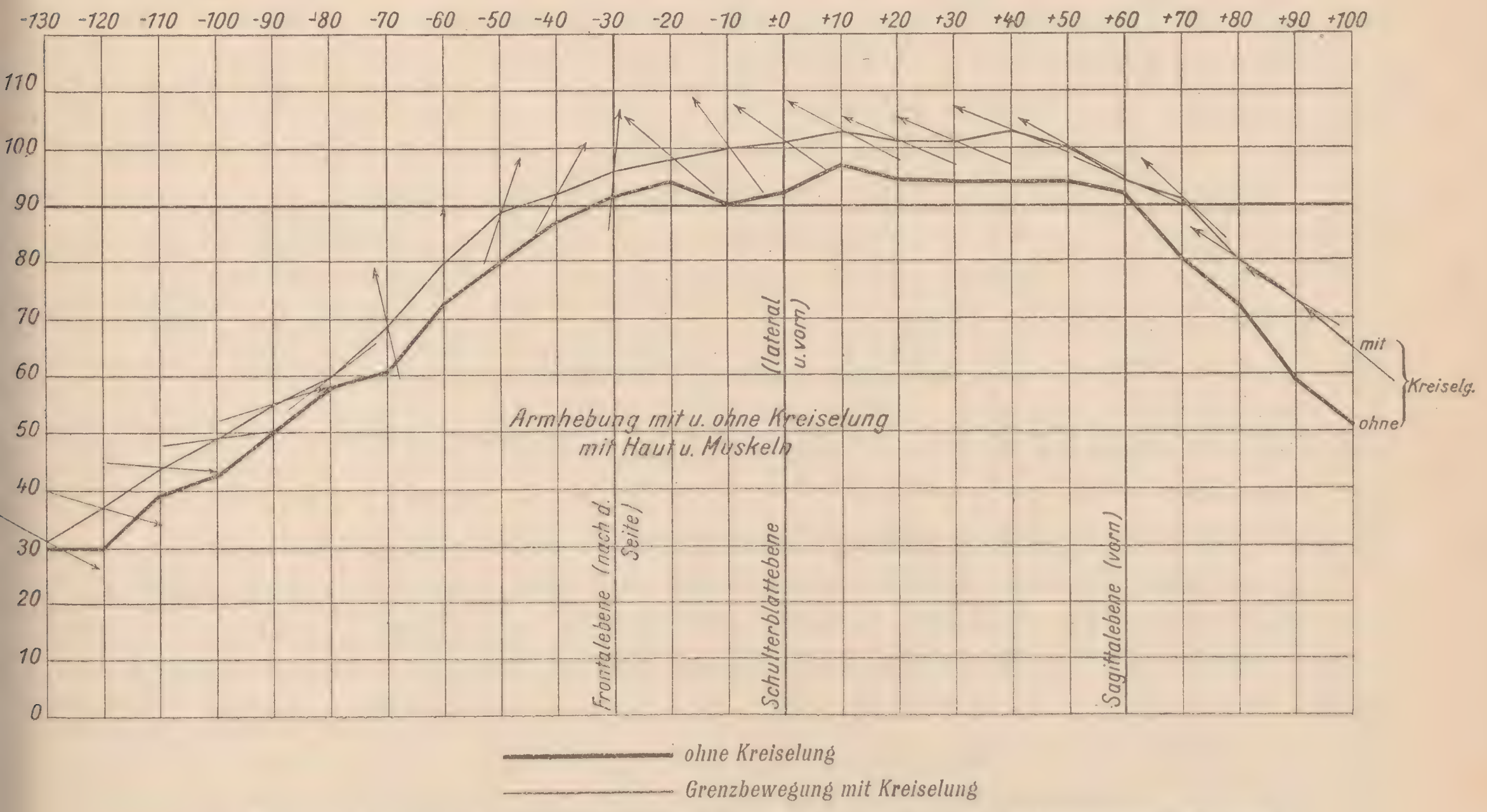
3. Zwangskreiselung bei den größten Armhebungen.

Wie sich schon an Shimos Präparat herausgestellt hat und bereits eingangs erwähnt wurde, zeigt sich, daß bei den äußersten Armhebungen die »quere Knorrenlinie« des Ellbogens (oder die quere Ellbogengelenkachse) keineswegs immer die gleiche Lage zu den Hauptebenen des Körpers oder zur Schulterblattebene hat oder daß sie sich bei der höchsten Erhebung etwa jeweils in die betreffende Beugungsebene einstellt, sondern daß sie ganz wechselnd steht. Es wäre ja auch sehr merkwürdig und ist von vornherein sehr unwahrscheinlich, daß der Arm uns bei seinen Grenzhebungen den Gefallen tun sollte, seiner Ellbogenachse eine gleiche, bestimmte Einstellung zu unseren rechnerisch oder für die Beschreibung bequemen Ebenen zu geben. Es ist vielmehr von vorherein klar, daß durch die verschiedenen Spannungsverhältnisse der Muskeln, Bänder und der verschiedenen Teile der Schulter-

kapsel die Erhebungen nach den verschiedenen Richtungen hin, nach vorn oder nach der Seite oder nach hinten, die einen in mehr pronierter, die andern in mehr supinierter Stellung, am weitesten getrieben werden können, weil sich bei der Erhebung auf dem einen Längskreis des Bewegungsgebietes früher durch die betreffenden Spannungen Hemmungen einstellen werden, wenn der Arm supinatorisch eingestellt ist, bei Erhebung auf einen anderen Längskreis aber vielleicht umgekehrt bei pronatorischer Einstellung. Im ersteren Fall, wo sich bei der Erhebung, wenn der Arm in supinatorischer Stellung steht, früher Spannungen in den Weichteilen einstellen, wird die Erhebung also weiter getrieben werden können, wenn wir den Arm mit der Erhebung zugleich pronieren. In diesem Fall finden wir also eine »pronatorische Grenzkreiselung«, im umgekehrten Fall eine supinatorische.

Auf den Kugelbildern ist die bei äußerster Erhebung gefundene Stellung der Ellbogenachse jeweils durch einen Pfeil angedeutet, dessen Spitze dem lateralen, dessen »hinteres« freies Ende dem medialen Knorren entspricht.

Man erkennt aus den Kugelbildern 4 und 5 sowie aus der Linientafel III, daß bei den Grenzbewegungen auf der vorderen Halbkugel der laterale Knorren fast immer oben oder lateral vom medialen Knorren bleibt. Bei der Höchst-



Die Pfeile geben die Stellung der queren Knorrenlinie zum betreffenden Längskreis bei äußerster Erhebung an (Spitze = lateraler Knorren).

Linientafel III. Höchste Armhebung am Haut-Muskelpräparat.
(Die Ziffern links [Ordinaten] = Breitekreise, die Ziffern oben [Abszissen] = Längenkreise.)

erhebung auf dem Nullkreis (s. Bild 5) weicht auf beiden Grenzhebungslinien sowohl der am Bänderpräparat (punktierte) als auch der am Muskelpräparat (schwach ausgezogenen) Linie die Pfeilspitze sehr stark, um nicht weniger als 50°, nach hinten vom Längskreis ab (s. auch Linientafel III). In der Grenz-

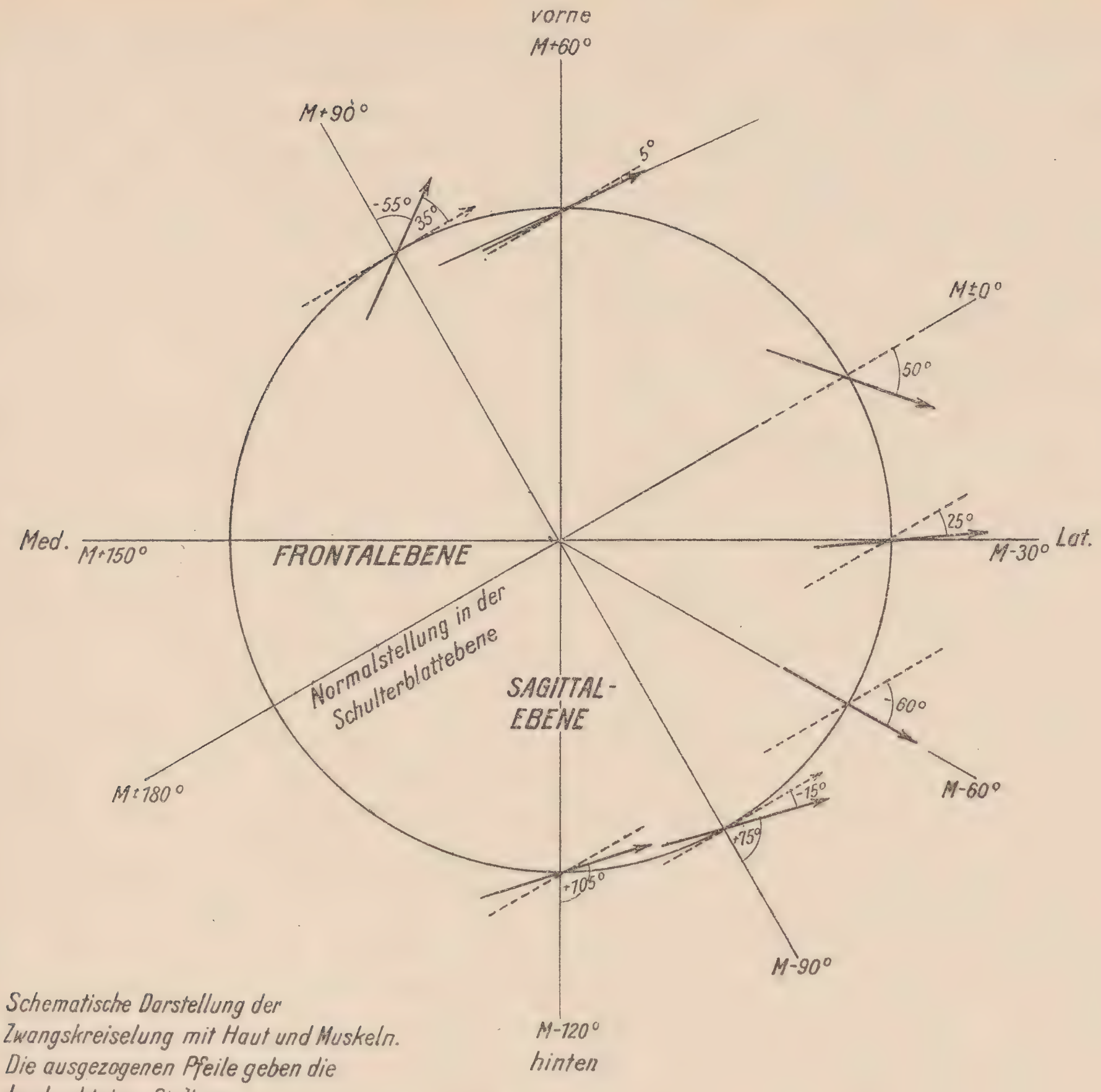
hebung, genau auf dem im Körper gerade nach vorn gerichteten Längskreis (M +60) ist der Pfeil um 65° nach lateral vom Längskreis gedreht (wie Kugelbild 4 und noch deutlicher Tafel III [S. 61] zeigt) usw.

Wie ich schon im Handbuch der Gelenklehre (II. Bd., S. 208ff.) auseinandergesetzt habe, entsprechen die auf der Kugel abzulesenden Winkel zwischen den Pfeilen und den Längskreisen auf den Grenzlinien des Bewegungsfeldes aber nicht etwa unmittelbar einer wirlichen »Kreiselung« des Armes um seine Längsachse, die er gegenüber der »Grundstellung« bei der Erhebung auf dem betr. Längskreis erfahren hat.

Als »Grundstellung« betrachten wir, wie schon bemerkt, diejenige Stellung, bei der der Arm gerade herunterhängt, so daß seine mechanische Längsachse auf den unteren Pol der Bewegungskugel zielt und die quere Ellbogenachse in der Schulterblattebene, also der Nullkreis- (Nullmeridian-) Ebene eingestellt ist. In der Grundstellung macht die Ellbogenachse natürlich mit dem im Körper gerade nach vorn (»sagittal«) durch die Schultermitte hindurchlaufenden Längskreis (M +60) einen lateralwärts offenen Winkel von 60°, mit dem gerade senkrecht zur Schulterblattebene laufenden Längskreis (M +90) einen Winkel von 90°, mit dem gerade sagittal rückwärts laufenden Längskreis (M −120) einen nach hinten lateral offenen Winkel von 120°, mit dem im Körper gerade frontal durch die Schultermitte laufenden Längskreis M −30 einen Winkel von 30° usf. Das erkannt man am besten, wenn man sich die betreffenden Längskreise und die Stellungen der Ellbogenachse zu ihnen auf eine wagrechte Ebene »projiziert«, was im Bild 8 ausgeführt ist[1]. Wenn der Oberarm wie im ersten angeführten Beispiel aus der Grundstellung heraus »gerade nach vorn«, also auf dem Längskreis M +60 erhoben wird, ohne daß er dabei um die Längsachse gedreht wird, so macht die quere Knorrenlinie (Ellbogenachse) mit dem Längskreis M +60 während der ganzen Bewegung natürlich einen lateralwärts offenen Winkel von 60° (s. gestrichelte Linie eng neben dem Pfeil, Bild 8). Diese Knorrenstellung, bei der der laterale Knorren um 60° vom Meridian M +60 abweicht, bei der der Arm also keine wirkliche »Kreiselung« gemacht hat, wollen wir auch weiterhin mit Shimo als »Neutralstellung« bezeichnen.

Aus dem Schema Bild 8 sehen wir, daß die durch den Pfeil angedeutete Ellbogenachse des auf dem Längskreis M +90 nach vorn medial erhobenen Armes bei der Grenzerhebung keineswegs mit ihrem Längskreis einen Winkel von 90° bildet, also wagrecht auf der Kugel (vgl. Bild 4) steht (punktierte und dünn ausgezogene Strichbahn), sondern nur einen Winkel von 55° (vgl. Bild 8). Es hat also nicht nur eine Erhebung des Armes um die auf dem Längskreis M +90 senkrechte Achse durch den Schultermittelpunkt (= Kugelmittelpunkt) stattgefunden, sondern auch eine Drehung,

[1] Ich werde im folgenden die einzelnen Hauptstellungen der queren Knorrenlinie bei den Grenzkreiselungen sehr eingehend beschreiben, da die Gewinnung einer klaren räumlichen Vorstellung dieser Verhältnisse dem mit der Untersuchungsart nicht Vertrauten nicht ganz leicht fällt. Für den mechanisch Geschulten sind die umständlichen Umschreibungen natürlich unnötig. Ich nehme aber gerne das Lächeln der Kundigen in Kauf, wenn ich durch die Ausführlichkeit und die Wiederholungen auch das Verständnis der mechanisch Ungeschulten erringe.



Schematische Darstellung der Zwangskreiselung mit Haut und Muskeln. Die ausgezogenen Pfeile geben die beobachteten Stellungen bei äußerster Erhebung auf dem betreffenden Meridian an, die gestrichelten Linien entsprechen der „Neutralstellung" der Ellbogenaxe (parallel der Nullmeridianebene).

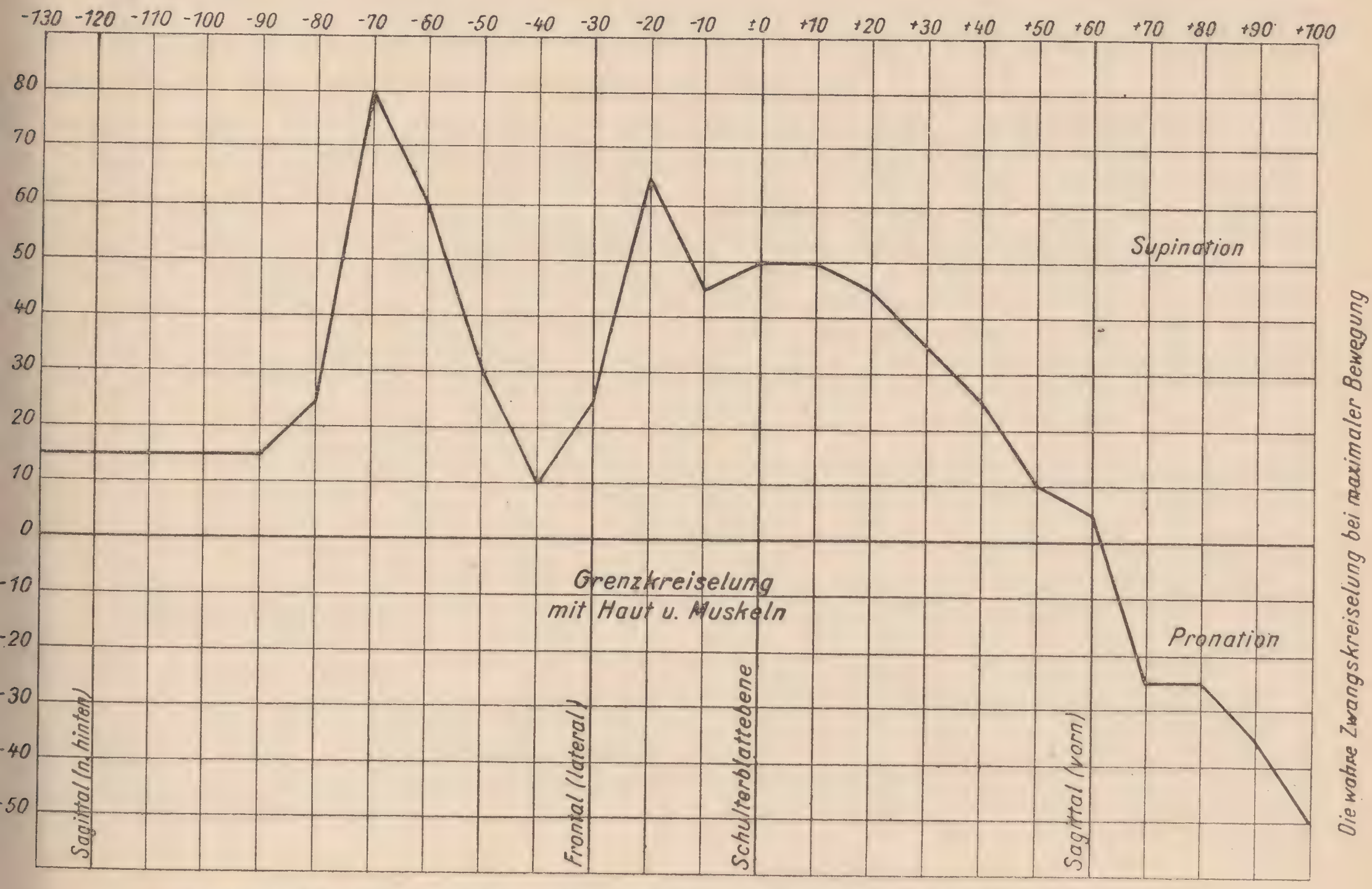
Bild 8. Projektion der Längskreise und der Stellung der queren Knorrenlinie sowie der betreffenden Neutralstellung auf eine wagrechte Ebene am Haut-Muskelpräparat.

eine »Kreiselung«, um seine mechanische Längsachse um $90 - 55 = 35°$ (vgl. Bild 8), und zwar von vorn gesehen im Sinne des Uhrzeigers. Eine solche Drehung ist aber eine »Pronation« (früher »Einwärtsrollung« genannt). Die Pfeile der Punktbahn und der dünnen Strichbahn (Kugelbild 4) oder der Pfeil im Schema Bild 8 am »sagittalen« Längskreis M +60 machen mit ihm einen Winkel von 65°, d. h. demnach um 5° mehr, als wenn die Bewegung nur eine »reine« Vorhebung ohne Kreiselung gewesen wäre. Die Kreiselung ist diesmal aber gegenüber der »Neutralstellung« des Pfeiles, von vorn an der Kugel betrachtet, entgegen dem Uhrzeiger erfolgt, also hat der Arm sich bei der Erhebung zugleich um 5° in Sinne der »Supination« gedreht. Mit dem Nullkreis machen die Pfeile der beiden Bahnen (Bild 4) oder der Pfeil des Schemas 8 einen nach hinten lateral offenen Winkel von 50°. Da hier die »Neutralstellung« mit dem Längskreis zusammenfällt (s. S. 62), beträgt hier die stattgehabte Kreiselung den ganzen unmittelbar ablesbaren Winkel. Und zwar ist hier die Drehung von der »Neutralstellung« aus, die dem Null-

kreis selbst entspräche, ebenfalls entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt, also eine Supination (vgl. auch Kugelbild 5). Auf dem genau »frontal« durch die Schultermitte verlaufenden Längskreis M −30 (vgl. Bild 5 und 8) steht der Pfeil nicht um 30° nach vorn vom Längskreis, wie er es tun würde, wenn er die Neutralstellung beibehalten hätte, wie es die gestrichelte Linie durch den frontalen Längskreis M −30 auf Bild 8 zeigt, sondern der Pfeil steht beinahe im Längskreis M −30 selbst, nämlich nur um 5° vor ihm. Der Pfeil ist also um beinahe 30°, nämlich um 25° aus der Neutralstellung heraus entgegen dem Uhrzeiger nach hinten gedreht, d. h. um 25° supiniert. Auf dem Längskreis M −60 steht der Pfeil sogar fast (Punktbahn Bild 6) oder genau (dünne Strichbahn Bild 6 oder Bild 8) in seinem Längskreis, statt daß er um 60° vor ihm stünde, wie es der Fall wäre, wenn der Arm nur auf dem Längskreis M −60 gehoben wäre und seine Knorrenlinie die Neutralstellung beibehalten hätte. Wir sehen also, daß die Ellbogenachse (der Pfeil) um 60° entgegen dem Uhrzeiger, also »supinatorisch« gedreht worden ist. Auf dem Längskreis gerade senkrecht zur Schulterblattebene nach hinten (M −90) sollte der Pfeil natürlich um 90° nach vorn vom Längskreis, d. h. auf der Kugel (Bild 6) genau wagrecht, mit der Spitze nach vorn lateral stehen (s. gestrichelte Linien in Bild 8); das ist aber nicht der Fall, sondern er macht mit dem Längskreis M −90 nur einen Winkel von 75° (s. Pfeil in Bild 8); er ist also gegenüber der wagrechten Neutralstellung um 15° entgegen dem Uhrzeiger, also supinatorisch verdreht. Ebenso ist es auf dem gerade sagittal nach hinten gerichteten Längskreis M −120. Statt daß die Ellbogenachse um 120° nach vorn lateral vom Längskreis abweicht, weicht sie nur um 105° ab; die quere Knorrenlinie ist also gegenüber der Neutralstellung um 15° entgegen dem Uhrzeiger, also supinatorisch verdreht.

In der Zahlentafel I (S. 57) sind in der 4. Spalte die unmittelbar gefundenen Winkel zwischen der Ellbogenachse und dem betreffenden Längskreis mit D (= Deklination) bezeichnet. Das +Zeichen vor der Winkelzahl bedeutet Abweichung des Pfeiles vom betreffenden Längskreis im Sinne des Uhrzeigers, wenn man die Kugelfläche, auf der sich die Bewegungen abspielen, von außen her betrachtet; das —Zeichen bedeutet Abweichung des Pfeiles vom Längskreis entgegen dem Uhrzeiger. Wie aus der ausführlichen vorstehenden Beschreibung der stattgehabten Grenzkreiselung an den »Hauptstellen« des Bewegungsfeldes folgt, erhält man aus diesen unmittelbar an der Kreiselungsscheibe (vgl. Bild 1 Beschreibung S. 56) ablesbaren Winkelzahl den wahren Kreiselungsbetrag gegenüber der »Neutralstellung«, wenn man sie zu der betreffenden Längskreiszahl hinzuzählt. Erhält man dabei eine negative Zahl, so ist die wahre Kreiselung entgegen dem Uhrzeiger, also supinatorisch erfolgt, erhält man eine positive Zahl, so ist die wahre Kreiselung im Sinne des Uhrzeigers erfolgt (vgl. Handbuch Bd. II, S. 209). Die 5. Spalte der ersten Zahlentafel enthält diese Winkelzahlen. Wir beobachteten z. B. auf Längskreis M −110 eine Winkelstellung von + 95° im Sinne des Uhrzeigers. »Die wahre Kreiselung« ist daher + 95 — 110 = — 15°, d. h. demnach eine Drehung entgegen dem Uhrzeiger, also eine Supination.

Auf der Linientafel IV sind die »wahren Kreiselungen« bei der Grenzhebung auf den einzelnen Längskreisen in einer fortlaufenden Linie aufgezeichnet. Die dortige Linie zeigt 2 ganz auffällige Zacken, d. h. Höchstwerte supinatorischer Kreiselung im Betrag von 80° bei der Höchsterhebung auf dem Längskreis M −70, also bei Hebung nach lateral-hinten, und im Betrag von 65° bei der Höchsterhebung auf dem Längskreis M −20, also bei Hebung



Linientafel IV. Grenzkreiselungsbetrag beim Haut-Muskelpräparat.
(Die Ziffern links geben den Betrag der Supination [über der Nullinie] bzw. den der Pronation [unter der Nullinie], die Ziffern oben die Längskreise an.)

beinahe gerade nach der Seite (genaue Seithebung = Hebung auf Längskreis M −30).

Diese Zacken, die sich schon am Muskelpräparat zeigten, kamen mir so auffällig vor, daß ich zunächst an einen Fehler dachte; aber eine Nachprüfung ergab mir und ganz unabhängig Hrn. Kollegen O. P. Maier, daß tatsächlich auf diesen Strecken die Hebung durch rasch ansteigende Supination gesteigert wird. Da auch das Bänderpräparat, von uns beiden wieder unabhängig voneinander untersucht, dasselbe ergab, so war selbstverständlich ein Fehler in der Aufschreibung ausgeschlossen. Der Vergleich mit dem Präparat Shinos ergibt nun überdies ebenfalls die eine Zacke, fast in gleicher Schroffheit, freilich um 30—40° weiter vorn als bei unserem neuen Präparat, nämlich auf dem Längskreis M −40 (rechts) bzw. M −30 (links). Wenn die steilen Zacken sich auch in der Linie der Erhebungsgrenzen mit Kreiselung fänden (Tafel I S. 58), würde man daran denken können, daß bis zu einem gewissen Punkt der Grenzbewegung der große Armbeinhöcker

vielleicht am Haken-Schultereckband (lgt. coraco-acromiale) einen Widerstand gefunden hätte und durch eine andere Kreiselstellung plötzlich unter die Schulterecke (Akromion) hinunterschlüpfen konnte und dadurch plötzlich sich viel weiter erheben ließ. Das ist aber offenbar nicht der Fall, denn die Erhebungsbahn (s. Tafel I S. 58) mit Kreiselung zeigt an der entsprechenden Stelle keine scharfe Anstiegszacke gegenüber der Erhebung ohne Kreiselung. Die plötzliche Schwankung im Betrag der Grenzkreiselung kann daher nicht auf Anstoßen oder Freiwerden eines Knochenvorsprungs beruhen, sondern ist offenbar die Folge rascher Bandanspannung an dieser Stelle der Erhebungsbahn. Überlegt man, welche Bänder es sein müssen, deren rasche Spannung die Zacken bewirken, so erkennt man, daß am Höhepunkt der Supination (bei der Grenzerhebung auf dem Längskreis M −70 und M −20) die die Supination hemmenden Bänder am schlaffsten gewesen sein müssen, so daß sie die starke Supination erlaubt haben. Supinationshemmend sind aber natürlich die vorderen Bänder, also die »Pfannenlippen-Armbänder« (lgt. gleno-humeralia und Teile des Haken-Armbandes (lgt. coracohumerale). Diese spannen sich offenbar rasch an, wenn man von der Erhebung auf diesen Längsgraden (M −70 und M −20) die Erhebung nach vorne oder hinten fortsetzen will, und erzwingen daher eine rasche Abnahme der supinatorischen Grenzkreiselung. Daß die Zacken im Grenzkreiselungsbetrag beim einen Präparat weniger auffällig (Präp. Shinos) und beim anderen auffälliger (neues Präp.) und daß auch die Stellen des Bewegungsfeldes, wo die Zacken auftreten, etwas wechseln, ist bei der Verschiedenheit in der Ausbildung der Bänder, der Armbeinhöcker und der Stellung des Schulterkopfes zur Pfanne leicht verständlich. (Schon im Handbuch habe ich auf das Vorkommen starker Verschiedenheit im Bänderverlauf aufmerksam gemacht, Bd. I, S. 262.)

4. Armhebung ohne (Grenz-) Kreiselung.

Wie oben bemerkt, richteten wir bei dieser erneuten Schultergelenkuntersuchung besonderes Augenmerk darauf, wie hoch der Arm auf den verschiedenen Längskreisen seines kugelförmigen Bewegungsgebietes erhoben werden konnte, ohne daß er um seine Längsachse gekreiselt wurde. Bei diesen Erhebungen blieb die Ellbogenachse also immer parallel ihrer Stellung, die sie in der »Grundstellung« zeigte, also parallel der Schulterblattebene (»Nullmeridianebene«).

a. Am Haut-Muskelpräparat.

Auf den Kugelbildern 4—7 ist der Umfang dieser »reinen« Erhebungen am Haut-Muskelpräparat durch die dick ausgezogene, innerste Linie bezeichnet. Die »reinen« Erhebungen am Bänderpräparat sind durch die gestrichelte Linie wiedergegeben.

Aus der Zahlentafel I (S. 57) oder aus dem Vergleich der beiden Linien auf Linientafel I (S. 58) und der dick und der dünn ausgezogenen Linie auf den Kugelbildern ergibt sich, daß in der Mitte des Bewegungsfeldes des Haut-Muskelpräparates (Bild 5), d. h. also bei der Seithebung des Armes, die beiden

Linien bis zu etwa 10° voneinander abstehen. Der Zuwachs, den die Erhebungsfähigkeit des Armes durch entsprechende (Grenz-) Kreiselung erfahren kann, beträgt etwa 10°. Auf dem vorderen Teil der Bewegungsbahn (Kugelbild 4) ist der Unterschied eher etwas größer, im hinteren Teil (Bild 6) ist der Unterschied weniger als 10°. Der Unterschied ist, wie man sieht, etwas größer als der zwischen dem Haut-Muskelpräparat und dem Bänderpräparat bei den äußersten oder »Grenz«erhebungen mit Kreiselung (vgl. S. 59f.).

b. Am Bänderpräparat.

Beim Bänderpräparat ist der Unterschied im Hebungsumfang mit oder ohne Kreiselung außer aus der Zahlentafel II (S. 60) auch auf der Linientafel II (S. 59) aus dem Abstand der gestrichelten und der punktierten (äußersten) Linie zu sehen; an den Kugelbildern ergibt er sich aus dem Abstand der Punktlinie von der gestrichelten Linie.

Man sieht, daß der Unterschied in der Mitte des Bewegungsfeldes und im hinteren Teil sehr ähnlich, nur etwas kleiner, im vorderen Teil etwas größer ist als beim Haut-Muskelpräparat.

Sehr bemerkenswert ist die Tatsache, daß auf dem Nullkreis und im vordersten Teil des Bewegungsfeldes vom Längskreis M +70 an die »reinen« Erhebungen am Bänderpräparat weniger hoch hinauf gehen als die Grenzerhebungen mit Kreiselungen beim Haut-Muskelpräparat! Bei der »reinen« Hebung des Armes auf dem vorderen Teil des Bewegungsfeldes liegt die Hemmung eben offenbar nicht in den Muskeln, sondern in der Bandeinrichtung bzw. im Anstoßen des kleinen Armbeinhöckers am Hakenfortsatz, die vermieden wird, wenn der Arm nicht einfach gehoben, sondern auch um seine Längsachse gekreiselt wird.

II. Selbständige Kreiselung (Pro-Supination).

Außer dem Grenzkreiselungsbetrag haben wir auch diesmal den Umfang der selbständigen Kreiselung (Pro-Supination) in verschiedenen Stellungen untersucht, und zwar zunächst in der Grundstellung, dann auch in gehobenen Stellungen, und zwar bei 30°, bei 60° und 90° Erhebung. Die Ergebnisse sind in der folgenden Zahlentafel III und den verschiedenen schematischen Zeichnungen wiedergegeben. Der Kreiselungsumfang in den mittleren Teilen des Bewegungsfeldes ist durch je 2 Pfeile (= Pro- bzw. Supinationsstellung) der Kugelbilder Nr. 4—7 dargestellt.

1. Kreiselungen in der Grundstellung.

a. Mit Haut und Muskeln.

Wenn der Arm senkrecht herabhing, so daß seine Längsachse auf den unteren Pol der Kugel zielte, so konnte die quere Knorrenlinie (quere Ellbogenachse) aus der Einstellung in die Schulterblattebene um 55° nach vorn gedreht, also proniert und um 65° nach hinten gedreht, also supiniert werden (s. Schemabild 9). Der Gesamtkreiselungsumfang war also 55+65=120°.

Zahlentafel III.

Selbständige Kreiselungen.

Auf dem Längskreis	Bei Hebung bis zum Polkreis	Am Haut-Muskelpräparat			Am Bänderpräparat		
		Betrag der			Betrag der		
		Pronation	Supination	Gesamtkreiselung	Pronation	Supination	Gesamtkreiselung
−120	30	15°	65°	80°	20°	70°	90°
−90	30	40°	90°	130°	40°	100°	140°
−90	60	—	—	—	15°	45°	60°
−60	30	55°	85°	140°	60°	110°	170°
−60	60	25°	90°	115°	40°	100°	140°
−30	30	65°	85°	150°	65°	110°	175°
−30	60	45°	95°	140°	55°	110°	165°
−30	90	5°	95°	100°	15°	110°	125°
±0	0	70°	85°	155°	80°	105°	185°
±0	30	55°	65°	120°	60°	90°	150°
±0	60	65°	95°	160°	75°	110°	185°
±0	90	25°	85°	110°	30°	110°	140°
+30	30	70°	75°	145°	85°	90°	175°
+30	60	65°	80°	145°	60°	95°	155°
+30	90	30°	65°	95°	45°	90°	135°
+60	30	65°	60°	125°	70°	80°	150°
+60	60	65°	55°	120°	70°	70°	140°
+60	90	40°	—	40°	55°	65°	120°
+90	30	60°	45°	105°	70°	60°	130°
+90	60	60°	30°	90°	65°	45°	110°

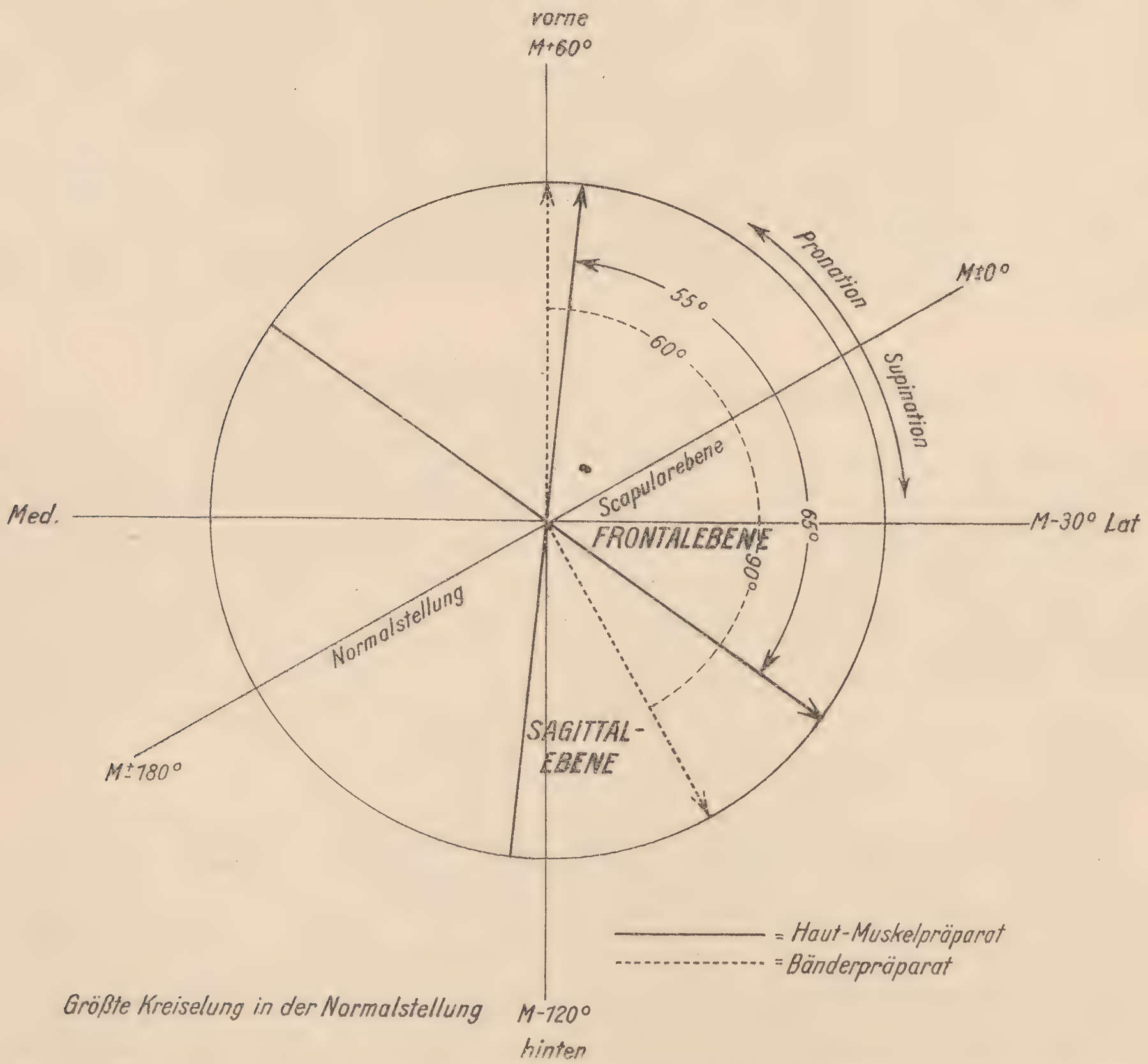


Bild 9. Projektion der Hauptlängskreise und der Stellung der queren Knorrenlinie auf eine wagrechte Ebene bei äußerster selbständiger Pro- bzw. Supination des Armes aus der Grundstellung.
Ausgezogene gerade lange Durchmesser-Pfeile = am Haut-Muskelpräparat.
Punktierte gerade kurze Halbmesser-Pfeile = am Gelenkpräparat.

b. Am Bänderpräparat.

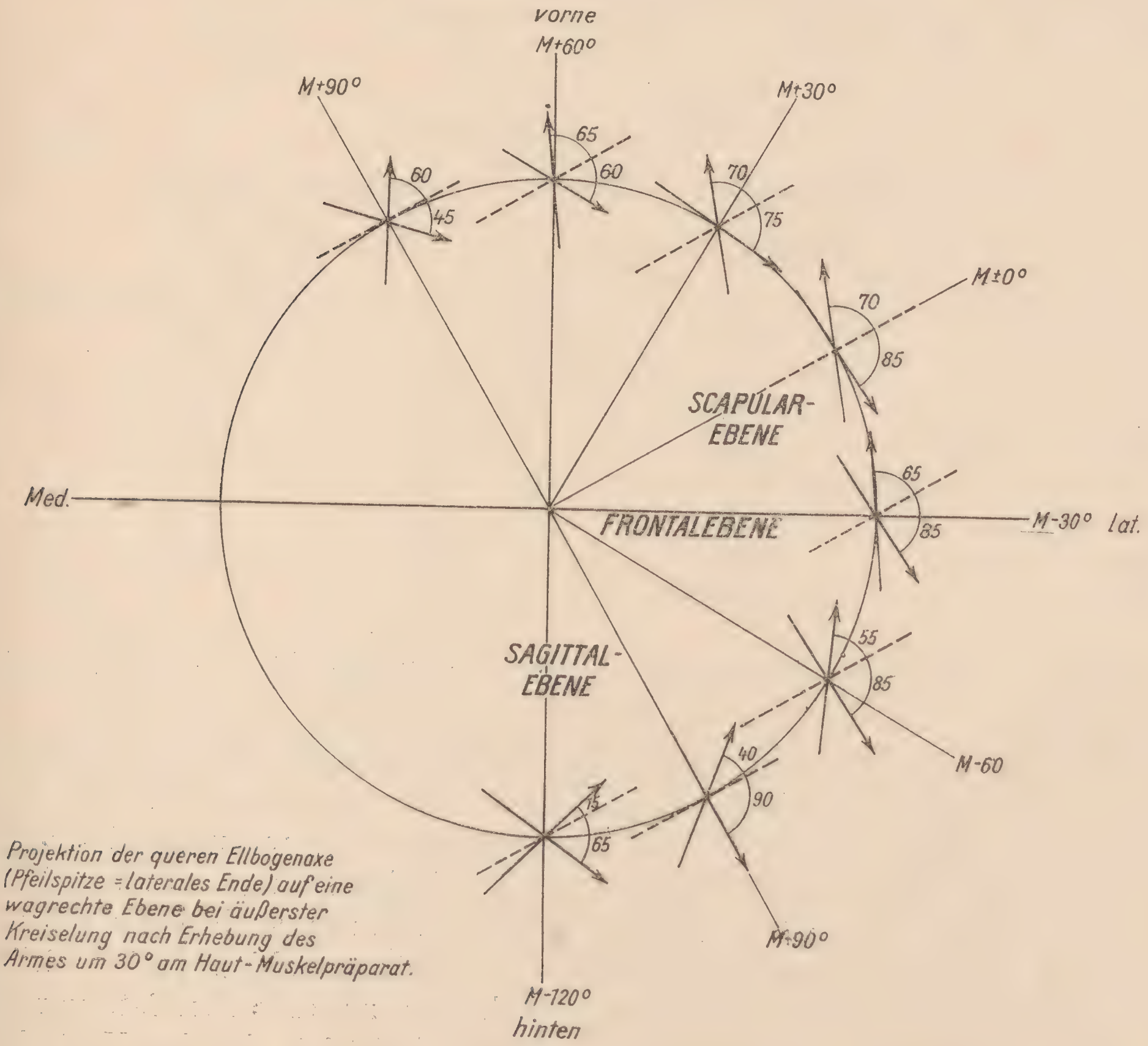
Nach Abtrennung von Haut und Muskeln stieg der Pronationsumfang auf 60°, der der Supination auf 90°, der Gesamtkreiselungsumfang auf 150° (s. Bild 9 d. vor. S.).

Unser neues Präparat zeigt merkwürdigerweise die umgekehrten Verhältnisse wie das Präparat Shiinos. Bei letzterem fanden wir sowohl am ganzen, als beim Bänderpräparat die Pronation in der Grundstellung ausgedehnter, hier aber, namentlich am Bänderpräparat, die Supination bei weitem umfangreicher.

2. Kreiselung bei Erhebung des Armes um 30°.

a. Mit Haut und Muskeln.

Wenn der Arm um 30° erhoben war, d. h. seine Längsachse auf den Breitekreis P 30 zielte, so zeigte sich auf den »Haupt«-Längskreisen folgender Kreiselungsumfang (vgl. auch Schemabild 10 und Linientafel V und VI (auf Anhängetafel II) sowie Kugelbild 4—7).



Projektion der queren Ellbogenaxe (Pfeilspitze = laterales Ende) auf eine wagrechte Ebene bei äußerster Kreiselung nach Erhebung des Armes um 30° am Haut-Muskelpräparat.

Bild 10. Schema für die Stellung der Ellbogenachse bei äußerster Pro- bzw. Supination des um 30° erhobenen Armes auf den verschiedenen Längskreisen am Haut-Muskelpräparat.

Auf Kreis	M −120	(gerade hinten sagittal)	war	die	Pronation	15°,	die	Supination	65°,	die	Gesamtkreiselung	80°
»	M −90	(hinten lateral)	»	»	»	40°,	»	»	90°,	»	»	130°
»	M −60	(lateral hinten)	»	»	»	55°,	»	»	85°,	»	»	140°
»	M −30	(» frontal)	»	»	»	65°,	»	»	85°,	»	»	150°
»	M ±0	(» vorwärts (in der Schulterblattebene))	»	»	»	70°,	»	»	85°,	»	»	155°
»	M +30	(vorwärts lateral)	»	»	»	70°,	»	»	75°,	»	»	145°
»	M +60	(gerade vorwärts sagittal)	»	»	»	65°,	»	»	60°,	»	»	125°
»	M +90	(vorwärts medial)	»	»	»	60°,	»	»	45°,	»	»	105°

Gerade vorn (auf M +60) und vorn medial (auf M +90) ist demnach bei dem um 30° erhobenen Arm die Pronation umfangreicher als die Supination, auf allen anderen Längskreisen hingegen umgekehrt. Das ist keineswegs immer der Fall; es bestehen offenbar persönliche Unterschiede, ja sogar auf beiden Körperseiten derselben Person. So fanden wir an Shiinos Präparat links überall die Pronation größer, allerdings war vorn das Überwiegen der Pronation auch am ausgesprochensten. Auf der rechten Körperseite war aber, ähnlich wie beim jetzigen Präparat, hinten die Supination umfangreicher. Freilich begann auch bei diesem Präparat schon auf dem Längskreis M −90 die Pronation zu überwiegen.

b. Am Bänderpräparat.

Kreiselungsumfang des um 30° erhobenen Armes.

Vgl. Linientafel VII und VIII (auf Anhängetafel III).

Auf Kreis	M −120	(gerade nach hinten sagittal)	war	die	Pronation	20°,	die	Supination	70°,	die	Gesamtkreiselung	90°
»	M −90	(» » lateral)	»	»	»	40°,	»	»	100°,	»	»	140°
»	M −60	(» lateral hinten)	»	»	»	60°,	»	»	110°,	»	»	170°
»	M −30	(» » » frontal)	»	»	»	65°,	»	»	110°,	»	»	175°
»	M ±0	(» » vorwärts) (in der Schulterblattebene)	»	»	»	80°,	»	»	105°,	»	»	185°
»	M +30	(» vorwärts lateral)	»	»	»	85°,	»	»	90°,	»	»	175°
»	M +60	(» » » sagittal)	»	»	»	70°,	»	»	80°,	»	»	150°
»	M +90	(» » medial)	»	»	»	70°,	»	»	60°,	»	»	130°

Hier ist nur vorn medial die Pronation umfangreicher, sonst überall die Supination.

Die Untersuchung zeigte also, daß der Kreiselungsumfang durch die Abtragung der Haut und Muskeln wesentlich mehr gesteigert wird als die Erhebungsmöglichkeit. Bei der Begrenzung der Kreiselbewegungen ist eben die »Muskelhemmung« schuld, nicht die »Bänderhemmung«. Shiino hat die Muskelhemmung in seiner gründlichen Untersuchung auch für die Kreiselbewegung Schritt für Schritt verfolgt. Aus seinen Zahlen ergibt sich unmittelbar, daß es, wie ja auch von vornherein zu erwarten ist, vor allem der Unterschulterblattmuskel (m. subscapularis) ist, der den Kreiselungsumfang beeinflußt. Nach seiner Durchschneidung schnellt der Supinationsumfang um 20—31° empor.

3. Kreiselungsumfang bei Erhebung um 60°.

a. Am Haut-Muskelpräparat.

Wurde der Arm um 60° erhoben, so daß seine Längsachse auf den Breitekreis P 60 zielte, so zeigte sich an den verschiedenen Stellen des kugelförmigen Bewegungsgebietes, und zwar in den Hauptlängskreisen, folgender Kreiselungsumfang (vgl. auch Kugelbild 4—7, Schemabild 11 und Linientafeln V und VI auf Anhängetafel II).

Auf den Längskreisen M −120, d. h. gerade nach hinten, und auf M −90 konnte der Arm am Haut-Muskelpräparat nicht bis zu 60° erhoben werden (s. Kugelbild 6).

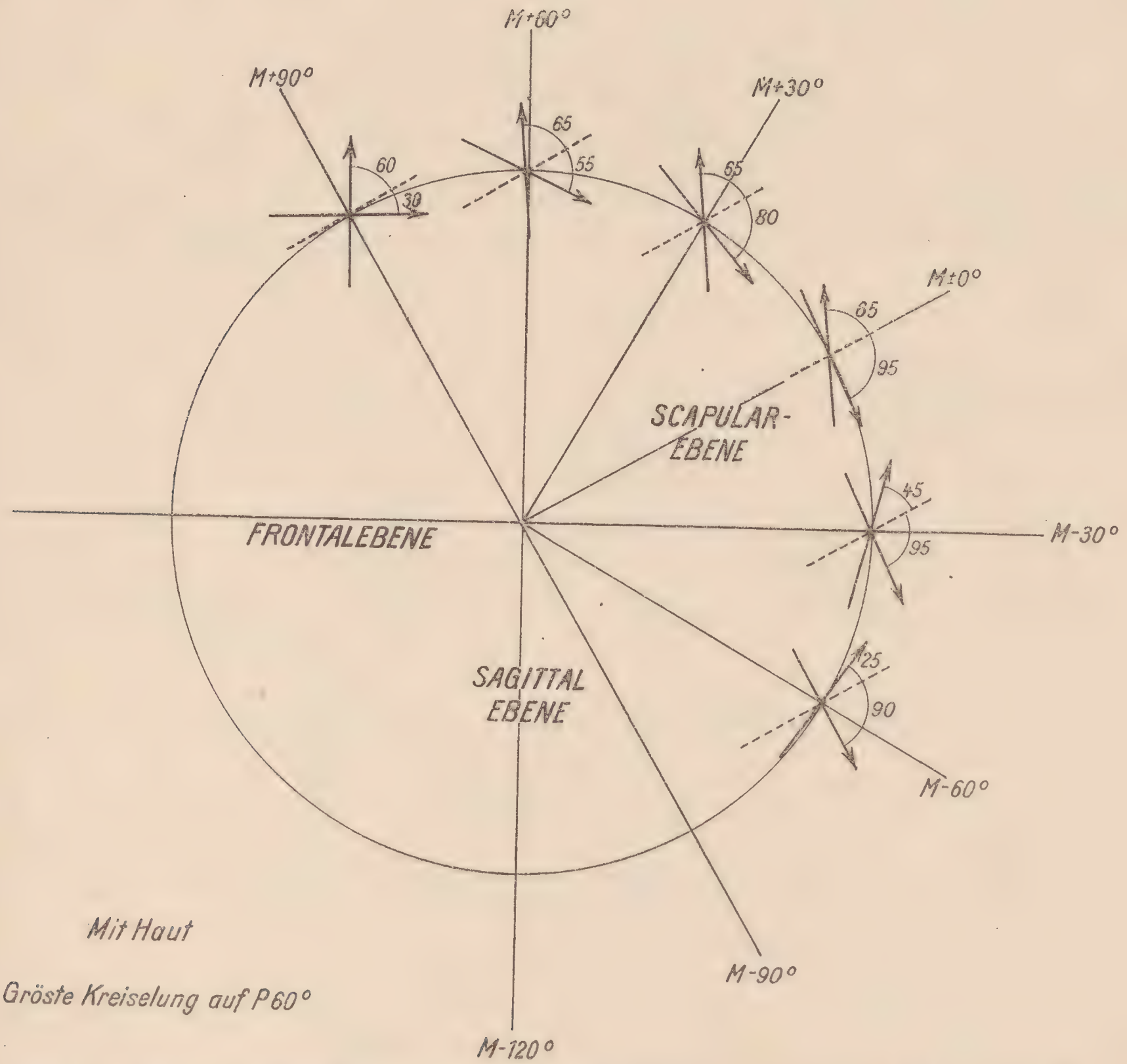


Bild 11. Schema für die Stellung der Ellbogenachse bei äußerster Pro- bzw. Supination des um 60° erhobenen Armes auf den verschiedenen Längskreisen am Haut-Muskelpräparat.

reis	M −60	(schräg lateral hinten)	war die Pronation	25°,	die Supination	90°,	die Gesamtkreiselung	115°
»	M −30	(gerade » frontal)	» » »	45°,	» »	95°,	» »	140°
»	M ±0	(» vorwärts) (in der Schulterblattebene)	» » »	65°,	» »	95°,	» »	160°
»	M +30	(vorwärts lateral)	» » »	65°,	» »	80°,	» »	145°
»	M +60	(gerade vorwärts sagittal)	» » »	65°,	» »	55°,	» »	120°
»	M +90	(» medial)	» » »	60°,	» »	30°,	» »	90°

Auch hier ist der Pronationsumfang nur vorn größer als der Supinationsumfang.

b. Am Bänderpräparat.

(Vgl. Linientafeln VII und VIII auf Anhängetafel III.)

Auf Kreis	M −90	(schräg hinten lateral)	war die Pronation	15°,	die Supination	45°,	die Gesamtkreiselung	65°
»	»	M −60	(lateral hinten)	»	»	»	40°,	»	»	100°,	»	»	140°
»	»	M −30	(gerade lateral frontal)	»	»	»	55°,	»	»	110°,	»	»	165°
»	»	M ±0	(schräg » vorwärts) (in der Schulterblattebene)	»	»	»	75°,	»	»	110°,	»	»	185°
»	»	M +30	(schräg vorwärts lateral)	»	»	»	60°,	»	»	95°,	»	»	155°
»	»	M +60	(gerade vorwärts sagittal)	»	»	»	70°,	»	»	76°,	»	»	146°
»	»	M +90	(schräg vorn medial)	»	»	»	65°,	»	»	45°,	»	»	110° (unsicher wegen Anstoßens)

Hier ist der Pronationsumfang wieder nur auf dem vorn medial liegenden Kreis M +90 größer als die Supination.

4. Kreiselungsumfang am Äquator.

a. Am Haut-Muskelpräparat.

Wenn der Arm um 90° erhoben wurde, so daß die Armlängsachse wagrecht stand, also auf den Äquator der Bewegungskugel zielte, ergab sich an

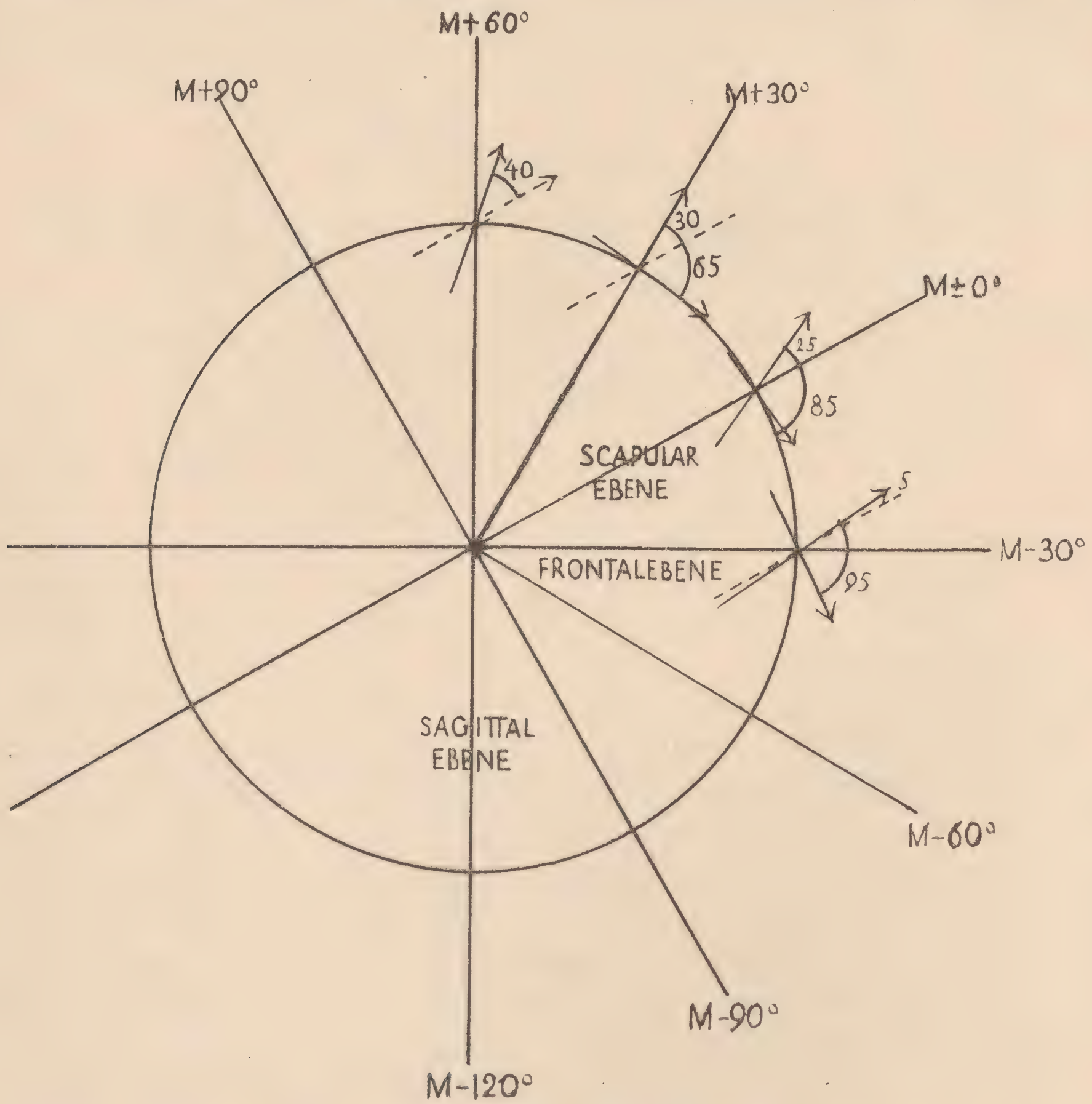


Bild 12. Schema für die Stellung der Ellbogenachse bei äußerster Pro- bzw. Supination des um 90° erhobenen Armes auf den verschiedenen Längskreisen am Haut-Muskelpräparat.

den verschiedenen Stellen folgender Kreiselungsumfang (vgl. auch Kugelbild 4—7, Schemabild 12 und Linientafel V und VI auf Anhängetafel II).

Auf Kreis M −30 (gerade lateral frontal) war die Pronation 5°, die Supination 95°, die Gesamtkreiselung 100°
» » M ±0 (schräg » vorwärts) (in der Schulterblattebene) » » » 25°, » » 85°, » » 110°
» » M +30 (schräg vorwärts lateral) » » » 30°, » » 65°, » » 95°
» » M +60 (gerade vorwärts sagittal) » » » 40°, » » 0°, » » 40°

Die Zusammenstellung zeigt, daß der wagrecht gerade nach vorn gehobene Arm nur noch proniert, nicht mehr supiniert werden kann; das ist wohl auch bei den meisten Lebenden der Fall.

b. Am Bänderpräparat.

(Vgl. Linientafeln VII und VIII auf Anhängetafel III.)

Auf Kreis M −30 (gerade lateral frontal) war die Pronation 15°, die Supination 110°, die Gesamtkreiselung 125°
» » M ±0 (schräg » vorwärts) (in der Schulterblattebene) » » » 30°, » » 110°, » » 140°
» » M +30 (schräg vorwärts lateral) » » » 45°, » » 90°, » » 135°
» » M +60 (gerade » sagittal) » » » 55°, » » 65°, » » 120°

Hier ist beachtenswerterweise auch am gerade nach vorn wagrecht gehobenen Arm die Supination ausgiebiger als die Pronation.

Der Vergleich der Zahlen- und Linientafeln (5) ergibt, daß in dem jetzt von uns untersuchten Fall der Kreiselungsumfang keineswegs etwa in der Grundstellung am größten ist, sondern, wie nähere Überlegung schon erwarten läßt, in der um 60° erhobenen Stellung, die eben der »Mittelstellung« (vgl. S. 58) benachbart ist.

Lans bei Innsbruck (Ansitz Heimkehr), Herbst 1927.

Ausgegeben am 5. Mai.

Tafel I.

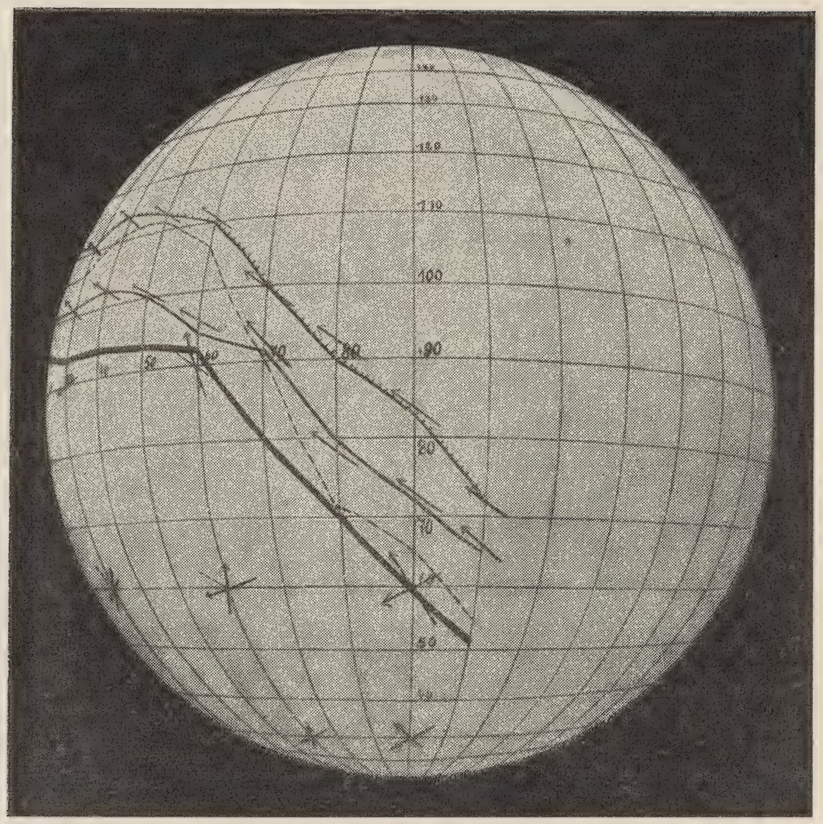


Bild 4. Vorderansicht der Erhebungsbahn des Armes.
Ausgezogene Linien = Haut-Muskelpräparat. Punktierte Linien = Bänderpräparat.
Pfeile = Stellung der Ellbogenachse bei äußerster Hebung.

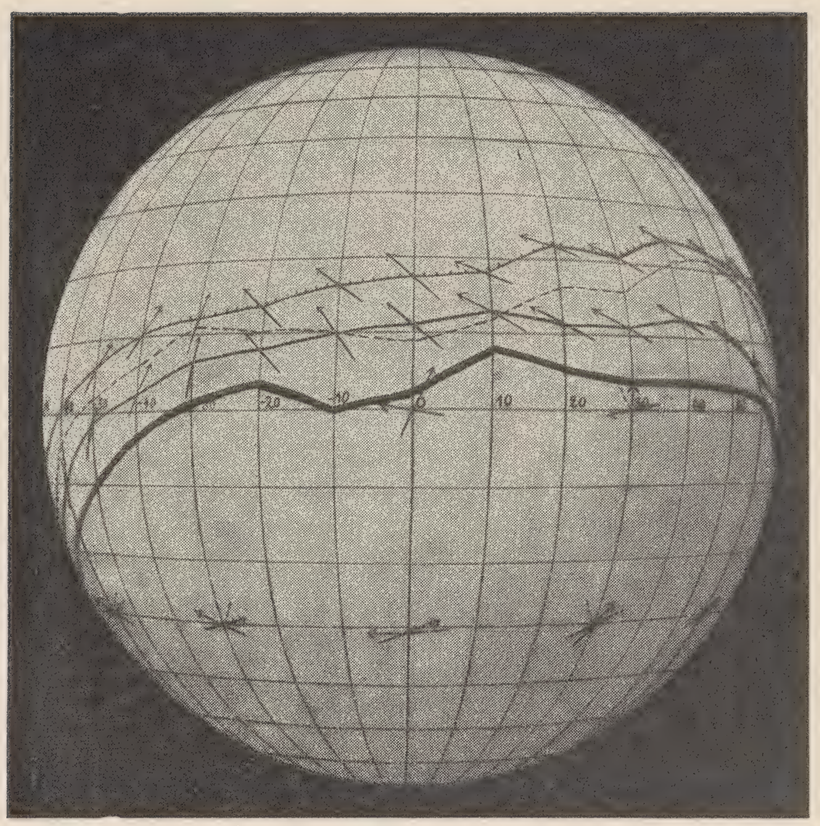


Bild 5. Seitenansicht der Erhebungsbahn des Armes.
Ausgezogene Linien = Haut-Muskelpräparat. Punktierte Linien = Bänderpräparat.
Pfeile = Stellung der Ellbogenachse bei äußerster Hebung.

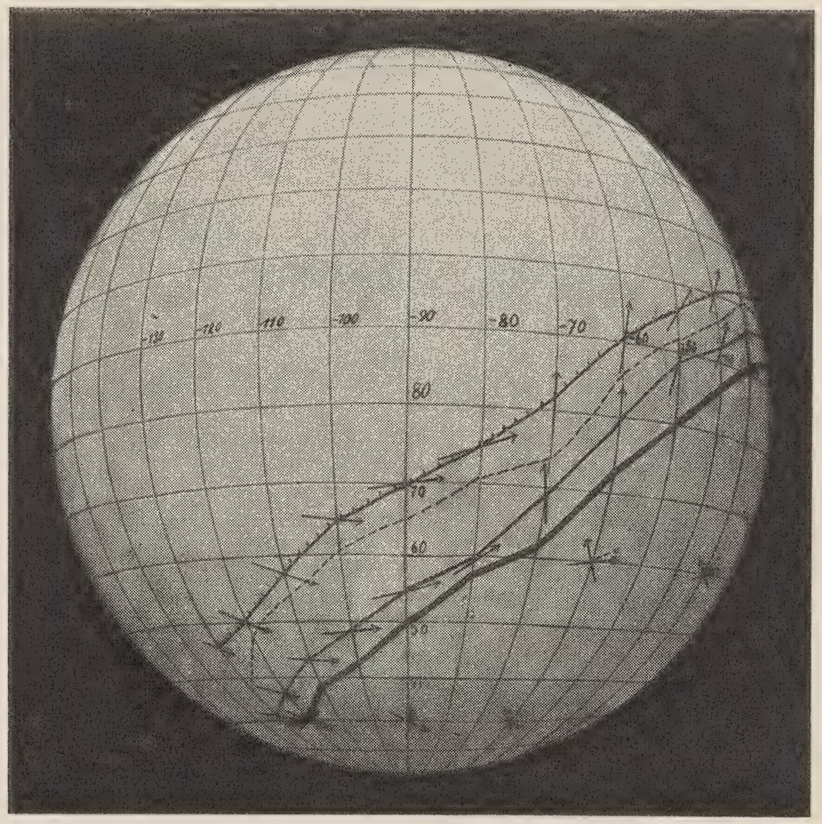


Bild 6. Rückansicht der Erhebungsbahn des Armes.
Ausgezogene Linien = Haut-Muskelpräparat. Punktierte Linien = Bänderpräparat.
Pfeile = Stellung der Ellbogenachse bei äußerster Hebung.

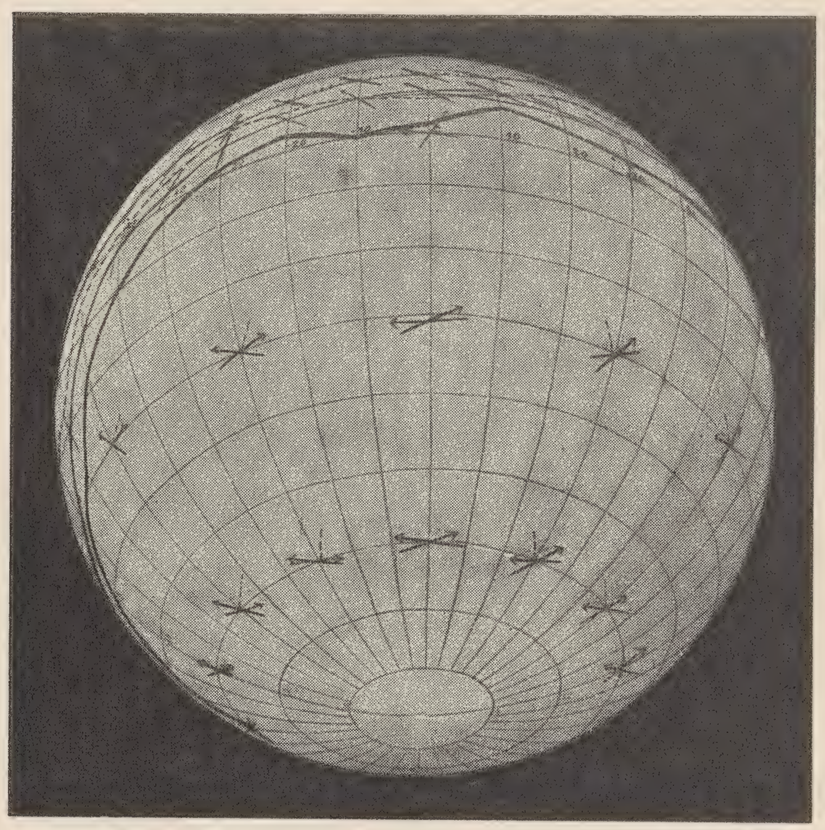
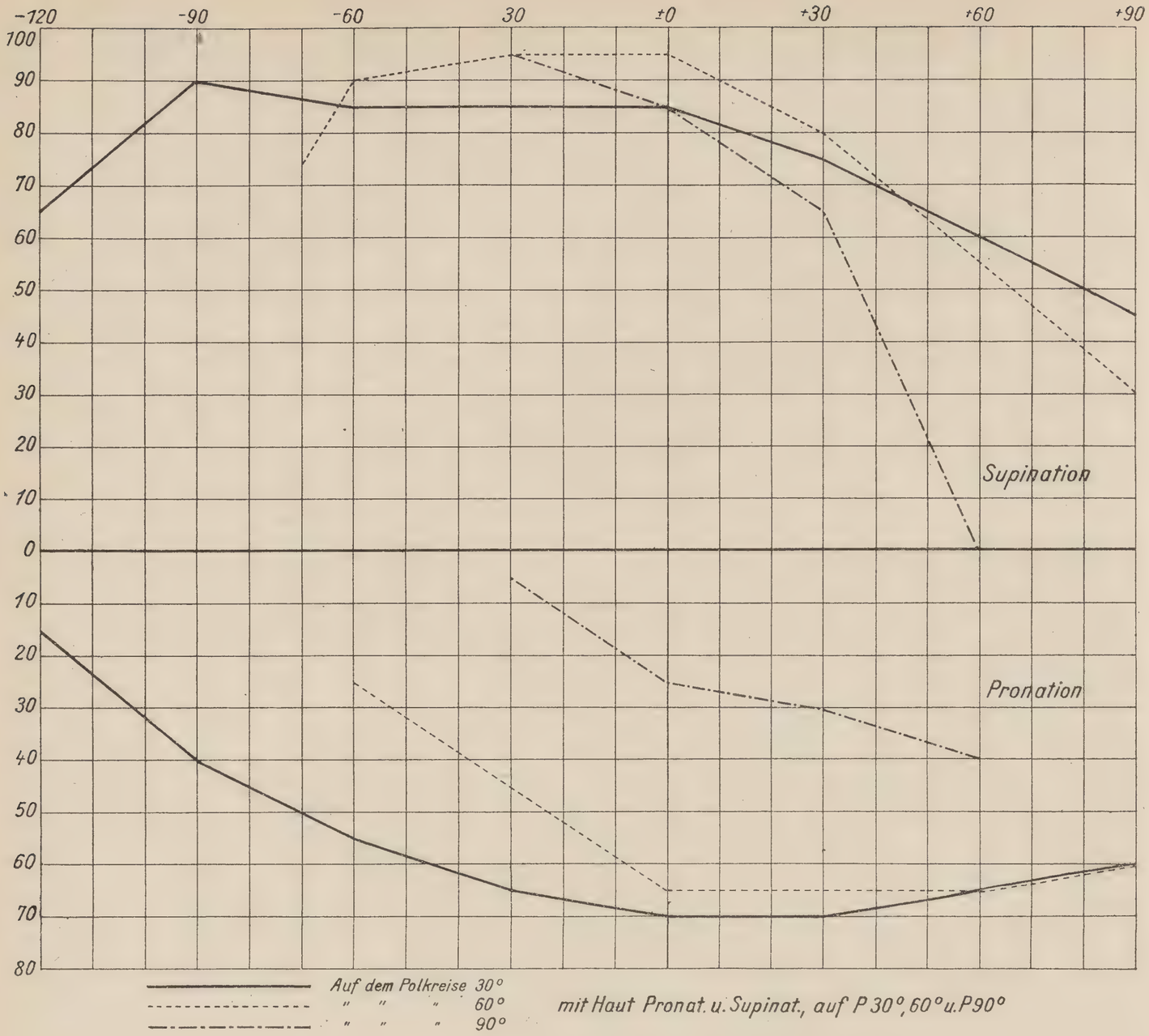


Bild 7. Darstellung des Umfanges der selbständigen Kreiselungen in den mittleren Teilen des Bewegungsfeldes des Armes.
Blick auf die »Bewegungskugel« von lateral und unten.
Die Doppelpfeile auf dem 30., 60. und 90. Breitekreis entsprechen der äußersten Pro- bzw. Supinationsstellung der queren Ellbogenachse des Oberarmes.

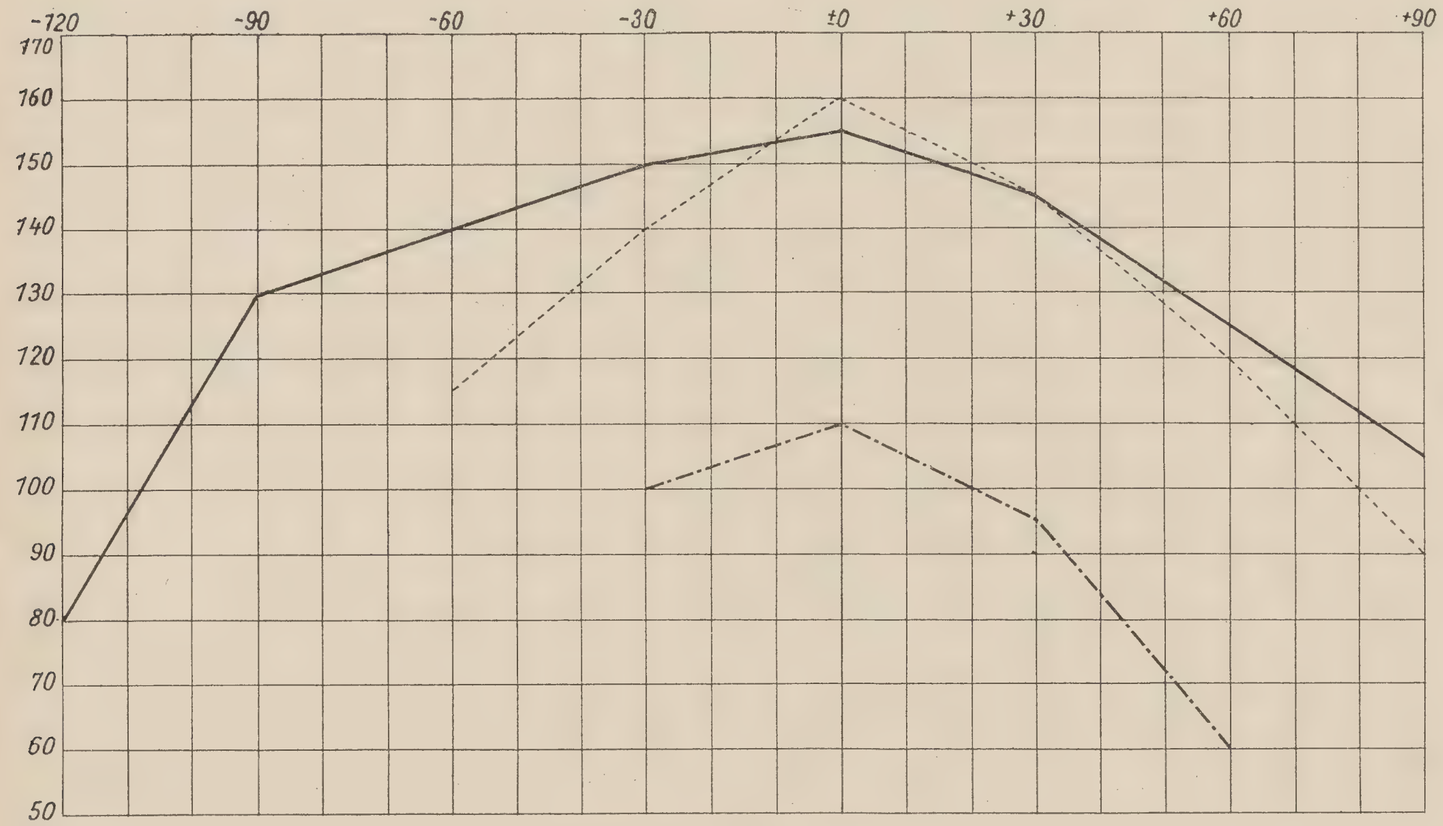
Tafel II.



Linientafel V.

Betrag der selbständigen Pro- und Supination am Haut-Muskelpräparat.

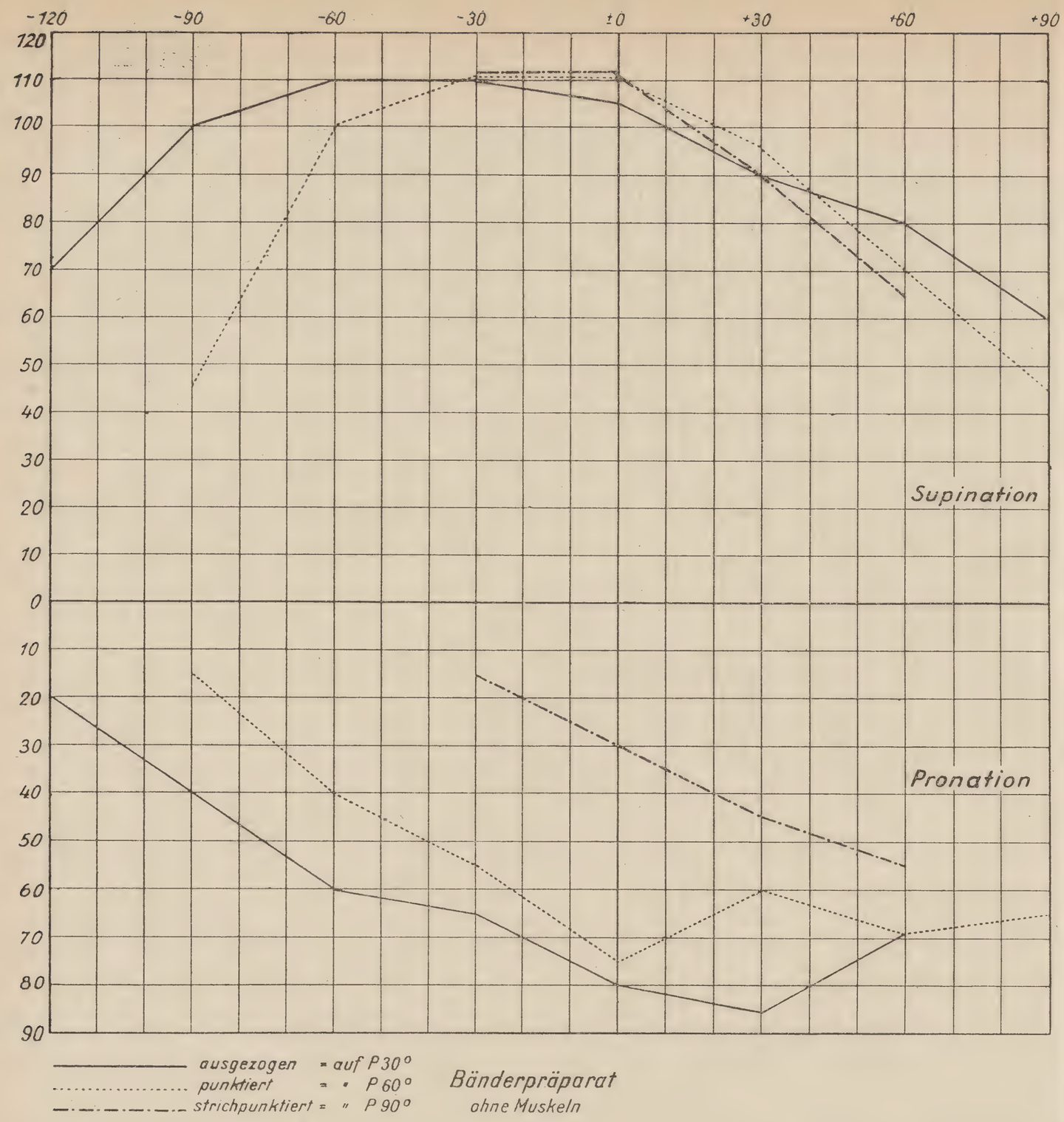
Ausgezogene Linie	= um 30° erhobener Arm
Gestrichelte Linie	= um 60° » »
Strichpunktierte Linie	= um 90° » »
Über der Nullinie	= Supination
Unter » »	= Pronation.
Ziffern links	= Gradzahlen des Kreiselungsbetrages
Ziffern oben	= Längsgrade, auf denen die selbständige Kreiselung untersucht wurde.



Linientafel VI.

Gesamtbetrag der selbständigen Kreiselung am Haut-Muskelpräparat.

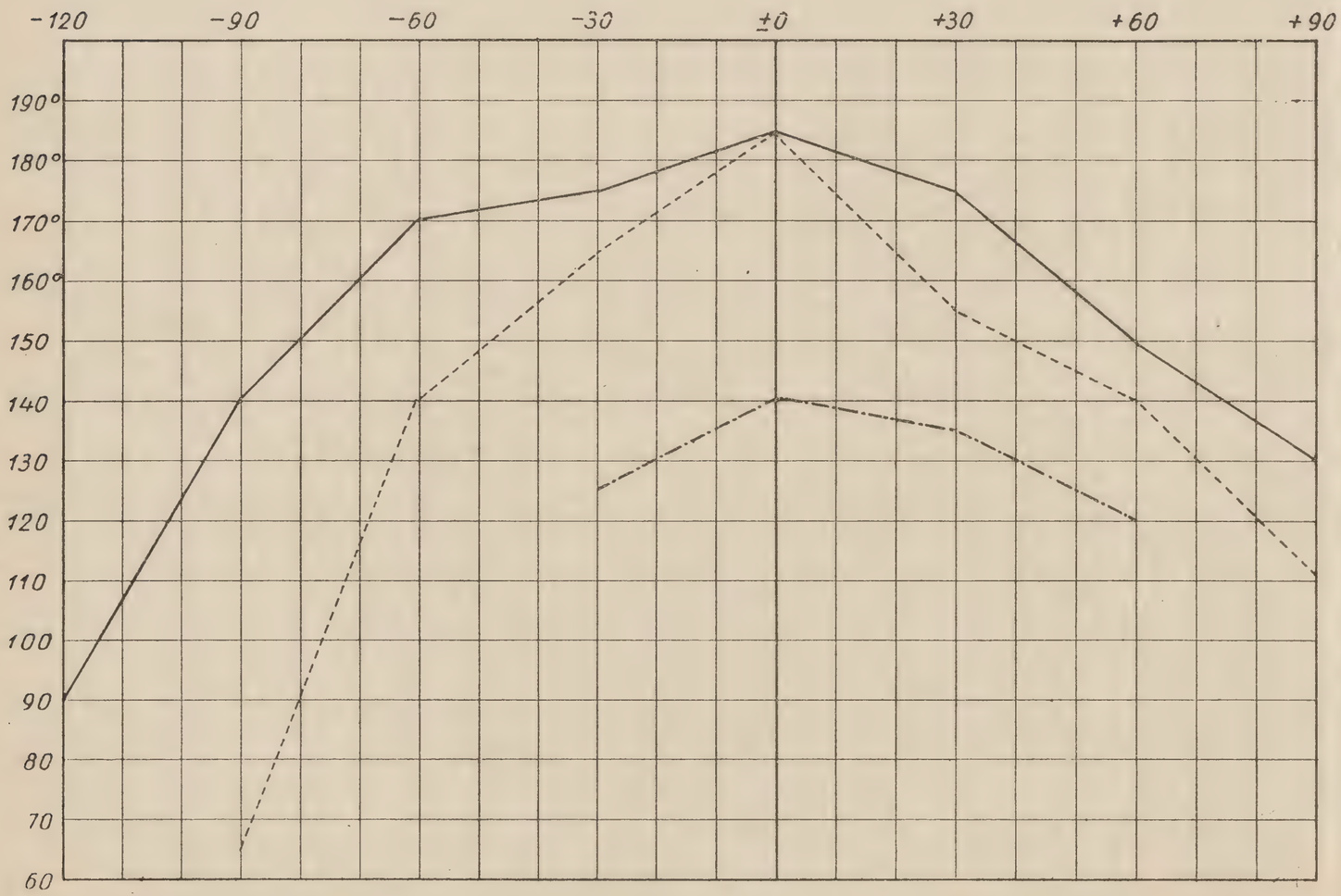
Ausgezogene Linie	= um 30° erhobener Arm
Gestrichelte Linie	= um 60° » »
Strichpunktierte Linie	= um 90° » »
Ziffern links	= Gradzahlen des Gesamt-Kreiselungsbetrages
Ziffern oben	= Längsgrade, auf denen die selbständige Kreiselung untersucht wurde.



Linientafel VII.

Betrag der selbständigen Kreiselung
am Bänderpräparat.

Ausgezogene Linie = um 30° erhobener Arm
Gestrichelte Linie = um 60° » »
Strichpunktierte Linie = um 90° » »
Ziffern über der Nullinie = Supination
» unter » » = Pronation.



Linientafel VIII.

Gesamtbetrag der selbständigen Kreiselung
am Bänderpräparat.

Ausgezogene Linie = um 30° erhobener Arm
Gestrichelte Linie = um 60° » »
Strichpunktierte Linie = um 90° » »
Ziffern links = Gradzahlen des Gesamt-Kreiselungsbetrages
Ziffern oben = Längsgrade, auf denen die selbständige Kreiselung untersucht wurde.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

VI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 23. Februar.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Wagner erörterte den Plan eines Fernsprechkabels von Europa nach Nordamerika. (Ersch. später.)

Die Fernsprechverbindung über den Ozean hinweg ist bisher nur auf drahtlosem Wege möglich gewesen. Da dieser Weg nur einen sehr beschränkten Verkehr zu bewältigen vermag, bleibt die Überbrückung des Ozeans durch Fernsprechkabel ein erstrebenswertes Ziel. Die bisher verlegten Transozeankabel dienen der Telegraphie und sind zur Übertragung der Sprache nicht brauchbar. Geeignet ist ein den Landfernsprechkabeln ähnlicher Typ, der mit Papier isoliert und mit Pupinspulen induktiv belastet ist. Der Verwendung eines solchen Kabels standen bisher hauptsächlich die mechanischen Schwierigkeiten der druckfesten Herstellung und der Verlegung entgegen. Nachdem diese Schwierigkeiten in systematischer Arbeit von der Felten & Guilleaume Carlswerk A. G. in Köln-Mülheim und den Norddeutschen Seekabelwerken in Nordenham überwunden worden sind, ist es heute technisch möglich, Europa mit Nordamerika durch ein Fernsprechkabel zu verbinden. Für eine Verbindung Lissabon–Azoren–Neufundland ergeben sich nach den Untersuchungen des Vortragenden günstige elektrische Werte. Die Gegenüberstellung der Kosten des Plans und der voraussichtlichen Einnahmen läßt ein annehmbares wirtschaftliches Ergebnis des vorgeschlagenen Kabels erwarten.

Die Ursachen der Eiszeit.

Von Albrecht Penck.

(Zum Teil vorgetragen am 3. Februar 1927 [s. Jahrg. 1927 S. 16].)

Über das Klima der Eiszeit wurden die ersten greifbaren Anhaltspunkte erhalten, als Maße für die Herabdrückung der eiszeitlichen Schneegrenze gewonnen wurden. Joseph Partsch hat hier den richtigen Weg gewiesen. Jene Herabdrückung kann zwei Ursachen haben, entweder eine Erniedrigung der Temperatur insbesondere der Sommermonate oder eine Mehrung der Schneeniederschläge. Die Tatsache, daß die Herabdrückung in ozeanischen Gebieten eine größere ist als in kontinentalen, erweist, daß beide Ursachen zusammen wirken. Indes läßt sich der Anteil des einen oder anderen nicht ohne weiteres erweisen.

Im großen Becken von Nordamerika zwischen Wasatchgebirge und Sierra Nevada liegen große geschlossene Hohlformen, die heute des Abflusses entbehren, oder die nur teilweise an ihrem Boden mit Wasser erfüllt sind. Früher waren die einen bis zum Überlaufen voll. Am Westfuße des Wasatchgebirges dehnte sich der große Bonnevillesee, der über den Red Rock-Paß zum Snake River überfloß. Dagegen waren die Vertiefungen am Ostfuße der Sierra Nevada nur teilweise, wenn auch in weitem Umfange von Wasser erfüllt. Hier dehnte sich der Lake Lahontan, der das Gebiet des unteren Humboldtflusses und der nachbarlichen Senken einnahm und keinen Abfluß besaß. Durch die ausgezeichneten Untersuchungen von G. K. Gilbert und J. C. Russel[1] sind wir über die beiden alten Seen genauer unterrichtet. Gilbert hat gezeigt, daß eiszeitliche Gletscher sich bis in den Bonnevillesee erstreckten. Er gehört zu den Gebilden des Eiszeitalters und war während der letzten und vorletzten Vergletscherung vorhanden. Der Gedanke liegt nahe, daß beide Seen in einer Zeit existierten, die wesentlich niederschlagsreicher als heute war; aber südlich von beiden waren die meisten Hohlformen des großen Beckens auch zur Eiszeit leer[2]. Nicht in allen der hier vorhandenen geschlossenen Becken sieht man Uferlinien, wie solche an den Gestaden des alten Bonnevillesees sehr auffallen.

[1] G. K. Gilbert, Lake Bonneville. Monographs U. S. Geological Survey I, 1890. J. C. Russel, Geological History of Lake Lahontan. Ebd. XI. 1885.

[2] A. Penck, Die Morphologie der Wüsten. Verhandl. XVII. D. Geographentag Lübeck 1909, S. 125.

Oscar E. Meinzer[1] hat im Großen Becken 125 geschlossene Hohlformen gezählt, aber nur in 68 sind Seen der Quartärperiode nachweisbar. Von diesen liegen 50 nördlich 37° N. Er findet, daß der Zustand während des Quartärs jeweils ähnlich dem gegenwärtigen in weiter nördlich gelegenen Gebieten von 8,2° geringerer Temperatur gewesen ist. Er erkennt, daß das Studium der Hohlformen die Möglichkeit bieten wird, das Klima der Quartärperiode klar zu erfassen, aber er überläßt die Lösung der Aufgabe, inwieweit Änderungen von Temperatur und Niederschlag geschehen sind, späteren Untersuchungen. Auch Ernst Antevs[2] geht nicht an die Frage heran. Ihm danken wir eine umfassende Sammlung der einschlägigen Literatur und die kritische Erörterung einiger Fragen über die Entstehung des Bonnevillesees.

Der im folgenden zu machende Versuch geht von der Tatsache aus, daß während der Eiszeit im Großen Becken drei verschiedene Fälle nebeneinander vorkamen: leere Wannen neben beinahe gefüllten und überlaufenden. Die nachbarliche Lage und die Gleichheit der Umgebung schließen aus, daß es sich dabei um große klimatische Verschiedenheiten handelte. Das Große Becken in seiner Gesamtheit lag beiderseits der Grenze der Abflußlosigkeit. Ausgeschlossen ist daher, daß es voll humid war. Es war teils semiarid bis arid, teils leicht humid, und die Erfüllung seiner einzelnen Wannen mit Wasser kann daher nicht auf eine fundamentale Änderung der Niederschlagsverhältnisse zurückgeführt werden.

Vergegenwärtigen wir uns die Funktionen eines Endsees. Auf seinem Spiegel mit der Fläche S zehrt die Verdunstung (v) nicht bloß den fallenden Niederschlag (n), sondern auch den Abfluß a vom Einzugsgebiet E. Es gilt die Formel:

$$S \cdot v = S \cdot n + E \cdot a .$$

Für einen See mit einem Abfluß der Menge F gilt:

$$S \cdot v + F = S \cdot n + E \cdot a .$$

Setzen wir die Abflußmenge F gleich der Abflußhöhe f bezogen auf den Seespiegel S, so läßt sich die letztere Formel wie folgt schreiben:

$$v + f = n + \frac{E}{S} \cdot a .$$

Für den Lahontansee ist nach Russel $S = 21800$ qkm, $E = 105600$ qkm. Es gilt also die Gleichung:

$$21800\, v = 21800\, n + 105600\, a ,$$

danach

$$(1) \qquad v = n + 4.83\, a .$$

[1] Map of the Pleistocene Lakes of the Basin-and-Range Province and its Significance. Bull. Geolog. Soc. of America XXXIII. 1922. S. 541.

[2] On the Pleistocene History of the Great Basin. Publication No. 352 of the Carnegie Institution of Washington. 1925. S. 51. The Last Glaciation. Amer. Geogr. Soc. Research Series 17. 1928.

Für den Bonnevillesee ist $S = 51200$ qkm; $E = 140000$ qkm, danach

$$v + f = n + 2.73\,a. \tag{2}$$

Für ein beliebiges leeres Becken gilt:

$$v = n + \frac{E}{S}\cdot a. \tag{3}$$

In leeren Becken fehlen die Flüsse. Es ist also $a = 0$. Aber es ist auch die Seefläche $S = 0$. Es ergibt also obige Gleichung keinen bestimmten Wert, und es läßt sich nur das sagen, was auch für den Lahontansee ohne weiteres und wahrscheinlich auch für den Bonnevillesee gilt $v > n$. Der Spiegel des alten Bonnevillesees lag, wenn man von der Deformation seiner Uferlinien absieht, in 1580—90 m Höhe, der des Lahontansees in 1340 m Höhe, also rund 250 m tiefer. Der aus Gleichung (1) sich ergebende Wert der Verdunstung

$$v - n = 4.83\,a$$

ist für den Bonnevillesee aller Wahrscheinlichkeit nach zu groß. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß die Abflußhöhen für die Einzugsgebiete beider Seen nicht gleich groß waren, wir müssen zwischen der des Lahontansees a_l und der des Bonnevillesees a_b unterscheiden. Wenn wir nun den aus Gleichung (1) hergeleiteten Wert von $v - n$ in Gleichung (2) einsetzen und schreiben

$$4.83\,a_l + f = 2.73\,a_b,$$

so ist klar, daß wir für f einen zu kleinen Wert erhalten, wenn wir setzen

$$f = 2.73\,a_b - 4.83\,a_l.$$

Immerhin kann letztere Gleichung zur Orientierung dienen, wenn wir f als sehr klein annehmen. Setzen wir es $= 0$, so ergibt sich

$$a_b = 1.8\,a_l,$$

d. h. die Abflußhöhe im Einflußgebiete des Bonnevillesees war mindestens 1.8mal so groß als die im Einzugsgebiete des Lahontansees. Das erscheint plausibel angesichts der Tatsache, daß der Bonnevillesee namentlich vom Wasatchgebirge gespeist wurde, während der Lahontansee seinen Hauptzufluß von dem Humboldtfluß aus dem großen Becken erhielt, gegen welchen die kleineren Zuflüsse von der Ostseite von der Sierra Nevada zurücktraten.

Am Boden des alten Lahontansees strecken sich heute mehrere einzelne Seen, die das Ende von Flußläufen darstellen. In den Carson Sink fließen der aus dem großen Becken kommende Humboldtfluß und der von der Sierra Nevada kommende Carsonfluß; der erstere passiert zuvor den 50 qkm messenden Humboldtsee und führt diesem im Mittel von 5 Jahren 215 Millionen cbm zu, manchmal endet er hier. Der Carsonfluß hat oberhalb des Carson Sinks eine jährliche Wasserführung von 367 Millionen cbm, die auf seiner 326 qkm messenden Oberfläche sowie auf der des kleinen Carsonsees (21 qkm) verdunsten.

Die Verdunstungsflächen messen also rund 400 qkm, darauf verdunsten jährlich 582 Millionen cbm Flußwasser; danach ergibt sich der gegenwärtige Wert von $v - n$ zu 1455 mm. Die Niederschlagshöhe n im Bereiche des Carson Sinks ist weniger als 125 mm, die gesamte Verdunstungshöhe v auf dem Gebiete der Seen ist also rund 1555 mm. Im Mittel fließt den Seen von dem Einzugsgebiet beider Flüsse (38800 qkm) 15 mm Wasser zu. Wir sehen also, daß ein Gebiet von 15 mm Abflußhöhe heute im wesentlichen leer ist. Eine kleine Pfanne, die rund 1% ihres Einzugsgebietes einnimmt, genügt, um alles zuströmende Wasser zu verdunsten. Nach Gleichung (3) ergibt sich die Verdunstungshöhe

$$v = 1555 = 100 + 97 \cdot 15 \text{ mm}.$$

Diese Gleichung gibt wahrscheinlich nicht die natürlichen Verhältnisse wieder; denn der Humboldtfluß wird unmittelbar, bevor er den Humboldtsee erreicht, in ausgedehntem Maße zur Bewässerung herangezogen, und 1881 sah J. C. Russel den Carson Sink trocken. Das Quadrangle Carson Sink der topographischen Karte 1 : 125000 der Vereinigten Staaten umgibt den Sink und den See noch mit einer weiteren Grenze, wohl der des zeitweilig überfluteten Gebietes. Die eingeschlossene Fläche ist für den Carson Sink 581 qkm, für den Carson Lake 65 qkm; die Größe der Verdunstungsfläche im Endgebiete des Humboldt- und Carsonflusses kann daher einschließlich des Humboldtsees bis auf 700 qkm wachsen. Dann ergibt sich die Verdunstungshöhe, wenn wir den Niederschlag etwas größer als vorhin ansetzen

$$v = 950 = 125 + 55 \cdot 15 \text{ mm},$$

also ein wesentlich geringerer Wert. Wenn wir annehmen, daß die Abflußhöhe bei den Hochständen der Verdunstungspfannen gewiß größer als im Mittel ist, finden sich noch geringere Werte für die Verdunstung auf den Pfannen. Sie schwankt um sehr bedeutende Beträge. Im Mittel nehmen wir einstweilen ihren Wert an zu

$$v = 1250 = 110 + 76 \cdot 15 \text{ mm}.$$

Leider reicht das Beobachtungsmaterial nicht hin, um den Ursachen der sehr großen Schwankungen der Verdunstung auf den Pfannen nachzugehen. Zwar sind wir über die Wasserführung vom Humboldt- und Carsonflusse seit Jahren unterrichtet und kennen auch einiges von den Niederschlags- und Temperaturverhältnissen des Gebietes, aber von den Schwankungen im Flächeninhalt der Verdunstungspfannen wissen wir nichts.

Zwei Möglichkeiten existieren, den Carson Sink in einen Lahontan zu verwandeln: Steigerung der Niederschläge und damit des Abflusses oder Minderung der Verdunstung. Die erstere Möglichkeit ist nur in sehr beschränktem Umfange anwendbar; denn eine Steigerung der Niederschläge müßte sich auch in den südlich benachbarten geschlossenen Becken bemerkbar machen und sie mit Wasser füllen. Das ist nicht geschehen. Hier können also nur geringe Abflußhöhen geherrscht haben. Wie sich die Verhältnisse bei einer Steigerung der Niederschläge ändern, falls sich die Verdunstung nicht ändert,

zeige ein Beispiel. Nehmen wir an, daß der Niederschlag auf dem Lahontan 400 mm betragen habe, so ergibt sich unter Voraussetzung einer Verdunstungshöhe gleich der heutigen nämlich 1555 mm nach Gleichung (1) eine Abflußhöhe von 240 mm. Bei einer solchen oder einer ähnlichen, wenn auch wesentlich geringeren, können die südlich benachbarten Becken nicht leer geblieben sein[1]. Geht man von diesen letzteren aus und nimmt eine Abflußhöhe doppelt oder dreimal so groß an, wie sie heute das leere Carson Sink-Becken hat, nämlich 30 und 45 mm, so erheischt Gleichung (1) für den Lahontan bei einer Verdunstungshöhe von 1555 mm Niederschlagshöhen von 1410 bzw. 1340 mm. Diese aber sind mit so geringen Abflußhöhen unvereinbar. Kein Gebiet mit 1300—1400 mm Niederschlag hat einen Abflußfaktor von nur 7% und ist abflußlos. Die Zahlen werden andere, wenn wir den aus den größten Verdunstungsflächen errechneten Wert für die Verdunstung (950 mm) einsetzen. Wir erhalten dann aus Gleichung (1) bei einer Niederschlagshöhe von 400 mm eine Abflußhöhe von 114 mm, oder bei Annahme von 30 bzw. 45 mm Abflußhöhe bei Niederschlagshöhen von 800 bzw. 730 mm gleichfalls Werte, die unvereinbar mit der Nachbarschaft leerer Becken sind.

Nur unter Annahme einer stark verringerten Verdunstung können wir den Carson Sink in einen Lahontan verwandeln. Die Verdunstung zehrt heute am Humboldtfluß selbst und mindert seine Wassermenge von Palisades bis Oreana beinahe auf die Hälfte; die Abflußhöhe des zugehörigen Einflußgebietes fällt auf $^1/_5$. Nehmen wir die von den Palisades (rund 30 mm) und die hier herrschende Niederschlagshöhe (250 mm) zum Ausgange, so ergibt sich eine Verdunstungshöhe von 395 mm, welche den Bedingungen der Gleichung (1) entspricht, ohne daß zur Annahme einer Mehrung der Niederschläge und der Abflußhöhe gegriffen ist. Als der Lahontansee auf 1340 m angeschwollen war, mußte es kühler sein, der Abflußfaktor daher größer als heute. Setzen wir ihn zu 15%, so war die Abflußhöhe bei Palisades 45 mm. Eine solche würde, allseitig dem Lahontan zukommend, bei einer Verdunstungshöhe von 467 mm samt dem auf den See fallenden Niederschlag aufgezehrt werden. Eine Abflußhöhe von 45 mm im gesamten Einzugsgebiete des Lahontan würde mit dem Vorhandensein von leeren Becken südlich davon gerade noch vereinbar sein; denn sie wäre nur für die wenig ausgedehnten über 1340 m Höhe gelegenen Teile derselben anzunehmen, die beim Lahontan namentlich wegen des Anteils der Sierra Nevada und des Humboldtgebirges an seinem Einzugsgebiete schwerer in die Wage fallen. An eine größere Abflußhöhe dürfen wir im Lahontangebiete wegen seiner leer gebliebenen Nachbarschaft nicht denken. Damit ist aber auch irgendeine größere Niederschlagshöhe für den Lahontan ausgeschlossen, als wir heute in seinem Einzugsgebiete haben. Die Eiszeit erscheint hiernach nicht als eine Periode gesteigerter Niederschläge, sondern lediglich als eine solche geminderter Verdunstung, d. h. geringerer Temperatur. Die Bedingungsgleichung lautet also

$$v \text{ Maximum} = 250 + 45 \cdot 4.83 = 467 \text{ mm}.$$

[1] Über die Abflußhöhen in trockenen Gebieten vgl. Eberhard Reichel, Der Wasserhaushalt des Coloradogebietes. Geogr. Abh. herausgegeben von A. Penck. 2. R. 4. 1928. S. 30. u. T. 3.

Setzen wir den hieraus sich ergebenden Maximalwert von

$$v - n = 217$$

in Gleichung (2) für den Bonneville ein, so ergibt sich

$$217 + f = 2.73\ a\,.$$

Eine Mindestabflußhöhe von 80 mm seines Gebietes würde ihn also zum Überfließen bringen. Eine solche Abflußhöhe erscheint bei den heutigen Niederschlagsverhältnissen des Great Salt Lake-Gebietes gewährleistet. Allein der Bear- und Weber-River sowie der Jordan führen ihm jährlich aus einem Gebiete von 27500 qkm eine 120 mm mächtige Wasserschicht zu, dazu kommen noch die wasserreichen kleinen Flüsse der Gegend von Ogden und Salt Lake City; wir müssen daher mit einer Verdunstungshöhe auf dem Salt Lake von rund 900 mm rechnen — naturgemäß weniger als für den Carson Sink. Das Einzugsgebiet des Bonnevillesees griff allerdings über das des Salt Lake weit hinaus. Aber es streckte sich im wesentlichen am Fuße des Wasatchgebirges, wo heute allgemein über 400 mm, an den höchsten Stellen über 500 mm Niederschlag fallen. Die Abflußhöhe ist hier im Bereiche des Bear-River 125 mm, am Weber-River 179 mm; im Durchschnitt dürfen wir sie zu 120 mm schätzen. Während des Hochstandes des Bonnevillesees war sie gewiß größer; denn das Klima war damals, wie wir im Lahontangebiete erschlossen haben, kühler. Dazu kommt noch etwas weiteres. Die alten Uferlinien des Bonneville sind am Wasatchgebirge viel stärker ausgeprägt als auf der entgegengesetzten Westseite des Sees; auch im einzelnen sind sie an den gegen West exponierten Stellen kräftiger entwickelt als an den gegen Osten gerichteten. Wir müssen daher auf herrschende Westwinde schließen; sie mußten dem Wasatchgebirge vom Großen See reichliche Niederschläge bringen. Aus diesen örtlichen Ursachen war das Gebirge nicht nur kühler. sondern auch feuchter als heute. Seine eiszeitliche Schneegrenze schätzt Machatschek nach Atwoods Untersuchung im Westen auf 2500 m, im Osten auf 2800 m; seine Abflußhöhen dürften an 200 m herangereicht haben. Wenn sein westliches Einzugsgebiet nur 40 mm lieferte, so hatte im Durchschnitt das Bonnevillegebiet eine Abflußhöhe von 120 mm; der See selbst aber nach der Gleichung

$$217 + f = 2.73 \cdot 120$$

eine nahezu ebenso große, nämlich 110 mm. Die gesamte Wasserführung seines Abflusses war über 6 Milliarden cbm im Jahre, rund 200 cbm in der Sekunde: ein Fluß, größer als die Moldau an ihrer Mündung in die Elbe, entströmte bei den gemachten Voraussetzungen dem Bonnevillesee, der so groß war wie ganz Böhmen.

Die hier mitgeteilten Zahlenwerte beanspruchen nicht mehr als den Wert von Schätzungen auf Grund von wahrscheinlichen Voraussetzungen. Aber wie man letztere auch wählen möchte, wir können nur dann verstehen, daß während der Eiszeit leere Becken neben beinahe gefüllten und überlaufenden vorhanden waren, wenn wir annehmen, daß die Niederschlagshöhe im Großen

Becken damals nicht größer war als heute, während die Verdunstungshöhe nicht halb so groß wie heute war. Das setzt niederere Temperatur voraus als gegenwärtig. Zwar ist es klar, daß die Verdunstungshöhe des Lahontan und auch des Bonneville schon wegen der größeren Meereshöhe ihrer Spiegel geringer war als die der ihnen heute entsprechenden Seen. Aber dieser aus den Höhenverhältnissen sich ergebende Unterschied der Verdunstungshöhen kann das Anwachsen der Seen nicht erklären, denn er ist dessen Folge. Wir müssen zur Annahme eines allgemeinen Sinkens der Temperaturen greifen. um das Anschwellen der alten Seen zu erklären und aus deren Schwinden auf eine allgemeine Temperaturerhöhung folgern. Wie groß dieselbe war, vermögen wir aus den stattgehabten Änderungen der Verdunstung nicht zu schließen, da die Abhängigkeit der Verdunstung von der Temperatur zu wenig bekannt ist.

Wir können nur einen Vergleich wagen, indem wir den Blick auf das Meer lenken. G. Wüst[1] hat die hier vonstatten gehende Verdunstung nach Zonen geschätzt. Sie ist zwischen 50° und 60° N 37 cm, zwischen 40° und 50° 66 cm, hier größer, dort geringer als für den Lahontan errechnet. Etwa unter 52° entspricht sie der für den genannten See erhaltenen von 47 cm. Nun ist die Verdunstung auf kleinen Seeflächen immer viel größer als die von der großen Wasserfläche des Ozeans. Die Verdunstung von den Pfannen des Carson Sink und vom Great Salt Lake im Vergleiche mit der Verdunstung auf dem offenen Ozean unter gleicher Breite (78 cm) liefert ein Beispiel dafür. Je größer aber die Binnenseen werden, desto näher kommt ihre Verdunstung der ozeanischen. Die des Lahontan kann daher unmöglich sehr viel größer gewesen sein als die ozeanische unter gleicher Breite. Andrerseits muß sich in umgekehrter Richtung eine Verschiedenheit wegen der großen Seehöhe des Lahontan geltend gemacht haben. Nur unter der unerweisbaren Voraussetzung, daß sich beide konträr wirkende Ursachen gegenseitig gerade aufgehoben hätten, könnten wir sagen, daß zur Zeit des Lahontansees an der kalifornischen Küste unter 40° N eine Verdunstung herrschte, wie sie heute für die Küste von Britisch Columbia unter 52° N anzunehmen ist. Der Temperaturunterschied beider Küsten ist 6°. Er ist größer, als wir die eiszeitliche Temperaturerniedrigung annehmen.

Unser Ergebnis, daß die Eiszeit nicht eine besonders niederschlagsreiche, sondern eine nicht unwesentlich kühlere Periode als heute gewesen ist, steht im Einklang mit dem Ergebnis unserer Untersuchungen in den Alpen. Dort hat sich gezeigt, daß die Firnfelder während der Eiszeit nicht voller gewesen sind als heute[2]. Diese Tatsache hat bereits Eduard Richter erkannt. Deutlich sieht man in den inneren Winkeln des Gebirges, wie die Schliffgrenze der eiszeitlichen Gletscher die heutigen unterhalb der Schneegrenze erreicht. Nur in einem Gletschergebiete der Erde, allerdings dem größten, zeigt sich, daß die Firnansammlungen einmal mächtiger gewesen sind als heute, nämlich am Saume von Antarktika, das in seiner ganzen Ausdehnung über der Schnee-

[1] Die Verdunstung auf dem Meere. Veröffentl. d. Inst. f. Meereskunde Berlin, N. F. A. 46 (1920).

[2] Penck und Brückner, Die Alpen im Eiszeitalter 1909, S. 1142.

grenze liegt. E. v. Drygalski[1] hat hieraus den Schluß gezogen, daß dort die Eiszeit eine niederschlagsreichere Zeit war und diesen Schluß für die Eiszeit verallgemeinert. Daß letzteres nicht zulässig ist, geht aus dem Vorstehenden hervor. Aber auch für Antarktika ist die Schlußfolgerung nicht zwingend, denn es bieten sich noch andere Erklärungen für die unzweifelhaft feststehende Tatsache. Ed. Brückner[2] wies darauf hin, daß bei einer allgemeinen Senkung der Schneegrenze, wie sie für die Eiszeit festgestellt werden muß, auch die theoretisch zu fordernde obere Schneegrenze sich gesenkt habe, an die Antarktika nahe herankomme. Es habe daher der Erdteil zur Eiszeit weniger schneeige Niederschläge gehabt und sei deswegen damals weniger vergletschert gewesen als gegenwärtig. Er kommt wie Scott und Philippi zum Ergebnis, daß bei den eigenartigen klimatischen Verhältnissen der Antarktis ein Steigen der Temperatur eine Vermehrung der Eismassen hervorrufen würde. Danach könnte man die unzweifelhaften Anzeichen eines früheren Gletscherhochstandes in Antarktika z. B. auf eine postglaziale Wärmezeit zurückführen, die im Norden vielfach nachgewiesen worden ist. Es bietet sich aber auch noch eine andere Erklärungsmöglichkeit, auf die ich hingewiesen habe[3]. In Antarktika wird das Gleichgewicht zwischen Schneezufuhr und Eisabfuhr lediglich durch Eisberge hergestellt, die an seinem Saume abbrechen. Letzteres setzt ein bestimmtes Verhältnis zwischen randlicher Eismächtigkeit und Wassertiefe voraus. Nicht nur wenn jene Mächtigkeit sich steigert, sondern auch wenn die Wassertiefe sich mindert, streckt sich der Eisrand weiter äquatorwärts, und wenn dies geschieht, muß seine Mächtigkeit an seiner früheren Lage wachsen. Zur Eiszeit aber lag der Meeresspiegel allenthalben tiefer, weil viel Wasser in den Vergletscherungen ans Land gebunden war. Das antarktische Eis mußte damals allgemein weiter nordwärts reichen als heute, an seinem heutigen Saume also mächtiger sein als gegenwärtig, und mußte in dem Maße seither zurückgehen, als dem Ansteigen des Meeresspiegels entsprach. Deswegen finden wir seinen heutigen Saum von Hochmarken eines früheren Standes umgeben. So vermögen wir den deutlichen Rückgang der antarktischen Vereisung mit dem Rückgange anderer Vergletscherungen in Parallele zu bringen.

Es kann hier nicht der Ort sein, die drei dargelegten Erklärungsmöglichkeiten gegeneinander abzuwägen; es genüge, gezeigt zu haben, daß dieselbe Tatsache in recht verschiedener Weise erklärt werden kann und daß demnach nicht in einer bestimmten Richtung aus ihr Schlußfolgerungen gezogen werden dürfen. Die Marken eines früheren Gletscherhochstandes am Saume Antartikas können so lange, als eine eindeutige Klärung ihrer Ursachen nicht gegeben ist, nicht zum Beweise eines feuchteren Klimas von Antarktika während der Eiszeit, noch gar für ein feuchteres Klima der Eiszeit überhaupt, herangezogen werden. Es bleibt nur eine Möglichkeit, letztere als Kälte-

---

[1] Die Antarktis und ihre Vereisung. Sitzber. Bayer. Akad. der Wissensch. Math. phys. Kl. 1919. Das Eis der Antarktis. Deutsche Südpolar-Expedition 1901/03. Bd. I. T. IV. Geographie. S. 697—701.

[2] Die Schneegrenze in der Antarktis. Zeitschr. Gletscherk. VII 1913, S. 276.

[3] Sitzber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch., Phys. math. Kl. 1927, S. 16.

periode aufzufassen mit Niederschlagsmengen, die keineswegs größer waren als die heutigen.

Das schließt nicht aus, daß die Schneemengen größer waren als gegenwärtig. Wird das Klima kühler, so muß sich der Anteil der schneeigen Niederschläge an den Niederschlägen mehren, und es kann kommen, daß der Schneefall größer wird, während sich die Gesamtsumme der Niederschläge mindert. Daß letztere auch örtlich größer werden können, zeigt uns das Beispiel des Wasatchgebirges. Weiter muß bei einem Kälterwerden des Klimas die Wasserführung der Flüsse bei gleicher Niederschlagsmenge größer werden, weil der Abflußfaktor sich vergrößert, und wiederum ist denkbar, daß gemindertem Niederschlag gesteigerte Flußwassermengen entsprechen. Je größer die Niederschlagsmengen sind, desto mehr wird sich der Einfluß eines Temperatursinkens auf eine Vergrößerung der schneeigen Niederschläge und der Wassermenge der Flüsse geltend machen, desto größer wird die ihr entsprechende Herabdrückung der Schneegrenze werden. Daher geben uns die starken Herabdrückungen der Schneegrenze am Saume der Kontinente einen weniger guten Einblick in die stattgehabten Klimaänderungen als die weniger starken im Innern der Kontinente. Die hier nachweisbaren[1] Lagen der eiszeitlichen Schneegrenzen, 800 m unter den heutigen, sind fast ausschließlich auf Temperaturänderungen zurückzuführen, deren mittleres Maß an 4° C herankommen dürfte.

In den Tropen hat es lange geschienen, als ob die Herabdrückung der eiszeitlichen Schneegrenze wesentlich geringer gewesen sei als in den gemäßigten Breiten. Aber die Untersuchungen am Kilimandscharo durch Fritz Klute[2] haben ergeben, daß hier seit der größten nachweisbaren Ausdehnung des Eises sich die Schneegrenze um rund 900 m gehoben hat. Dieser Betrag steht in guter Übereinstimmung mit dem im Herzen der Kontinente der Nordhemisphäre gewonnenen und läßt auch für die Tropen auf eine eiszeitliche Temperaturerniedrigung von etwa 4° schließen, die hiernach allgemein für die Erde angenommen werden kann. Das bedeutet, daß während der Eiszeit die Mitteltemperatur der Erde nur etwas über 10° gewesen ist. Es ist klar, daß einer solch tieferen Mitteltemperatur eine allgemeine geringere Verdunstungshöhe auf den Meeren und eine geminderte Niederschlagshöhe auf dem Lande entsprach. Daß letztere im Großen Becken (mit Ausnahme des Wasatchgebirges) nicht größer gewesen sein kann, als heute, wurde im vorstehenden zu zeigen versucht, daß sie in den Alpen eher geringer als größer war denn heute, ist vor Jahren gefolgert. Die Eiszeit erscheint daher nicht als eine kühlfeuchte Periode ähnlich den kühlfeuchten Jahren der Brückner-schen Periode, sondern als eine kühle an Niederschlägen etwas ärmere Periode.

Fredrik Enquist[3] hat die allgemeine Herabdrückung der Schneegrenze während der Eiszeit nicht durch ein allgemeineres Kühlerwerden des Klimas,

---

[1] Vgl. hierzu Fritz Machatschek, Die Depression der eiszeitlichen Schneegrenze. Zeitschr. f. Gletscherk. VIII 1914, S. 104. Fritz Klute, Über die Ursachen der letzten Eiszeit. Geogr. Zeitschr. 1921, S. 199.

[2] Ergebnisse der Forschungen am Kilimandscharo 1912, Berlin 1920, S. 131.

[3] Eine Theorie für die Ursache der Eiszeit und die geographischen Konsequenzen derselben. Bull. of the Geolog. Institute of Upsala XIII 1915, S. 35.

sondern durch ein allgemeines Sinken des Meeresspiegels erklärt, das er auf lokale Einsenkungen des Meeresbodens zurückführt. Nehmen wir an, alle theoretischen Bedenken beiseite setzend, ein solches Sinken sei geschehen, so müßten wir dessen Spuren nicht bloß in einer scheinbaren Hebung des Landes und damit verbundener Senkung der Schneegrenze wahrnehmen, sondern auch auf den kleinen ozeanischen Inseln. Wenn sie 600 m mehr aufragten als heute infolge einer entsprechenden Senkung des Meeresspiegels, so waren sie allesamt den Wirkungen einer starken, durch kräftige Niederschläge verursachten Erosion ausgesetzt und könnten heute weder als niedere Koralleninseln noch als Atolle erscheinen. Deren Vorhandensein widerspricht mit anderem der Ansicht von ENQUIST, und wir können die Ursache der Eiszeit nicht in einem Sinken des Meeresspiegels, sondern in einem allgemeinen Sinken der Höhengürtel, infolge einer leichten Temperaturminderung, erblicken.

Wenn ich hier von der Eiszeit spreche, so ist damit nicht das Eiszeitalter verstanden, das auf der Erde in einem Wechsel von Glazial- und Interglazialzeiten bestand, sondern nur eine einzelne Eiszeit, gewöhnlich die letzte, die der Würmeiszeit der Alpen, der Weichseleiszeit Norddeutschlands oder dem Wisconsin Nordamerikas entspricht. Der große Bonnevillesee hat allerdings mutmaßlich einer früheren Eiszeit entsprochen; während der letzteren war er durch den kleinen See der Provo-Uferlinie ersetzt gewesen. Doch wurde hier auf diese mögliche Altersverschiedenheit nicht Gewicht gelegt; für die Auffassung des eiszeitlichen Klimas als feuchter Periode liegen die Verhältnisse für das Bonnevillestadium günstiger als für das Provostadium, während dessen der See nicht viel kleiner war. Gerade weil wir auch für den ungünstig liegenden Fall dartun konnten, daß das eiszeitliche Klima ein kühleres war als das heutige, fühlen wir uns in dieser Folgerung bestärkt.

Waren die Glazialzeiten die kühleren, die Interglazialzeiten die wärmeren Epochen des Eiszeitalters, so mußten die letzteren ebenso mit einer Steigerung der Niederschlagsmengen verbunden sein, wie die ersteren mit einer stellenweise klar entgegentretenden Minderung derselben. Es gibt Anzeichen in Europa, die Interglazialzeiten für wärmere und feuchtere Zeiten zu halten und nicht wie bisher geschehen für wärmere und trockenere.

Ausgegeben am 5. Mai.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

VII. Gesamtsitzung. 1. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Haber trug eine von ihm und K. F. Bonhoeffer herrührende Untersuchung vor: »Über Benutzung der Bandenspektroskopie zur Deutung der Vorgänge in Flammen«.

Für die Wasserstoffflamme wird das darin auftretende spektroskopisch erwiesene freie Radikal Hydroxyl als bestimmendes Glied des Reaktionsmechanismus angesprochen. Außerdem wird der durch die terrestrischen Sauerstoffbanden gekennzeichnete Anregungszustand des Sauerstoffs als aktiver Zustand dieses Reaktionspartners gedeutet. Für die Kohlenwasserstoffflammen sind die Bandenträger Dicarbon und Methin kennzeichnend, deren Bildungs- und Umsetzungswärmen sich näherungsweise angeben lassen. Danach ist anzunehmen, daß in schrittweisem exothermen Umsatz mit Hydroxyl Dicarbon in Kohlenoxyd und Methin, Methin in Kohlenoxyd und Wasserstoffmoleküle und Kohlenoxyd in Kohlensäure und Wasserstoffatome übergehen können. Die Unmöglichkeit, Wasserstoff und Kohlenwasserstoffe im freien Gasraum getrennt zu verbrennen, und ferner das besonders hohe Leitvermögen des Innenkegels finden auf dem mitgeteilten Boden naheliegende Deutung.

2. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Dr. K. Dörge in Köln vor: Über den Fundamentalsatz der Algebra.

Nach Kronecker und Steinitz ist es leicht, den Körper der komplexen Zahlen so zu erweitern, daß eine gegebene algebraische Gleichung Lösungen besitzt, die dem Erweiterungskörper angehören. Der Verfasser zeigt, wie man hieraus in wenigen Zeilen den Fundamentalsatz der Algebra erschließen kann.

3. Hr. Schmidt legte eine Arbeit von Hrn. Prof. Dr. A. Fraenkel in Marburg (Lahn) vor »Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen«.

Der Satz, daß jede Menge sich wohlordnen läßt, und das Auswahlaxiom folgen bekanntlich wechselseitig auseinander. Die Unabhängigkeit des letzteren von den übrigen Prinzipien der Mengenlehre ist von dem Verfasser in einer früheren Arbeit durch ein Beispiel festgestellt worden. Nunmehr zeigt der Verfasser, daß sich aus seinem Beispiel noch mehr ablesen läßt: nämlich die von den übrigen Prinzipien der Mengenlehre bestehende Unabhängigkeit sogar schon des Satzes, daß jede Menge sich einfach ordnen läßt.

4. Hr. Hesse überreichte die 8. Lieferung des Nomenclator animalium generum et subgenerum (Berlin 1928),

5. Hr. Engler das 91. und 92. Heft des Werkes »Das Pflanzenreich«: »*Malpighiaceae*« pars I, von Franz Niedenzu und »*Taccaceae*« von W. Limpricht (Leipzig 1928).

6. Vorgelegt wurde endlich das Werk von Henry A. Sanders und Carl Schmidt »The Minor Prophets in the Freer Collection and the Berlin fragment of Genesis« (New York 1927) und »Facsimile of the Washington manuscript of the Minor Prophets in the Freer Collection and the Berlin fragment of Genesis«, with an introduction by Henry A. Sanders (Ann Arbor, Michigan, 1927).

Über den Fundamentalsatz der Algebra.

Von Dr. Karl Dörge
in Köln.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Wie viele bekannte Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra schließt sich der vorliegende an den zweiten Gaussschen Beweis von 1816 an[1]. Diese Beweise, deren bekannteste von Gordan und von Mertens herrühren, führen Gleichungen vom Grade $2^{\nu}u$ (u ungerade) zurück auf Gleichungen vom Grade $2^{\nu-1}u'$ (u' ungerade). In der Art dieser Zurückführung besteht ihr wesentlicher Unterschied.

Im folgenden zeigt es sich, daß diese Zurückführung sehr einfach wird, wenn man folgenden Satz von Steinitz[2] verwendet: Ist K ein Körper, $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus K, so kann man K durch Hinzunahme abstrakt definierter Elemente so zu einem Körper K^* erweitern, daß $f(x)$ in K^* in Linearfaktoren zerfällt[3]. Da der Beweis dieses grundlegenden Satzes außerordentlich einfach ist und dieser Satz ebenso wie der Fundamentalsatz der Algebra der Körpertheorie angehört, halte ich seine Verwendung und die sich damit ergebenden Beweise für der Natur des Fundamentalsatzes der Algebra angemessen.

Es ist zu zeigen: Jede Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_ν hat im Körper der komplexen Zahlen eine Wurzel. Wir nehmen, wie es bekanntlich erlaubt ist, dabei an, daß die a_ν reell sind und $a_0 = 1$ ist. Ferner setzen wir den Satz für $n = 2$ als bekannt voraus. Ist n ungerade, so hat der Wert des Polynoms für große reelle positive Werte x einerseits und für große reelle negative Werte x anderer-

[1] Anmerkung bei der Korrektur: E. Noether hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß die Arbeit von Artin und Schreier, Algebraische Konstruktion reeller Körper (Abh. aus dem Mathem. Seminar der Hamburgischen Univ. Bd. V, S. 88) bereits einen dem vorliegenden verwandten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra enthält. Den Gedanken, daß durch Heranziehung von Erweiterungskörpern gewisse Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra abgekürzt werden können, hat A. Kneser bereits 1886 geäußert. Vgl. Crelles Journal Bd. 102.

[2] Crelles Journal Bd. 137, S. 206. Vgl. auch O. Perron, Algebra Bd I, S. 256.

[3] Auch die übrigen sich an den zweiten Gaussschen Beweis anschließenden Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra werden durch Verwendung des Steinitzschen Satzes sehr vereinfacht.

seits verschiedenes Vorzeichen. Nach dem Satz von ROLLE über stetige Funktionen folgt daraus: Es gibt eine reelle Zahl, die die Gleichung $f(x) = 0$ löst. Wenn daher der Grad n der Gleichung nur durch 2^0, aber nicht durch 2^1 teilbar ist, ist die Behauptung bewiesen. Wir nehmen nun an, wir wüßten bereits, daß jede normierte Gleichung mit reellen Koeffizienten, deren Grad durch $2^{\nu-1}$, aber nicht durch 2^ν teilbar ist, im Körper der komplexen Zahlen eine Wurzel hat. Wir zeigen: Dann gilt dasselbe für alle normierten Gleichungen mit reellen Koeffizienten, deren Grad durch 2^ν, aber nicht durch $2^{\nu+1}$ teilbar ist. Mit diesem Nachweis ist dann der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen.

Der Grad n des Polynoms

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

mit reellen Koeffizienten sei also von der Form $2^\nu u$, unter u eine ungerade Zahl verstanden. Nach dem STEINITZschen Satz kann man dann den Körper K der komplexen Zahlen durch Hinzunahme abstrakt definierter Elemente zu einem Körper K^* erweitern, in welchem $f(x)$ in Linearfaktoren zerfällt. Diese Zerfällung sei etwa

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Unter y und h verstehe man Unbestimmte und setze

$$F(y, h) = \prod [y - (\alpha_\varkappa + h)(\alpha_\lambda + h)],$$

wobei über alle $\binom{n}{2}$ Systeme von je zwei Wurzeln $\alpha_\varkappa$, α_λ multipliziert wird.

$F(y, h)$ ist dann eine ganze rationale Funktion von y und h. Die Koeffizienten sind ganze rationale symmetrische Funktionen der $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, daher Polynome von $a_1, a_2, \cdots, a_n$ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Die Koeffizienten von $F(y, h)$ sind daher reelle Zahlen. Der Grad von $F(y, h)$ in y ist

$$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2},$$

daher durch $2^{\nu-1}$, aber nicht durch 2^ν teilbar.

Für ein festes reelles h ist die Gleichung

$$F(y, h) = 0,$$

mithin nach unserer Annahme im Körper K der komplexen Zahlen lösbar. Das aber bedeutet: Für jedes reelle h muß mindestens eines der $\binom{n}{2}$ Produkte

$$(\alpha_\varkappa + h)(\alpha_\lambda + h) \tag{1}$$

gleich einer komplexen Zahl werden. Wählt man nun für h irgendwelche $\binom{n}{2}+1$ verschiedene reelle Werte aus, so muß es unter den $\binom{n}{2}$ Produkten (1) mindestens eins geben, welches zugleich für zwei der Zahlen h einen komplexen Wert annimmt. Dann aber müssen die Koeffizienten dieses quadratischen Polynoms in h komplexe Zahlen sein. $f(x)$ enthält daher im Körper der komplexen Zahlen einen Faktor zweiten Grades. Wie von uns als bekannt angenommen, hat dieser aber eine komplexe Wurzel. Diese ist zugleich Wurzel von $f(x)$, w. z. b. w.

Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen.

Von Prof. Dr. A. Fraenkel
in Marburg (Lahn).

(Vorgelegt von Hrn. Schmidt.)

Der vor mehreren Jahren von mir gegebene[1] Beweis für die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von den übrigen Prinzipien der Mengenlehre (und damit der Mathematik überhaupt) liefert noch etwas mehr, als in dieser allgemeinen Formulierung steckt. Man hat nämlich öfters die weitgehende Aussage des Auswahlaxioms (d. h. das Nichtverschwinden der Verbindungsmenge $\mathfrak{P}M$, wo $M = \{A, B, C, \cdots\}$ eine unendliche Menge von nichtverschwindenden fremden Mengen A, B, C, $\cdots$ bedeutet) in der Weise zu mildern oder aufzuteilen versucht, daß man über die Mächtigkeit der Menge M wie auch ihrer Elemente spezialisierende Annahmen machte. Der angeführte Unabhängigkeitsbeweis gilt nun sogar für die einfachste überhaupt mögliche Spezialisierung dieser Art, nämlich für den Fall, wo M abzählbar und die Elemente von M lauter Paare sind. Diese Tatsache gestattet eine nachstehend anzugebende Anwendung, und zwar wird genauer dabei nur der Umstand benutzt, daß die Elemente von M sämtlich endliche Mengen sind.

Die Frage, ob jede Menge M einer Ordnung fähig ist, lautet in schärferer Formulierung so: Gibt es unter den Teilmengen der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ wenigstens eine von den charakteristischen Eigenschaften[2], die einer »M ordnenden Menge« zukommen?

Wenn man nicht einfach auf die spezielle Beantwortung dieser Frage verweist, die im Wohlordnungssatz liegt, d. h. wenn man nicht von vornherein das Auswahlaxiom voraussetzt, so sind folgende drei Möglichkeiten offen, zwischen denen eine Entscheidung bisher ausstand:

a) Die Ordnungsfähigkeit (*OF*) läßt sich auch bei Verzicht aufs Auswahlaxiom aus den übrigen Axiomen der (allgemeinen) Mengenlehre herleiten, ist also von diesen abhängig.

b) Die *OF* ist der Wohlordnungsfähigkeit gleichwertig, d. h. aus der Annahme der *OF* läßt sich u. a. das Auswahlaxiom herleiten.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1922, S. 253—257.

[2] Hessenberg, Grundbegr. d. Mengenlehre (1906), §§ 122 ff.; Zermelo, Math. Ann. **65** (1908), S. 110; Kuratowski, Fundam. Math. **2** (1920), S. 161; Fraenkel, Journ. f. Math. **155** (1926), S. 135. Die letztere Arbeit wird nachstehend mit (U) zitiert.

c) Die *OF* ist zwar unabhängig von den übrigen Axiomen, reicht aber nicht hin zum Beweis des Auswahlaxioms; man kann die *OF* somit als eine wesentliche Spezialisierung des Auswahlaxioms betrachten.

Die Möglichkeit b) ist übrigens schon deshalb sehr unwahrscheinlich, weil ja auch bei geordneten Mengen wie dem Linearkontinuum die Wohlordnung noch so großen Schwierigkeiten begegnet.

Auf Grund der eingangs genannten Tatsachen läßt sich nun höchst einfach die Möglichkeit a) ausschließen. In der Tat sei $A = \{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$ die von mir a. a. O. (S. 254f.) eingeführte abzählbar unendliche Menge von Paaren; von der dortigen Betrachtung wird lediglich vorausgesetzt, daß das Verschwinden der Verbindungsmenge $\mathfrak{P}A$ beweisbar ist, falls man ohne Auswahlaxiom und nur mit den übrigen Axiomen der Mengenlehre arbeitet. Es werde nun die Annahme der *OF* zugrunde gelegt; dann läßt sich insbesondere die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}A$ ordnen, die übrigens ohne Auswahlaxiom nicht als abzählbar nachzuweisen ist. Eine beliebige, von nun an festzuhaltende Ordnung von $\mathfrak{S}A$ ordnet gleichzeitig alle Teilmengen (vgl. (U), S. 142f.), namentlich also auch all die Paare A_k, und jedes Paar erhält dabei ein erstes Element, da dies für jede der beiden möglichen Ordnungen $\{\{a, b\}, \{a\}, o\}$ und $\{\{a, b\}, \{b\}, o\}$ eines Paares $\{a, b\}$ zutrifft. Nach dem Axiom der Aussonderung (vgl. (U), S. 133) existiert dann die Teilmenge S_o von $\mathfrak{S}A$, die aus jedem Paar das erste Element enthält; das geht aus den Nrn. 18 und 26 von (U) durch eine ganz einfache Überlegung hervor. S_o ist aber eine Auswahlmenge von A, d. h. Element von $\mathfrak{P}A$; $\mathfrak{P}A$ ist also von o verschieden.

Aus der *OF* folgt somit die Existenz einer Auswahlmenge von A, die auf Grund der übrigen Prinzipien (ohne Auswahlaxiom) noch nicht vorhanden ist. Übrigens gilt dasselbe für jede Menge M, deren Elemente $A, B, C, \cdots$ lauter endliche fremde Mengen sind; denn da jede Ordnung einer endlichen Menge eine Wohlordnung ist, wie sich bei geeigneter Definition der Endlichkeit ohne Auswahlaxiom zeigen läßt, so kann man stets die ersten Elemente der durch eine Ordnung von $\mathfrak{S}M$ simultan geordneten Elemente von M nach dem Aussonderungsaxiom vereinigen[1]. Die *OF* ist also unabhängig von den übrigen Prinzipien, und es bleibt nur mehr offen, ob die *OF* (bzw. gar schon die aus ihr folgende Spezialisierung des Auswahlaxioms auf den Fall, wo die Elemente der Ausgangsmenge M endlich sind) etwa mit dem allgemeinen Auswahlaxiom gleichwertig ist oder nicht.

[1] Vgl. die von Tarski, Fundam. Math. **6** (1925), S. 82 mitgeteilte Bemerkung Kuratowskis.

Ausgegeben am 5. Mai.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

VIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 8. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Correns sprach über Selbststerilität bei den höheren Pflanzen. (Ersch. später.)

Es wurden neue Versuche über die Vererbung der Hemmungsstoffe in Narbe und Griffel mit der Crucifere *Arabis albida* angestellt. Sie gaben Resultate, die im wesentlichen zu denen stimmten, die früher mit *Cardamine pratensis* erhalten worden waren. Es ist deshalb von dem in neuerer Zeit durch East, Lehmann und Filzer aufgeklärten Tubifloren-Typus der Selbststerilität (bei *Nicotiana, Veronica, Antirrhinum, Verbascum*) ein zweiter, wesentlich verschiedener Cruciferen-Typus zu unterscheiden, mit *Cardamine* und *Arabis*.

Ausgegeben am 5. Mai.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Heymann sprach über das wissenschaftliche Eigentum.

Der Gedanke, die reine wissenschaftliche Entdeckung im Gegensatze zu der technisch verwertbaren Erfindung rechtlich zu schützen und insbesondere dem Entdecker einer prinzipiellen Erkenntnis einen finanziellen Anteil an späteren auf der Grundlage seiner Entdeckung beruhenden Erfindungen zu gewähren, ist schon seit langer Zeit im Zusammenhange mit der Entstehung unserer Patentgesetzgebung erörtert worden. Seitdem in Frankreich das sog. droit de suite für den Künstler, dessen Werk bei späteren Weiterveräußerungen im Preise steigt, eingeführt worden ist, wurde der Entdeckerschutz als sog. propriété scientifique unter Hinweis auf die Gewinne der Industrie und der Erfinder namentlich von französischer Seite gefordert. An die für die französische Gesetzgebung bestimmten Entwürfe Barthelémys und der Confédération des travailleurs intellectuels reihte sich 1923 der im Auftrage des Völkerbundskomitees für geistige Zusammenarbeit hergestellte Entwurf des Italieners Ruffini. Die vom Völkerbunde darüber befragten Staaten haben ganz überwiegend den Gedanken abgelehnt oder, wie auch Deutschland, schwere Bedenken geäußert. Dem jetzt von einem internationalen Komitee im Anschluß an das Pariser Institut für geistige Zusammenarbeit hergestellten neuen Vorentwurf stehen ähnliche Bedenken gegenüber wie dem Ruffinischen. Der neue Vorentwurf ist abzulehnen, weil er infolge der Unübersehbarkeit der einer Erfindung zugrunde liegenden wissenschaftlichen Erkenntnisse die Tätigkeit der Erfinder und der Industrie lähmt, unser ganzes Patentwesen untergräbt und zugleich den Gedanken reiner, von allen praktischen Zielen losgelöster Forschung, namentlich auch bei dem wissenschaftlichen Nachwuchs, gefährdet.

2. Hr. Stutz überreichte das 104. Heft der von ihm herausgegebenen kirchenrechtlichen Abhandlungen: P. Philipp Hofmeister, Mitra und Stab der wirklichen Prälaten ohne bischöflichen Charakter (Stuttgart 1928).

3. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt:

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse

500 ℛℳ für die Fertigstellung der mathematischen Bibliographie des verstorbenen Direktors an der Preußischen Staatsbibliothek Dr. Valentin durch Hrn. Prof. Dr. Schoenflies,

500 ℛℳ für das »Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik«;

durch ihre philosophisch-historische Klasse:

3000 ℛℳ für die Deckung der Unkosten bei der Bearbeitung des Rheinischen Wörterbuches,

300 ℛ𝒩 für die Bearbeitung des Index zum Decretum Bonizonis,

400 ℛ𝒩 als Druckzuschuß für das Savigny-Buch des Hrn. Prof. Dr. Stoll in Kassel.

Die Akademie hat das auswärtige Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Wilhelm von Branca in München am 12. März durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 5. Mai.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

X. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 22. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Schur las Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe.

Für die Gruppe aller linearen homogenen Substitutionen in n Veränderlichen von nicht verschwindender Determinante und einige hiermit verwandte Gruppen werden sämtliche stetige Darstellungen durch lineare homogene Substitutionen in beliebig vielen Veränderlichen genau bestimmt.

2. Hr. Schur legte eine Note von Hrn. Prof. Dr. G. Pólya in Zürich vor: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül.

Jede Matrix $E(x)$, deren Elemente $f_{\lambda\mu}$ stetige Funktionen der reellen Variabeln x sind und die der Funktionalgleichung $E(x)\,E(y) = E(x+y)$ genügt, hat die Eigenschaft, daß die $f_{\lambda\mu}$ sich in einfacher Weise aus Polynomen und Exponentialfunktionen zusammensetzen.

3. Hr. Erhard Schmidt legte eine Arbeit von Hrn. Prof. Dr. E. Kamke in Tübingen über »Verallgemeinerungen des Jordanschen Kurvensatzes und stetige Winkelfunktionen« vor. (Ersch. später.)

Unter konsequenter Benutzung des Begriffs der stetigen Winkelfunktion wird bewiesen, daß die Vereinigungsmenge zweier einfach zusammenhängender Kontinua ein einfach bzw. zweifach zusammenhängendes Kontinuum ist, je nachdem ihr Durchschnitt eine einzige zusammenhängende Menge ist oder aus genau zwei elementefremden Kontinuen besteht.

Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül.

Von Prof. Dr. G. Pólya
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Schur.)

Es seien die m^2 Funktionen $f_{\lambda\mu}(x)$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots m)$ für alle reellen Werte der Variablen x definiert (aber nicht notwendigerweise reellwertig). Wir bilden die Matrix

$$E(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \ldots & f_{1m}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ f_{m1}(x) & \ldots & f_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

und betrachten die Funktionalgleichung

$$E(x)\,E(y) = E(x+y), \tag{1}$$

die für alle reellen Wertsysteme x, y gültig sein soll. Ich will den folgenden Satz beweisen:

Wenn

(I) $|E(x)| \neq 0$ *für mindestens einen Wert von* x *und*

(II) $E(x)$ *stetig ist für mindestens einen Wert von* x,

so sind alle Elemente der Matrix $E(x)$, *die* (1) *erfüllt, von der Form*

$$P_1(x)\,e^{a_1 x} + P_2(x)\,e^{a_2 x} + \ldots + P_l(x)\,e^{a_l x},$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_l$ *Konstanten und* $P_1(x), P_2(x), \ldots P_l(x)$ *Polynome bedeuten.*

Die Bedingung (II) ist so zu verstehen, daß alle m^2 Elemente $f_{\lambda\mu}(x)$ von $E(x)$ mindestens einen gemeinsamen Stetigkeitspunkt besitzen. Die Voraussetzungen (I), (II) ließen sich verschiedentlich reduzieren; ich will darauf nicht eingehen, denn so weit reduzierte Bedingungen, wie sie im Falle der verwandten Funktionalgleichung $f(x)+f(y)=f(x+y)$ bekannt sind, scheinen der hier zu verwendenden Methode nicht erreichbar[1]. — Zur Behauptung kann man noch folgendes hinzufügen: Werden $P_1(x), \ldots P_l(x)$ als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt und ihre Grade mit $n_1, \ldots n_l$ bezeichnet $(n_1 \geqq 0, \ldots n_l \geqq 0)$, so ist

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_l \leq m - l.$$

[1] Weiter führt eine Methode, die von Hrn. Schur in der nachfolgenden Abhandlung entwickelt wird.

Ein Beispiel einer Lösung von (1) mit $l = 1$, $n_1 = n = m - 1$ sei hier angeführt:

$$E(x) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots 0 \\ x, & 1, & 0, & \dots 0 \\ x^2, & 2x, & 1, & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n, & \binom{n}{1} x^{n-1}, & \binom{n}{2} x^{n-2}, & \dots 1 \end{pmatrix}.$$

1. Es sei gemäß Voraussetzung (I) angenommen, daß

$$|E(a)| \neq 0$$

ist. Es folgt aus (1)

$$|E(x)|\,|E(a-x)| = |E(a)|,$$

und somit ist

$$|E(x)| \neq 0 \tag{2}$$

für alle Werte von x.

Es sei gemäß Voraussetzung (II) angenommen, daß $E(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig ist. Aus (1) folgt

$$E(x+h) - E(x) = E(x-a)\,\big(E(a+h) - E(a)\big), \tag{3}$$

und hieraus schließt man für $h \to 0$, daß $E(x)$ für alle Werte von x stetig ist.

Der zu beweisende Satz wäre selbstverständlich, wenn wir an Stelle von (I) und (II) die folgende Voraussetzung hätten:

(III) *$E(x)$ ist differenzierbar für mindestens einen Wert von x.*

Denn angenommen, daß $E(x)$ an der Stelle $x = a$ differenzierbar ist, folgt aus (3) nach Division mit h, $h \neq 0$, für $h \to 0$, daß $E(x)$ für alle Werte von x differenzierbar ist und daß

$$E'(x) = E(x)\;E(-a)\;E'(a). \tag{4}$$

Nun besagt (4) das Bestehen von m^2 Gleichungen der Form

$$f'_{\lambda\mu} = a_{1\mu}\, f_{\lambda 1} + a_{2\mu}\, f_{\lambda 2} + \dots + a_{m\mu}\, f_{\lambda m}$$

mit konstanten $a_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \dots m)$, also das Bestehen von m Systemen von je m linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten für $f_{\lambda 1}, f_{\lambda 2}, \dots f_{\lambda m}$ $(\lambda = 1, 2, \dots m)$, woraus die Behauptung auf Grund von geläufigen Sätzen folgt (ebenso wie die weitere Behauptung, die die Grade der Polynome $P_1, \dots P_l$ betrifft).

Die eigentliche Aufgabe besteht also darin, aus (I), (II) und (1) die Differenzierbarkeit aller Funktionen $f_{\lambda u}(x)$ in einem Punkte zu erschließen[1].

---

[1] Es handelt sich eigentlich um den einfachsten Spezialfall eines allgemeinen Satzes. Vgl. J. v. Neumann. diese Sitzungsberichte, 1927, S. 76—90, insbesondere Behauptung b). S. 78.

Es empfiehlt sich dabei, den Punkt $x = 0$ auszuzeichnen. Es ist nämlich nach (1)

$$E(x)\ E(0) = E(x),$$

woraus nach (2)

$$E(0) = I \tag{5}$$

folgt, oder ausführlicher geschrieben

$$f_{\lambda\lambda}(0) = 1,\ f_{\lambda\mu}(0) = 0\ (\lambda \neq \mu;\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots m). \tag{6}$$

2. Die Determinante von m^2 Größen $a_{\mu\lambda}$ ist eine stetige Funktion der m^2 Variablen $a_{\mu\lambda}$ und eine homogene Funktion von $a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \ldots a_{\lambda m}$; sie ist $= 1$, wenn $a_{\lambda\lambda} = 1$ und $a_{\lambda\mu} = 0$ ausfällt $(\lambda \neq \mu;\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots m)$. Daher *gibt es eine positive (nur von m abhängige) Zahl* ε, *so beschaffen, daß die Determinante der* $a_{\lambda\mu}$ *nicht verschwindet, sobald*

$$|a_{\lambda\mu}| < \varepsilon |a_{\lambda\lambda}|\ (\lambda \neq \mu;\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots m;\ m \geq 2). \tag{7}$$

(Es ist leicht zu sehen, aber hier unwesentlich, daß $\varepsilon = \frac{1}{m-1}$ gesetzt werden kann und daß dieser Wert von ε der größte Wert ist, für welchen der ausgesprochene Satz bestehen bleibt.)

$E(x)$ ist, wie unter Nr. 1 festgestellt, stetig. Somit gibt es, wegen (6), eine Größe δ, $\delta > 0$, so beschaffen, daß

$$|f_{\lambda\mu}(x)| < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},\ |f_{\lambda\lambda}(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

für $0 \leq x \leq \delta$, $\lambda \neq \mu$ und $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots m$. Hieraus folgt

$$\left|\int_0^\delta f_{\lambda\mu}(x)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon\delta}{1+\varepsilon},\ \left|\int_0^\delta f_{\lambda\lambda}(x)\,dx\right| > \delta - \frac{\varepsilon\delta}{1+\varepsilon}$$

und schließlich

$$\left|\int_0^\delta f_{\lambda\mu}(x)\,dx\right| < \varepsilon \left|\int_0^\delta f_{\lambda\lambda}(x)\,dx\right|.$$

Somit folgt aus dem Erfülltsein der Bedingung (7)

$$\left|\int_0^\delta E(x)\,dx\right| \neq 0. \tag{8}$$

3. Der Deutlichkeit halber formuliere ich den folgenden evidenten Hilfssatz: *Es seien* $A(h), B(h), C(h)$ *von dem Parameter* h *abhängige Matrizen. Aus*

$$A(h)\,B(h) = C(h)\,,\ \lim_{h\to 0} B(h) = B\,,\ \lim_{h\to 0} C(h) = C$$

und

$$|B| \neq 0$$

folgt die Existenz von $\lim_{h\to 0} A(h)$.

4. Man erhält aus (1) die »Summenformel der geometrischen Reihe«

$$(9)\quad (E(h)-E(0))\{E(0)+E(h)+\ldots+E((n-1)h)\} = E(nh)-E(0)\,.$$

Es sei nun $0<h<\delta$ und n so gewählt, daß

$$(10)\qquad (n-1)h<\delta\leqq nh\,.$$

Es folgt aus (9) und (10) auf Grund der Stetigkeit von $E(x)$, daß einerseits

$$(11)\quad \lim_{h\to+0}\frac{E(h)-E(0)}{h}\cdot h\{E(0)+E(h)+\ldots+E((n-1)h)\} = E(\delta)-E(0)\,,$$

und anderseits

$$(12)\qquad \lim_{h\to+0} h\{E(0)+E(h)+\ldots+E((n-1)h)\} = \int_0^{\delta} E(x)\,dx$$

ist. Mit Rücksicht auf (8) folgt also aus (11) und (12) (vgl. den Hilfssatz in Nr. 3), daß

$$(13)\qquad \lim_{h\to+0}\frac{E(h)-E(0)}{h}$$

existiert. Es ist aber nach (1)

$$\frac{E(-h)-E(0)}{-h} = \frac{E(h)-E(0)}{h}\,E(-h)\,;$$

hieraus schließt man, auf Grund von (5) und der Stetigkeit von $E(x)$, daß der Grenzwert (13) unverändert existiert, wenn $h\to+0$ mit $h\to-0$ vertauscht wird. So haben wir aus der Stetigkeit von $E(x)$ mittels Integration (12) auf die Differenzierbarkeit von $E(x)$ geschlossen.

Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe.

Von I. Schur.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen (Matrizen) soll im folgenden als *unzerfällbar* bezeichnet werden, wenn es nicht möglich ist, $\mathfrak{G}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation P auf die Form

$$P\mathfrak{G}P^{-1}=\begin{pmatrix}\mathfrak{G}_1 & 0\\ 0 & \mathfrak{G}_2\end{pmatrix}$$

zu bringen. Man erkennt leicht, daß $\mathfrak{G}$ dann und nur dann unzerfällbar ist, wenn jede mit allen Substitutionen von $\mathfrak{G}$ vertauschbare Substitution nur eine charakteristische Wurzel besitzt. Ist insbesondere $\mathfrak{G}$ kommutativ, so ist notwendig (aber nicht hinreichend), daß keine Substitution von $\mathfrak{G}$ zwei verschiedene charakteristische Wurzeln aufweise.

Irreduzibel heißt die Gruppe $\mathfrak{G}$ wie üblich, wenn es auch keine Ähnlichkeitstransformation Q gibt, durch die $\mathfrak{G}$ auf die Form

$$Q\mathfrak{G}Q^{-1}=\begin{pmatrix}\mathfrak{G}_1 & 0\\ \mathfrak{G}_3 & \mathfrak{G}_2\end{pmatrix}$$

gebracht werden kann. Eine irreduzible Gruppe ist also stets unzerfällbar, das Umgekehrte ist bekanntlich nicht immer der Fall.

Handelt es sich darum, alle Darstellungen einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ durch lineare Substitutionen, d. h. alle mit $\mathfrak{H}$ homomorphen Gruppen $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen zu bestimmen, so genügt es offenbar, alle unzerfällbaren Darstellungen $\mathfrak{G}$ zu kennen. Das gilt auch dann, wenn diese Darstellungen einer weiteren Forderung unterworfen werden, die bei Ähnlichkeitstransformationen ihr Wesen nicht ändert; also insbesondere dann, wenn Stetigkeit in bezug auf in $\mathfrak{H}$ vorkommende Parameter verlangt wird.

In dieser Arbeit soll für folgende Gruppen die Gesamtheit aller stetigen Darstellungen untersucht und genau gekennzeichnet werden:

1. Die Gruppe $\mathfrak{K}_n$ aller linearen homogenen Substitutionen $A=(a_{\varkappa\lambda})$ in n Veränderlichen mit beliebigen komplexen Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ und nicht verschwindenden Determinanten.

2. Die Untergruppe $\mathfrak{R}_n$ von $\mathfrak{K}_n$, die aus allen *reellen* Substitutionen A besteht.

3. Die Untergruppe $\mathfrak{U}_n$ von $\mathfrak{K}_n$, die alle *unimodularen* Substitutionen, d. h. alle Substitutionen von der Determinante 1 mit beliebigen komplexen Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ umfaßt.

4. Die durch alle reellen unimodularen Substitutionen gebildete Untergruppe $\mathfrak{V}_n$ von $\mathfrak{U}_n$.

Ist $\mathfrak{H}$ eine dieser vier Gruppen und $\mathfrak{G}$ eine stetige Darstellung in N Veränderlichen, so wird jeder Substitution A von $\mathfrak{H}$ eine Substitution $T(A) = (c_{\varrho\sigma})$ zugeordnet. Hierbei wird verlangt, daß die N^2 Koeffizienten $c_{\varrho\sigma}$ stetige Funktionen aller komplexen oder aller reellen Variabeln $a_{\varkappa\lambda}$ (unter der Nebenbedingung $|a_{\varkappa\lambda}| \neq 0$, bzw. $|a_{\varkappa\lambda}| = 1$) seien, und daß für je zwei Elemente A, B von $\mathfrak{H}$

$$T(A)\ T(B) = T(AB)$$

wird. Die Aufgabe wird in der Weise gelöst werden, daß in allen vier Fällen eine genaue Übersicht über alle stetigen *unzerfällbaren* Darstellungen gewonnen wird.

In der Literatur finden sich nur Teilergebnisse. Die sämtlichen ganzen rationalen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{K}_n$ habe ich in meiner Dissertation[1] bestimmt. Sie werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt; von Wichtigkeit ist für uns insbesondere die Tatsache, daß jede solche Darstellung von $\mathfrak{K}_n$ *vollständig reduzibel* ist, was für eine beliebige stetige Darstellung bekanntlich nicht mehr zutrifft[2]. Das hier gewonnene Ergebnis über die Gruppe $\mathfrak{V}_n$ (Satz XIII) stimmt mit dem von Hrn. WEYL auf anderem Wege und auf Grund weitergehender Voraussetzungen[3] bewiesenen Satze. Schon bei der Gruppe $\mathfrak{U}_n$ kommen zu den rationalen Darstellungen noch die *semirationalen* hinzu, bei denen die $c_{\varrho\sigma}$ nur rationale Funktionen der Real- und Imaginärteile der der $a_{\varkappa\lambda}$ sind (vgl. Satz XIV). Die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ hat unter der speziellen Annahme $N = n$ Hr. WEINSTEIN a. a. O. untersucht; die von ihm gefundenen »logarithmischen« Darstellungen, in denen der Logarithmus des absoluten Betrages der Determinante von A auftritt, spielen auch im folgenden eine wichtige Rolle.

§ 1.

Eine Hilfsbetrachtung.

Um die sämtlichen semirationalen Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{K}_n$ und $\mathfrak{U}_n$ zu erhalten, machen wir von einem Satz Gebrauch, den ich schon in meiner Dissertation (D., S. 61 ff.) bewiesen habe:

I. *Es seien* $A = (a_{\varkappa\lambda})$ *und* $B = (b_{\varkappa\lambda})$ *zwei Matrizen n-ten Grades mit beliebigen Koeffizienten. Ist* $T(A, B) = (c_{\varrho\sigma})$ *eine Matrix des Grades N von nicht*

---

[1] *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Berlin 1901. Im folgenden wird diese Arbeit kurz mit D. zitiert. Vgl. auch H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen*, I., Math. Zeitschrift Bd. 23 (1925), S. 271—309, und meine Arbeit *Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1927, S. 58—75.

[2] Vgl. A. WEINSTEIN, *Fundamentalsatz der Tensorrechnung*, Math. Zeitschrift, Bd. 16 (1923); S. 78—91, und H. WEYL, a. a. O. § 8.

[3] Vgl. hierzu J. v. NEUMANN, *Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1927, S. 76—90.

identisch verschwindender Determinante, deren Koeffizienten $c_{\varrho\sigma}$ ganze rationale Funktionen der $2n^2$ Variabeln $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ sind, und besteht für je vier Matrizen n-ten Grades A, A_1, B, B_1 die Gleichung

$$T(A,B)\,T(A_1,B_1) = T(A\,A_1,\,B\,B_1), \tag{1}$$

so läßt sich $T(A, B)$ mit Hilfe einer konstanten Ähnlichkeitstransformation in irreduzible Bestandteile der Form

$$T_1(A)\times T_2(B)$$

vollständig zerfällen[1]. *Hierbei bedeuten $T_1(A)$ und $T_2(B)$ zwei ganze rationale irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{R}_n$.*

Man beweist nun leicht:

II. *Sind die Koeffizienten $c_{\varrho\sigma}$ der Matrix $T(A, B)$ gebrochene rationale Funktionen der Variabeln $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ und besteht wieder*[2] *die Gleichung* (1), *so ist der Hauptnenner der N^2 Funktionen $c_{\varrho\sigma}$ von der Form* const. $a^k b^l$, *wo a und b die Determinanten der Matrizen A und B bedeuten.*

Es sei nämlich $\phi(A, B)$ der Hauptnenner der $c_{\varrho\varsigma}$. Man setze

$$T(A,B) = \frac{1}{\phi(A,B)}\cdot S(A,B),$$

so daß also alle Koeffizienten $c'_{\varrho\sigma}$ der Matrix $S(A, B)$ ganze rationale Funktionen sind und kein irreduzibler Faktor von $\phi(A, B)$ in allen $c'_{\varrho\sigma}$ als Faktor enthalten ist. Aus (1) folgt dann

$$\frac{\phi(A\,A_1,\,B\,B_1)}{\phi(A,B)}\cdot S(A,B) = \phi(A_1,B_1)\cdot S(A\,A_1,\,B\,B_1)\cdot[S(A_1,B_1)]^{-1}.$$

Daher sind die Koeffizienten der linksstehenden Matrix ganze rationale Fraktionen der $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$. Dies erfordert aber, daß der Quotient

$$\frac{\phi(A\,A_1,\,B\,B_1)}{\phi(A,B)} = \psi \tag{2}$$

eine ganze rationale Funktion der $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ wird. Da Zähler und Nenner in bezug auf diese Veränderlichen von gleichem Grade sind, hängt ψ nur von A_1 und B_1 ab. Läßt man nun A und B mit der Einheitsmatrix E zusammenfallen, so ergibt sich

$$\psi = \psi(A_1,B_1) = c\,\phi(A_1,B_1),$$

wo c eine Konstante ist[3]. Zugleich folgt aus (2)

$$\psi(A,B)\,\psi(A_1,B_1) = \psi(A\,A_1,\,B\,B_1).$$

[1] Für zwei Matrizen M_1 und M_2 beliebiger Grade hat man unter $M_1\times M_2$ überall im folgenden die Kronecker-Hurwitzsche Produktmatrix zu verstehen. Vgl. A. Hurwitz, *Zur Invariantentheorie*, Math. Ann. Bd. 45, S. 381—404.

[2] Die Gleichung (1) soll rein formal gelten, als System von N^2 Identituten zwischen den links und rechts auftretenden Ausdrücken in den $4n^2$ Koeffizienten von A, A_1, B, B_1.

[3] Hieraus folgt zugleich, daß $\phi(E, E)$ nicht Null sein kann.

Aus I ergibt sich nun, da die Potenzen der Determinante von A die einzigen Darstellungen ersten Grades der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ sind, daß $\Psi(A, B)$ die Gestalt $a^k b^l$ haben muß.

III. *Sind die Koeffizienten $c_{\varrho\sigma}$ der Matrix $T(A, B)$ ganze oder gebrochene Funktionen der $a_{\varkappa\lambda}$ $b_{\varkappa\lambda}$ und weiß man, daß die Gleichung* (1) *für je vier unimodulare Matrizen A, A_1, B, B_1, d. h. unter der Annahme*

$$|A| = |A_1| = |B| = |B_1| = 1$$

besteht, so läßt sich eine Matrix $S(A, B)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten angeben, so daß die Gleichung

$$S(A, B)\, S(A_1, B_1) = S(A\, A_1, B\, B_1)$$

für beliebige vier Matrizen A, A_1, B, B_1 gilt und im Spezialfall $|A| = |B| = 1$

$$T(A, B) = S(A, B)$$

wird[1].

Bedeuten nämlich $F = (f_{\varkappa\lambda})$ und $G = (g_{\varkappa\lambda})$ zwei Matrizen n-ten Grades mit voneinander unabhängigen Koeffizienten und den Determinanten f und g, so setze man

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[n]{f}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt[n]{g}},$$

wobei die n-ten Wurzeln so fixiert werden, daß für $f = g = 1$ auch $\alpha = \beta = 1$ wird. Dann sind

$$A = \alpha F, \quad B = \beta G$$

unimodular. Werden die Koeffizienten von $T(A, B)$ irgendwie auf den gemeinsamen Nenner $\phi(A, B)$ gebracht, so kann man die Koeffizienten von $T(\alpha F, \beta G)$ als Brüche mit dem gemeinsamen (nicht notwendig ganzen rationalen) Nenner

$$\prod_{\mu,\nu}^{0,\,n-1} \phi(\varrho^\mu \alpha F, \ \varrho^\nu \beta G) \qquad \left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$$

schreiben, der eine rationale Funktion der $2n^2$ Variabeln $f_{\varkappa\lambda}$, $g_{\varkappa\lambda}$ ist. Die Matrix erscheint dann in der Form

$$T(\alpha F, \beta G) = \sum_{\mu,\nu}^{0,\,n-1} R_{\mu,\nu}(F, G)\, \alpha^\mu \beta^\nu, \tag{3}$$

wobei die Koeffizienten aller n^2 Matrizen $R_{\mu,\nu}(F, G)$ rationale Funktionen der Variabeln $f_{\varkappa\lambda}$ und $g_{\varkappa\lambda}$ sind.

---

[1] Es ist hierbei zu beachten, daß $S(A, B)$ durch die Forderungen unseres Satzes nicht eindeutig bestimmt ist. Ist z. B. $T(A, B)$ für je zwei unimodulare Matrizen A, B gleich 1, so kann für $S(A, B)$ jedes Potenzprodukt $a^k b^l$ gewählt werden.

Führt man nun zwei weitere beliebige Matrizen n-ten Grades F_1 und G_1 mit den Determinanten f_1 und g_1 ein und setzt analog dem früheren

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{f_1}}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{g_1}},$$

so gilt nach Voraussetzung die Gleichung

$$\left(\sum_{\mu,\nu}{}_0^{n-1} R_{\mu\nu}(F, G)\,\alpha^\mu \beta^\nu\right)\left(\sum_{\mu,\nu}{}_0^{n-1} R_{\mu\nu}(F_1, G_1)\,\alpha_1^\mu \beta_1^\nu\right) = \sum_{\mu,\nu}{}_0^{n-1} R_{\mu\nu}(FF_1, GG_1)(\alpha\alpha_1)^\mu(\beta\beta_1)^\nu. \tag{4}$$

Da nun die n-te Wurzel aus der Determinante einer Matrix mit unabhängigen Koeffizienten eine algebraische Funktion n-ten Grades ist, kann die Gleichung (4) nur richtig sein, wenn stets

$$R_{\mu\nu}(F, G)\,R_{\mu\nu}(F_1, G_1) = R_{\mu\nu}(FF_1, GG_1) \tag{5}$$

ist und

$$R_{\mu\nu}(F, G)\,R_{\mu',\nu'}(F_1, G_1) = 0 \tag{6}$$

wird, sobald die Indizespaare μ, ν und μ', ν' nicht übereinstimmen.

Aus (5) und (6) folgt aber, daß die rationale Operation

$$R(F, G) = \sum R_{\mu\nu}(F, G) \tag{7}$$

wieder die Bedingung

$$R(F, G)\,R(F_1, G_1) = R(FF_1, GG_1)$$

genügt. Für unimodulare $F = A$, $G = B$ wird hierbei $R(A, B) = T(A, B)$. Dasselbe gilt, wenn $f^k g^l$ der Hauptnenner der Koeffizienten von $R(F, G)$ ist, und

$$R(F, G) = \frac{1}{f^k g^l} S(F, G)$$

gesetzt wird, auch für die ganze rationale Operation $S(F, G)$. Unser Satz ist damit bewiesen.

Aus (3) und (7) folgt auch unmittelbar, daß, wenn $T(A, B)$ zerfällbar ist, es auch $R(F, G)$ und also auch $S(F, G)$ sein muß. Das Umgekehrte liegt auf der Hand. Da für die Operation $S(F, G)$ nach Satz I Unzerfällbarkeit und Irreduzibilität identische Begriffe sind, erhalten wir den wichtigen Zusatz:

III′. *Jede Operation $T(A, B)$, die den Bedingungen des Satzes III genügt, ist vollständig reduzibel.*

§ 2.

Die rationalen und semirationalen Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{U}_n$.

Es sei $\mathfrak{H}$ eine der Gruppen $\mathfrak{R}_n$ oder $\mathfrak{U}_n$ (vgl. Einleitung). Von einer semirationalen Darstellung sprechen wir, wenn jeder Substitution (Matrix)

$$A = (a_{\varkappa\lambda}) = (a'_{\varkappa\lambda} + i\,a''_{\varkappa\lambda}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \cdots, n)$$

der Gruppe $\mathfrak{H}$ eine Matrix $T(A) = (c_{\varrho\sigma})$ des Grades N zugeordnet wird, deren Koeffizienten $c_{\varrho\sigma}$ rationale Funktionen der $a'_{\varkappa\lambda}$ und $a''_{\varkappa\lambda}$ sind, so daß für je zwei Elemente A, B von $\mathfrak{H}$

$$T(A)\,T(B) = T(A\,B) \tag{8}$$

wird.

Setzt man wie üblich

$$\bar{a}_{\varkappa\lambda} = a'_{\varkappa\lambda} - i\,a''_{\varkappa\lambda}, \qquad A = (\bar{a}_{\varkappa\lambda}),$$

so können wir auch sagen, daß die $c_{\varrho\sigma}$ rationale Funktionen der $a_{\varkappa\lambda}$ und $\bar{a}_{\varkappa\lambda}$ sein sollen. Schreibt man deutlicher

$$T(A) = T(A, \bar{A}), \tag{9}$$

so erfordert die Gleichung (7), daß für jede zweite Matrix

$$B = (b_{\varkappa\lambda}) = (b'_{\varkappa\lambda} + i\,b''_{\varkappa\lambda})$$

von $\mathfrak{H}$

$$T(A, \bar{A})\,T(B, \bar{B}) = T(A\,B, \bar{A}\,B) \tag{10}$$

wird. Wenn diese Gleichung aber für reelle $a'_{\varkappa\lambda}$, $a''_{\varkappa\lambda}$, $b'_{\varkappa\lambda}$, $b''_{\varkappa\lambda}$ gilt, so ist sie auch, da es sich um Relationen zwischen rationalen Funktionen handelt, für komplexe Größen $a'_{\varkappa\lambda}, \cdots$ richtig. Das trifft offenbar auch zu, wenn man sich für $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_n$ auf Matrizen A, B mit nicht verschwindenden Determinanten oder für $\mathfrak{H} = \mathfrak{U}_n$ auf unimodulare Matrizen beschränkt. Im ersten Fall gilt (10) für je vier reelle oder komplexe Matrizen A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$, im zweiten Fall für je vier unimodulare Matrizen.

Wir haben es also in $T(A, \bar{A})$ mit einer Operation zu tun, wie wir sie im vorigen Paragraphen behandelt haben, nur daß die Schreibweise etwas geändert ist. Auf Grund der Sätze I—III′ ergibt sich daher unmittelbar:

IV. *Jede semirationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ ist vollständig reduzibel. Die sämtlichen irreduziblen Darstellungen dieser Art erhält man (abgesehen von Ähnlichkeitstransformationen), indem man zwei beliebige ganze rationale irreduzible Darstellungen $S_1(A)$ und $S_2(A)$ der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ und zwei beliebige Potenzen a^k und a^l $(k, l = 0, 1, 2, \cdots)$ der Determinante a von A wählt und mit Hilfe von*

$$T_1(A) = \frac{1}{a^k}\,S_1(A), \quad T_2(A) = \frac{1}{a^l}\,S_2(A)$$

die KRONECKER-HURWITZSCHE *Produktmatrix*

$$T_1(A) \times T_2(A)$$

bildet.

V. *Jede semirationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{U}_n$ ist vollständig reduzibel. Man erhält die Gesamtheit dieser Darstellungen von $\mathfrak{U}_n$, indem man die sämtlichen ganzen semirationalen Darstellungen $T(A)$ der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ nur für unimodulare A in Betracht zieht.*

Die rationalen Darstellungen von $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{U}_n$ sind nur als Spezialfall der semirationalen aufzufassen. Es sind das diejenigen unter den Darstellungen (9), die von $\bar{A}$ unabhängig sind.

Was die rationalen Darstellungen der reellen Untergruppen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{V}_n$ von $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{U}_n$ anbetrifft, so ist nur zu beachten, daß jede solche Darstellung offenbar ins Komplexe fortgesetzt werden darf, also zugleich auch eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ bzw. $\mathfrak{U}_n$ liefert. Insbesondere folgt hieraus wegen V der für uns wichtige Satz

VI. *Jede rationale Darstellung $T(A) = (c_{\varrho\sigma})$ der Gruppe $\mathfrak{V}_n$ kann so geschrieben werden, daß die $c_{\varrho\sigma}$ als ganze rationale Funktionen der Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ der Matrix A erscheinen.*

§ 3.

Ein spezielles Darstellungsproblem.

Von entscheidender Bedeutung ist für uns die Lösung folgender Aufgabe: Es sollen alle Matrizen $F(t) = (f_{\varkappa\lambda}(t))$ bestimmt werden, deren Koeffizienten $f_{\varkappa\lambda}(t)$ für alle reellen Werte von t definierte, überall stetige reelle oder komplexe Funktionen sind, und die für je zwei reelle Werte t, u der Gleichung

$$F(t)\,F(u) = F(t+u) \tag{11}$$

genügen.

Es handelt sich mit anderen Worten darum, alle stetigen Darstellungen der durch die Gesamtheit der Funktionswerte von e^t für reelles t gebildeten Gruppe $\mathfrak{E}$ zu finden. Wie bei jedem Darstellungsproblem kann man sich auf die Bestimmung aller unzerfällbaren Darstellungen $F(t)$ mit nicht verschwindender Determinante[1] beschränken.

VII. *Jede unzerfällbare stetige Lösung $F(t)$ der Gleichung* (11) *(von nicht verschwindender Determinante) läßt sich durch eine (von t unabhängige) Ähnlichkeitstransformation auf die Form*

$$F(t) = e^{\alpha t} P_m(t) \tag{12}$$

bringen, wo α eine reelle oder komplexe Zahl und $P_m(t)$ die Matrix

$$P_m(t) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \cdots & 0, 0 \\ t, & 1, & 0 \cdots & 0, 0 \\ t^2, & 2t, & 1 \cdots & 0, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t^m, \binom{m}{1} t^{m-1}, & \binom{m}{2} t^{m-2} \cdots & \binom{m}{m-1} t, & 1 \end{pmatrix} \qquad (m = 0, 1, 2 \cdots) \tag{13}$$

bedeutet. Insbesondere hat man hierbei $P_0(t) = 1$ zu setzen.

---

[1] Läßt man diese Annahme fallen, so kommt nur noch die Darstellung durch lauter Nullen hinzu.

Daß für jedes m die Matrix $P_m(t)$ und folglich auch $e^{\alpha t} P_m(t)$ der Gleichung (11) genügt, folgt einfach daraus, daß

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

offenbar eine Lösung darstellt, und $P_m(t)$ nichts anderes als die m-te Potenztransformation[1] von $P_1(t)$ ist. Wir haben also nur zu zeigen, daß die Lösungen (12) und die aus ihnen durch Ähnlichkeitstransformationen hervorgehenden die einzigen unzerfällbaren sind. Dies ergibt sich wohl am einfachsten auf folgendem Wege:

Da $\mathfrak{G}$ eine ABELsche Gruppe ist, muß (vgl. Einleitung) eine unzerfällbare $(m+1)$-reihige Lösung $F(t)$ der Gleichung (11) für jedes t nur eine charakteristische Wurzel $f(t)$ besitzen. Diese Funktion ist wegen

$$\sum_n f_{nn}(t) = (m+1) f(t)$$

stetig und wegen $|F(t)| \neq 0$ von Null verschieden. Außerdem genügt sie, weil nach einem bekannten Satze[2] die charakteristischen Wurzeln eines Produktes zweier vertauschbarer Matrizen $F(t)$ und $F(u)$ sich als Produkte charakteristischer Wurzeln der beiden Faktoren darstellen lassen, der Gleichung

$$f(t) f(u) = f(t+u).$$

Hieraus schließt man in bekannter Weise, daß $f(t)$ die Form $e^{\alpha t}$ (mit konstantem α) haben muß[3].

Setzt man nun $F(t) = e^{\alpha t} G(t)$, so wird $G(t)$ eine stetige Lösung der Gleichung (11), deren charakterische Wurzeln sämtlich gleich 1 sind. Ist wieder der Grad unserer Matrix $m+1$ und setzt man

$$G(1) = E + A,$$

so wird (CAYLEYsche Relation)

$$A^{m+1} = 0.$$

---

[1] Vgl. A. HURWITZ a. a. O.

[2] Vgl. G. FROBENIUS, *Über vertauschbare Matrizen*, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1896, S. 601 bis 614.

[3] Vgl. hierzu die vorangehende Note des Hrn. G. PÓLYA. Der Vollständigkeit wegen soll hier noch ein anderer Beweis skizziert werden. Ist $f(1) = e^{\beta}$ und $f(t) = e^{\beta t} g(t)$, so genügt auch $g(t)$ der Funktionalgleichung, wobei $g(1) = 1$ wird. Setzt man $g\left(\frac{1}{2^\nu}\right) = g_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$, so wird $g_\nu^{2^\nu} = 1$, also $g_\nu = e^{\frac{2\pi i \alpha_\nu}{2^\nu}}$, wo α_ν eine der Zahlen $0, 1, \cdots 2^\nu - 1$ bedeutet. Außerdem ist $g_{\nu+1} = \pm \sqrt{g_\nu}$ und $\lim_{\nu \to \infty} g_\nu = 1$. Dies ist aber nur möglich, wenn die α_ν von einer gewissen Stelle μ an konstant sind. Setzt man $g(t) = e^{2\pi i \alpha_\mu t} h(t)$, so wird auch $h(t)$ eine stetige Lösung der Funktionalgleichung, für die alle $h\left(\frac{1}{2^\nu}\right) = 1$ sind. Dann ist aber offenbar auch für alle dyadischen Brüche und folglich für alle reellen t stets $h(t) = 1$. Das liefert $f(t) = e^{(\beta + 2\pi i \alpha_\mu) t}$.

Ich behaupte nun, daß $G(t)$ für alle reellen Werte von t mit

$$H(t) = E + \binom{t}{1} A + \binom{t}{2} A^2 + \cdots + \binom{t}{m} A^m \tag{14}$$

übereinstimmen muß.

Zunächst genügt $H(t)$ wieder der Gleichung (11). Denn offenbar wird für $t = 0, 1, 2, \cdots$

$$H(t) = (E + A)^t .$$

Daher ist die Gleichung

$$H(t)\,H(u) = H(t+u) \tag{15}$$

für je zwei positive ganze rationale Zahlen t und u richtig. Da diese Gleichung aber in unserem Falle nur ein System von $(m+1)^2$ Relationen zwischen ganzen rationalen Funktionen von t und u vertritt, so gilt (15) für alle Wertpaare t, u.

Wegen

$$G(t)\,G(-t) = G(0) = E, \quad H(t)\,H(-t) = H(0) = E$$

genügt es, die Gleichung $G(t) = H(t)$ nur für positive t und wegen der Stetigkeit von $G(t)$ nur für positive rationale Werte $t = \frac{k}{l}$ zu beweisen. Da

$$G(k) = [G(1)]^k = (E + A)^k = H(k)$$

und

$$G\left(\frac{k}{l}\right) = \left[G\left(\frac{1}{l}\right)\right]^k$$

ist, haben wir nur zu zeigen, daß für jede positive ganze Zahl l

$$G\left(\frac{1}{l}\right) = Q \text{ und } H\left(\frac{1}{l}\right) = R$$

übereinstimmen. Das ergibt sich aber so. Es ist doch

$$Q^l = R^l = G(1) = H(1) = E + A ,$$

ferner ist $A = Q^l - E$ mit Q vertauschbar. Daher ist auch R als ganze rationale Funktion von A mit Q vertauschbar. Das liefert

$$(QR^{-1})^l = Q^l R^{-l} = E. \tag{16}$$

Die Matrix $QR^{-1} = S$ hat aber ebenso wie Q und R nur die eine charakteristische Wurzel 1. Setzt man $S = E + B$, so wird also $B^{m+1} = 0$, außerdem ist wegen (16)

$$\binom{l}{1} B + \binom{l}{2} B^2 + \cdots + \binom{l}{m} B^m = 0 . \tag{17}$$

Ist nun $B^{m'+1}$ die erste Potenz von B, die die Nullmatrix liefert, so würde für $m' > 0$ aus (16) durch Erheben der linken Seite in die m'-te Potenz

$$l^{m'} B^{m'} = 0, \text{ d. h. } B^{m'} = 0$$

folgen, was auszuschließen ist. Folglich ist $m' = 0$, also $S = E$, d. h. $Q = R$.

Verlangt man noch, daß $G(t) = H(t)$ eine unzerfällbare Lösung der Gleichung (11) sein soll, so ist wegen (14) notwendig und hinreichend, daß die Matrix A durch keine Ähnlichkeitstransformation auf die Form

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann. Das bedeutet aber bekanntlich nur, daß die charakteristische Funktion von A und folglich auch von $G(1) = E + A$ nur einen von 1 verschiedenen Elementarteiler besitzen darf. Dann ist aber $G(1)$ insbesondere der Matrix $P_m(1)$ ähnlich. Ist schon $G(1) = P_m(1)$, so wird auch für jedes t

$$G(t) = P_m(t).$$

Denn das gilt, weil für positive ganze rationalen t

$$G(t) = [G(1)]^t = [P_m(1)]^t = P_m(t)$$

ist, wieder für alle t, da wir schon wissen, daß die Koeffizienten der beiden Matrizen ganze rationale Funktionen von t sind.

Aus dem nunmehr bewiesenen Satz VII ergibt sich insbesondere:

VIII. *In jeder stetigen Lösung $F(t) = (f_{\varkappa\lambda}(t))$ der Gleichung (11) haben alle Koeffizienten $f_{\varkappa\lambda}(t)$ die Form*

$$\sum_{\nu=1}^{r} p_\nu(t)\, e^{\alpha_\nu t}, \tag{18}$$

wo die α_ν reelle oder komplexe Zahlen und die $p_\nu(t)$ Polynome bedeuten.

Auf diesen Satz hat mich Hr. G. PÓLYA schon vor längerer Zeit aufmerksam gemacht. Sein eleganter direkter Beweis bildet den Inhalt der vorangehenden Note.

§ 4.

Folgerungen aus dem Satze VII.

Wird noch verlangt, daß die Lösung $F(t)$ der Gleichung (11) nicht nur stetig, sondern auch periodisch mit der Periode 2π sein soll, so lehrt der Satz VII, daß im Falle der Unzerfällbarkeit $m = 0$, also $F(t) = e^{\alpha t}$ sein muß, wobei noch zu verlangen ist, daß α ein ganzzahliges Vielfaches von i wird. Das liefert den Satz:

IX. *Jede in bezug auf die reelle Variable t stetige Matrix $F(t)$, die der Gleichung (11) genügt, und die Periode 2π besitzt, ist vollständig reduzibel. Die irreduziblen Bestandteile haben die Form $e^{\nu i t}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)*[1].

[1] Es wird wieder vorausgesetzt, daß die Determinante von $F(t)$ nicht verschwindet, sonst kann noch der irreduzible Bestandteil 0 einmal oder mehrfach auftreten. Der Satz ist übrigens

Sei nun $z = x + iy$ eine komplexe Veränderliche. Sind die Koeffizienten der Matrix $F(z)$ überall definierte stetige Funktionen von z, so kann wieder verlangt werden, daß für je zwei komplexe Größen z und u

$$F(z)\,F(u) = F(z+u) \tag{19}$$

sein soll. Die Aufgabe, alle solchen Matrizen $F(z)$ zu bestimmen, kann auf die für reelle Argumente erledigte zurückgeführt werden. Setzt man nämlich y oder x gleich Null, so erhält man in

$$F(x) = F_1(x), \quad F(iy) = F_2(y)$$

zwei stetige Lösungen (gleichen Grades) für reelle Argumente. Es wird dann

$$F(z) = F(x)\,F(iy) = F_1(x)\,F_2(y) = F_2(y)\,F_1(x).$$

Hierbei können $F_1(x)$ und $F_2(y)$ zwei beliebige stetige Lösungen der Gleichung (11) sein, von denen nur noch zu verlangen ist, daß für zwei beliebige reelle Größen x und y $F_1(x)$ mit $F_2(y)$ vertauschbar sei. Jedenfalls folgt aus VIII.

X. *Jede stetige Lösung* $F(z) = (f_{\varkappa\lambda}(z))$ *der Gleichung* (19) *weist nur Koeffizienten der Form*

$$f_{\varkappa\lambda}(t) = \sum_{\nu=1}^{r} p_\nu(x, y)\, e^{\alpha_\nu x + \beta_\nu y}$$

auf, wo die α_ν *und* β_ν *reelle oder komplexe Zahlen und die* $p_\nu(x, y)$ *Polynome bedeuten.*

Will man die Aufgabe noch weiter verfolgen[1] und insbesondere alle unzerfällbaren Lösungen $F(z)$ näher charakterisieren, so kann man wie früher schließen, daß in diesem Falle

$$F(z) = e^{\alpha x + \beta y}\, G(z)$$

werden muß, wobei die sämtlichen charakteristischen Wurzeln von $G(z)$ gleich 1 sind. Ist der Grad der Matrix $G(z)$ gleich $m+1$ und setzt man

$$G(1) = E + A, \quad G(i) = E + B,$$

so müssen A und B zwei vertauschbare Lösungen der Matrizengleichung

$$X^{m+1} = 0 \tag{20}$$

sein. Die Matrix

$$G(z) = G(x)\,G(iy)$$

erhält dann wegen (14) die Gestalt

$$G(z) = \sum_{\varkappa,\lambda=0}^{n} \binom{x}{\varkappa}\binom{y}{\lambda} A^\varkappa B^\lambda.$$

---

nicht neu. Er enthält nur ein bekanntes Resultat über die stetigen Darstellungen der Gruppe der reellen Drehungen

$$\begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix}.$$

[1] Für das Ziel unserer Untersuchung ist das ohne Bedeutung.

Umgekehrt liefert dieser Ausdruck für jedes Paar vertauschbarer Matrizen A, B des Grades $m+1$, die der Gleichung (20) genügen, eine Lösung von (19) mit nur einer charakteristischen Wurzel 1.

Damit $G(z)$ aber unzerfällbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß sich keine Ähnlichkeitsformation angeben lasse, durch die A und B simultan auf die Form

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

gebracht werden, wobei $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2$) von gleichem Grade sind. Es ist aber hier nicht einfach, die Gesamtheit dieser Matrizenpaare mit Hilfe gewisser Normalformen zu kennzeichnen.

Auf Grund des Satzes VII ergibt sich unmittelbar ebenso wie für die entsprechende Funktionalgleichung in der Theorie der gewöhnlichen Funktionen:

XI. *Sind die Koeffizienten der Matrix $K(r)$ für alle positiven reellen Werte von r definierte, stetige Funktionen, und besteht für je zwei positive Zahlen r und s die Gleichung*

$$K(r)\,K(s) = K(r\,s), \tag{21}$$

so läßt sich $K(r)$ mit Hilfe einer von r unabhängigen Ähnlichkeitstransformation in lauter unzerfällbare Bestandteile der Form

$$r^\alpha P_m(\log r) \qquad (r^\alpha = e^{\alpha \log r})$$

vollständig zerlegen. Hierbei bedeutet α eine beliebige komplexe Zahl, und $P_m(t)$ ist die durch (13) definierte Matrix.

In Verbindung mit Satz IX folgt hieraus:

XII. *Sind die Koeffizienten der Matrix $L(v)$ für alle von Null verschiedenen Werte der komplexen Veränderlichen*

$$v = r\,e^{i\varphi}$$

definierte, an jeder von Null verschiedenen Stelle stetige Funktionen, und besteht für je zwei von Null verschiedene komplexe Werte v und w die Gleichung

$$L(v)\,L(w) = L(v\,w),$$

so läßt sich $L(v)$ mit Hilfe einer von v unabhängigen Ähnlichkeitstransformation in lauter unzerfällbare Bestandteile der Form

$$r^\alpha e^{\nu i \varphi} P_m(\log r)$$

vollständig zerlegen. Hierbei kann α eine beliebige komplexe Zahl und ν eine beliebige ganze rationale Zahl sein[1].

Man hat bei dem Beweis nur zu beachten, daß

$$L(v) = L(r)\,L(e^{i\varphi})$$

[1] Die Determinanten der Matrizen $K(r)$ und $L(v)$ werden hierbei als von Null verschieden vorausgesetzt. Sonst kommt in beiden Fällen nur noch der Bestandteil 0 hinzu.

wird und daß hierbei $L(r)$ als eine stetige Lösung von (21) und $L(e^{i\phi}) = F(\phi)$ als eine stetige periodische Lösung von (11) erscheint, wobei sich noch wegen Satz IX der Faktor $L(e^{i\phi})$ im Falle der Unzerfällbarkeit auf eine Matrix der Form $e^{\nu i\phi}E$ reduzieren muß.

§ 5.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{U}_n$.

Sind μ und ν zwei voneinander verschiedene Indizes aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots, n$, so verstehe man für jeden Wert von t unter $U_{\mu\nu}(t)$ die Substitution

$$x'_\varkappa = x_\varkappa, \quad x'_\mu = x_\mu + t\,x_\nu \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n, \varkappa \neq \mu)$$

Insbesondere wird

$$[U_{\mu\nu}(t)]^{-1} = U_{\mu\nu}(-t). \tag{22}$$

Es ist bekannt, daß die Substitutionen $U_{\mu\nu}(t)$ die ganze Gruppe $\mathfrak{U}_n$ aller unimodularen Substitutionen in n Veränderlichen erzeugen. Wir haben den Aufbau einer beliebigen unimodularen Substitution mit Hilfe der $U_{\mu\nu}$ noch genauer zu untersuchen.

Ist insbesondere die Unterdeterminante

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \tag{23}$$

von Null verschieden, so bestimme man $s_1, s_2, \cdots, s_n$ und $t_1, t_2, \cdots, t_n$ mit Hilfe der linearen Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-1} a_{\varkappa\lambda} s_\varkappa + a_{n\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} a_{\varkappa\lambda} t_\lambda + a_{\varkappa n} = 0\,. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n-1)$$

Die s_n und t_λ erscheinen in der Gestalt rationaler Funktionen der $a_{\varkappa\lambda}$ mit dem gemeinsamen Nenner d. Setzt man nun

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = U_{n1}(s_1)\,U_{n2}(s_2)\cdots U_{n,n-1}(s_{n-1})$$

und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & t_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = U_{1n}(t_1)\,U_{2n}(t_2)\cdots U_{n-1,n}(t_{n-1})\,;$$

so wird, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$KAL = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

Ferner wird, wenn α, β, γ, δ die Ausdrücke

$$\alpha = d-1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{1-d}{d}, \quad \delta = -d$$

bedeuten,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

also auch

$$M = U_{n1}(\alpha)\, U_{1n}(\beta)\, U_{n1}(\gamma)\, U_{1n}(\delta) = \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Das liefert

$$MKAL = B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

wo A_1 die Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{d} & \frac{a_{12}}{d} & \cdots & \frac{a_{1,n-1}}{d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{25}$$

bedeutet, also eine unimodulare Substitution in $n-1$ Veränderlichen.

Folglich wird

$$A = PBQ, \tag{26}$$

und hierbei wird wegen (22)

$$P = K^{-1} M^{-1} = U_{n,n-1}(-s_{n-1}) \cdots U_{n1}(-s_1)\, U_{1n}(-\delta) \cdots U_{n1}(-\alpha) \tag{27}$$

$$Q = L^{-1} = U_{n-1,n}(-t_{n-1}) \cdots U_{1n}(-t_1) \tag{28}$$

Produkte gewisser $U_{\mu\nu}(t_{\mu\nu})$ mit Argumenten $t_{\mu\nu}$, die wohlbestimmte Ausdrücke der Form

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{d} G_{\mu\nu}(a_{11}, a_{12}, \cdots a_{nn}) \tag{29}$$

mit ganzen rationalen $G_{\mu\nu}$.

Die Formeln gelten unverändert auch für die Gruppe $\mathfrak{B}_n$ aller reellen unimodularen Substitutionen.

§ 6.

Die stetigen Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{U}_n$ und $\mathfrak{V}_n$.

XIII. *(Der Weyl-v. Neumannsche Satz.) Jede stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{V}_n$ aller reellen unimodularen Substitutionen in n Veränderlichen ist rational und demnach vollständig reduzibel.*

Der Beweis ergibt sich auf Grund unserer bisherigen Ergebnisse recht einfach auf folgendem Wege.

Es sei irgendeine stetige Darstellung von $\mathfrak{V}_n$ gegeben, bei der jeder Substitution $A = (a_{\varkappa\lambda})$ von $\mathfrak{V}_n$ die Substitution $T(A) = (c_{\varrho\sigma})$ in N Veränderlichen zugeordnet wird. Wir dürfen wie bei jedem Darstellungsproblem annehmen, daß die Determinanten der $T(A)$ von Null verschieden sind.

Für jedes feste Indizespaar $\mu, \nu\,(\mu \neq \nu)$ setze man

$$T(U_{\mu\nu}(t)) = F_{\mu\nu}(t)\,. \tag{30}$$ (t reell)

Da offenbar für je zwei Größen t und u

$$U_{\mu\nu}(t)\,U_{\mu\nu}(u) = U_{\mu\nu}(t+u)$$

wird und für je zwei Substitutionen A und B von $\mathfrak{V}_n$

$$T(A)\,T(B) = T(AB) \tag{31}$$

sein soll, so wird auch

$$F_{\mu\nu}(t)\,F_{\mu\nu}(u) = F_{\mu\nu}(t+u)\,. \tag{32}$$

Nach Voraussetzung sind die Koeffizienten $f_{\varrho\sigma}(t)$ von $F_{\mu\nu}(t)$ stetige Funktionen der reellen Variabeln t. Aus Satz VIII folgt daher, daß alle $f_{\varrho\sigma}(t)$ die Form

$$f_{\varrho\sigma}(t) = \sum_{\varkappa=1}^{r} p_\varkappa(t)\,e^{\alpha_\varkappa t}$$

haben, wobei die $\alpha_\varkappa$ reelle oder komplexe Zahlen um die $p_\varkappa(t)$ Polynome sind[1]. Dafür können wir auch sagen, daß $F_{\mu\nu}(t)$ die Gestalt

$$F_{\mu\nu}(t) = \sum_{\varkappa=1}^{r} R_\varkappa(t)\,e^{\alpha_\varkappa t} \tag{33}$$

hat, wobei die Koeffizienten der Matrizen $R_\varkappa(t)$ ganze rationale Funktionen von t sind. Wir dürfen annehmen, daß die $\alpha_\varkappa$ voneinander verschieden sind und daß keine der Matrizen $R_\varkappa(t)$ sich auf die Nullmatrix reduziert.

Nun ist aber für jedes (reelle) von Null verschiedene β

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Es ist bemerkenswert, daß man hier den präziseren Satz VII nicht heranzuziehen braucht. Dieser Satz spielt erst bei der Diskussion der Gruppen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n$ eine wichtige Rolle.

und daher auch

$$V_{\mu\nu}\, U_{\mu\nu}(t)\, V_{\mu\nu}^{-1} = U_{\mu\nu}(\beta^2 t), \tag{34}$$

wenn unter $V_{\mu\nu}$ die unimodulare Substitution

$$x_\varkappa' = x_\varkappa, \quad x_\mu' = \beta x_\mu, \quad x_\nu' = \beta^{-1} x_\nu \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n,\ \varkappa \neq \mu,\ \varkappa \neq \nu)$$

verstanden wird. Bedeutet H die Substitution $T(V_{\mu\nu})$, so folgt aus (34)

$$H F_{\mu\nu}(t)\, H^{-1} = F_{\mu\nu}(\beta^2 t),$$

also wegen (33)

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} H R_\varkappa(t)\, H^{-1} \cdot e^{\alpha_\varkappa t} = \sum_{\varkappa=1}^{r} R_\varkappa(\beta^2 t)\, e^{\beta^2 \alpha_\varkappa t}. \tag{35}$$

Da nun aber Exponentialfunktionen der Form $e^{\alpha t}$ im Gebiete der ganzen rationalen Funktionen von t linearer unabhängig sind, erfordert dies, daß $r = 1$ und $\alpha_1 = 0$ wird. Denn sonst könnte $\beta \neq 0$ so gewählt werden, daß die r Größen $\beta^2 \alpha_\varkappa$ nicht mit den r Größen $\alpha_\varkappa$ übereinstimmen, was eine unmögliche Beziehung ergeben würde.

Folglich sind für jedes Indizespaar μ, ν die Koeffizienten $f_{\varrho\sigma}(t)$ der Matrix (30) wohlbestimmte ganze rationale Funktionen von t.

Sei nun $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine beliebige Substitution der Gruppe $\mathfrak{V}_n$, von der wir nur annehmen, daß die durch (23) gekennzeichnete Unterdeterminante d von Null verschieden ist. Es gilt dann die Formel (26), aus der wegen (31)

$$T(A) = T(P)\, T(B)\, T(Q)$$

folgt. Hier erscheinen $T(P)$ und $T(Q)$ wegen (37) und (38) als Produkte gewisser unter den Matrizen (30) mit Argumenten $t_{\mu\nu}$, die nach dem Früheren rationale Funktionen der $a_{\varkappa\lambda}$ von der Form (29) sind. Daher sind die Koeffizienten von $T(P)$ und $T(Q)$ wohlbestimmte rationale Funktionen der $a_{\varkappa\lambda}$ mit Nennern, die Potenzen von d sind.

Läßt man ferner in (24) A_1 alle reellen unimodularen Substitutionen in $n-1$ Veränderlichen durchlaufen, so liefern offenbar die Matrizen $T(B)$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{V}_{n-1}$. Nehmen wir unseren Satz, der für $n = 1$ gewiß richtig ist, für $\mathfrak{V}_{n-1}$ schon als bewiesen an, so können wir schließen, daß die Koeffizienten von $T(B)$ rationale, und zwar (vgl. Satz VI) *ganze* rationale Funktionen der Koeffizienten der Matrix (25) sind.

Dies zeigt aber, daß sich eine wohlbestimmte Matrix

$$T_1(A) = (c'_{\varrho\sigma}) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots, N)$$

angeben läßt, deren Koeffizienten rationale Funktionen der $a_{\varkappa\lambda}$ mit Nennern der Form d^k sind, so daß für jede Substitution A von $\mathfrak{V}_n$, für die $d \neq 0$ ist,

$$T(A) = T_1(A)$$

wird.

Nun soll doch aber für je zwei Substitutionen von $\mathfrak{V}_n$ die Gleichung (31) bestehen. Wählen wir A und B so, daß für A, B und AB die mit

Hilfe der $n-1$ ersten Zeilen und Spalten gebildeten Unterdeterminanten d, d' und d'' von Null verschieden ausfallen, so geht (31) in

$$T_1(A)\,T_1(B) = T_1(AB)$$

über. Dies liefert nur N^2 Relationen zwischen rationalen Funktionen der $a_{\varkappa\lambda}$ und $b_{\varkappa\lambda}$. Bestehen sie stets, wenn $dd'd'' \neq 0$ ist, so müssen sie rein formal gelten, d. h. nach Fortschaffen der Nenner Identitäten liefern. Dies gilt offenbar auch, wenn die $a_{\varkappa\lambda}$ und $b_{\varkappa\lambda}$ der Bedingung unterworfen werden, daß die Determinanten $|a_{\varkappa\lambda}|$ und $|b_{\varkappa\lambda}|$ gleich 1 sein sollen.

Dies besagt aber nur, daß $T_1(A)$ eine rationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{B}_n$ liefert. Nach Satz VI kann daher eine Matrix

$$S(A) = (c''_{\varrho\sigma})$$

mit *ganzen* rationalen Funktionen $c''_{\varrho\sigma}$ der $a_{\varkappa\lambda}$ bestimmt werden, die für alle unimodularen Substitutionen A mit $T_1(A)$ übereinstimmt.

Die stetigen Funktionen $c_{\varrho\sigma}$ der $a_{\varkappa\lambda}$ stimmen also mit den ganzen rationalen Funktionen $c''_{\varrho\sigma}$ für jede reelle unimodulare Substitution A mit nicht verschwindendem d überein. Aus der Stetigkeit der Funktionen $c_{\varrho\sigma}$ und $c''_{\varrho\sigma}$ folgt hieraus offenbar, daß sie auch dann übereinstimmen, wenn $d = 0$ wird. Die Darstellung $T(A)$ ist also identisch mit der ganzen rationalen Darstellung $S(A)$, w. z. b. w.

Genau dieselbe Betrachtung gilt auch für die Gruppe $\mathfrak{U}_n$. Der Unterschied ist nur der, daß wir bei der »Funktionalgleichung« (32) auch komplexe t, u zulassen müssen. Auf Grund des Satzes X tritt daher, wenn $t = x + iy$ ist, an Stelle von (33) eine Gleichung der Form

$$F_{\mu\nu}(t) = \sum_{\varkappa=1}^{r} R_\varkappa(x, y)\, e^{\alpha_\varkappa x + \beta_\varkappa y},$$

wobei die Koeffizienten von $R_\varkappa(x, y)$ ganze rationale Funktionen von x und y sind. Ferner erhalten wir bei reellem β an Stelle von (35) eine Gleichung der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} H R_\varkappa(x, y)\, H^{-1} \cdot e^{\alpha_\varkappa x + \beta_\varkappa y} = \sum_{\varkappa=1}^{r} R_\varkappa(\beta^2 x, \beta^2 y) \cdot e^{\beta^2(\alpha_\varkappa x + \beta_\varkappa y)}.$$

Für beliebiges $\beta \neq 0$ kann aber eine solche Gleichung wieder nur gelten, wenn $r = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ist, also alle Koeffizienten von $F_{\mu\nu}(t)$ ganze rationale Funktionen von x und y sind. Im weiteren Verlauf der Betrachtung hat man anstatt der rationalen Funktionen der $a_{\varkappa\lambda}$ »semirationale« Funktionen heranzuziehen, ohne daß sich das Wesen der Untersuchung ändert.

So gelangen wir zu dem Satz

XIV. *Jede stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{U}_n$ aller komplexen unimodularen Substitutionen in n Veränderlichen ist semirational und daher vollständig reduzibel.*

§ 7.

Eine Ergänzung zum Satze XIII.

XV. *Jede stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{W}_n$ aller reellen Substitutionen in n Veränderlichen mit den Determinanten ± 1 ist rational und vollständig reduzibel.*

Die Gruppe $\mathfrak{W}_n$ enthält die Gruppe $\mathfrak{V}_n$ als invariante Untergruppe. Versteht man unter J die Substitution

$$x_1' = -x_1\,, \quad x_2' = x_2\,, \cdots, \quad x_n' = x_n\,,$$

so wird

$$\mathfrak{W}_n = \mathfrak{V}_n + J\mathfrak{V}_n\,.$$

Die Substitutionen von $\mathfrak{V}_n$ bezeichnen wir im folgenden mit A, die Substitutionen JA der Nebengruppe mit B. Insbesondere wird

$$J^2 = E_n\,, \quad JAJ^{-1} = A^*, \tag{36}$$

wobei A^* wieder zu $\mathfrak{V}_n$ gehört und einen wohlbestimmten Automorphismus dieser Gruppe kennzeichnet[1].

Unser Satz braucht offenbar nur für unzerfällbare stetige Darstellungen von $\mathfrak{W}_n$ (mit nicht verschwindenden Determinanten) bewiesen zu werden. Wird hierbei der Substitution W von $\mathfrak{W}_n$ die Substitution $T(W)$ in N Veränderlichen zugeordnet, so liefern insbesondere die $T(A)$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{V}_n$. Setzt man $T(J) = H$, so muß wegen (36)

$$H^2 = E_N\,, \quad HT(A)H^{-1} = T(A^*)$$

werden, außerdem muß

$$T(B) = T(JA) = HT(A) \tag{37}$$

sein.

Die Darstellung $T(A)$ von $\mathfrak{V}_n$ ist, wie wir schon wissen, vollständig reduzibel, und es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß schon

$$T(A) = \begin{pmatrix} T_1(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_m(A) \end{pmatrix}$$

in die irreduziblen Darstellungen $T_\varkappa(A)$ vollständig zerfällt. Wird entsprechend

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1m} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \cdots & H_{mm} \end{pmatrix}$$

gesetzt, so folgt aus der zweiten der Gleichungen (36)

$$H_{\varkappa\lambda}T_\lambda(A) = T_\varkappa(A^*)H_{\varkappa\lambda}\,. \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, m) \tag{38}$$

[1] Mit E_ν wird im folgenden für jedes ν die Einheitsmatrix ν-ten Grades bezeichnet. Ist n ungerade, so kann man statt mit J das invariante Element $-E_n$ von $\mathfrak{W}_n$ benutzen. Die Beweisführung wird hierdurch aber nur unwesentlich vereinfacht.

Der irreduziblen stetigen Darstellung $T_\varkappa(A)$ von $\mathfrak{B}_n$ kann aber (nach Satz V und Satz XIII) eine ganze rationale (irreduzible) Darstellung $S_\varkappa(K)$ der Gruppe $\mathfrak{K}_n$ zugeordnet werden, die speziell für die Substitutionen $K = A$ von $\mathfrak{B}_n$ mit $T_\varkappa(A)$ zusammenfällt. Dann wird auch wegen (36)

$$S_\varkappa(J)\, S_\varkappa(A)\, [S_\varkappa(J)]^{-1} = S_\varkappa(A^*)\,. \tag{39}$$

Dies zeigt, daß $T_\varkappa(A^*)$ und $T_\varkappa(A)$ einander ähnliche Darstellungen von $\mathfrak{B}_n$ sind. Sind daher $T_\varkappa(A)$ und $T_\lambda(A)$ nicht einander ähnliche Darstellungen, so folgt nach einem bekannten Satze[1], daß $H_{\varkappa\lambda} = 0$ werden muß, und es ergibt sich nun leicht, daß, wenn $T(W)$ unzerfällbar sein soll, alle m Darstellungen $T_\varkappa(A)$ einander ähnlich sein müssen. Wir dürfen folglich annehmen, daß

$$T_1(A) = T_2(A) = \cdots = T_m(A) \tag{40}$$

wird.

Durch die Gleichung (38) ist für jedes Indizespaar $H_{\varkappa\lambda}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt (vgl. Fußnote 1). Da wegen (39) und (40) stets $S_1(J)$ eine Lösung ist, muß

$$H_{\varkappa\lambda} = c_{\varkappa\lambda} S_1(J) \qquad (c_{\varkappa\lambda} \text{ konstant})$$

sein. Bezeichnet man nun die Matrix $(c_{\varkappa\lambda})$ des Grades k mit C, so kann mit Hilfe der Kronecker-Hurwitzschen Produktbildung

$$T(A) = E_m \times T_1(A)\,,\quad H = C \times S_1(J)$$

gesetzt werden. Hierbei muß $C^2 = E_m$ werden, weil sowohl H als auch $S_1(J)$ periodisch mit der Periode 2 sind.

Ersetzt man C durch eine ähnliche Matriz C_1, so bedeutet das nur den Übergang von $T(W)$ zu einer ähnlichen Darstellung. Wegen $C^2 = E_m$ kann aber

$$C_1 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

gewählt werden. Dies zeigt, daß $m = 1$ sein muß, da sonst $T(W)$ nicht unzerfällbar wäre. Beachtet man, daß

$$T_1(A) = S_1(A)\,,\quad S_1(JA) = S_1(J)\ S_1(A)$$

ist, so können wir sagen, daß

$$T(A) = S_1(A),\quad T(B) = \pm S_1(B)$$

wird.

[1] Vgl. meine Arbeit *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1905, S. 406—432, § 2.

Steht hier das Pluszeichen, so wird für jede Substitution W von $\mathfrak{W}_n$

$$T(W) = S_1(W).$$

Im Falle des Minuszeichens darf aber

$$T(W) = |W|. \quad S_1(W)$$

gesetzt werden. In beiden Fällen ergibt sich, daß $T(W)$ von den Koeffizienten der Substitution W rational abhängt, und zwar noch genauer aus einer ganzen rationalen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ hervorgeht. Das gilt dann auch für zerfällbare stetige Darstellungen von $\mathfrak{W}_n$. Zugleich hat sich vollständige Reduzibilität ergeben.

§ 8.

Die stetigen Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{K}_n$.

XVI. *Jede unzerfällbare stetige Darstellung $T(A)$ der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ aller reellen Substitutionen A in n Veränderlichen mit nicht verschwindenden Determinanten D läßt sich durch eine (konstante) Ähnlichkeitsformation auf die Form*

$$T(A) = |D|^{\alpha} \; P_m(\log|D|) \times S(A) \tag{41}$$

bringen. Hierbei bedeutet α eine reelle oder komplexe Zahl, unter $P_m(t)$ ist für jedes t die durch die Gleichung (13) definierte Matrix und unter $S(A)$ eine irreduzible ganze rationale Darstellung der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ zu verstehen.

Der Beweis läßt sich sehr einfach erbringen. Die Gruppe $\mathfrak{R}_n$ kann als das direkte Produkt der durch alle reellen Substitutionen W mit den Determinanten ± 1 gebildeten Gruppe $\mathfrak{W}$ und der Gruppe $\mathfrak{Q}$ aller Substitutionen $Q = r E_n$ mit positivem r aufgefaßt werden. Für jede beliebige Substitution $A = (a_{\varkappa\lambda})$ von $\mathfrak{R}_n$ hat man

$$Q = |D|^{\frac{1}{n}} \cdot E_n, \; W = \left(\frac{a_{\varkappa\lambda}}{|D|^{\frac{1}{n}}} \right)$$

zu setzen, um A in der Form $QW = WQ$ darzustellen.

Ist nun $T(A)$ eine unzerfällbare stetige Darstellung von $\mathfrak{R}_n$, so liefern die $T(W)$ eine stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{W}$, die nach Satz XV vollständig reduzibel ist. Man darf schon annehmen, daß $T(W)$ in die irreduziblen Bestandteile $T_1(W)$, $T_2(W)$, ... $T_m(W)$ vollständig zerfällt. Da nun jedes $T(Q)$ mit allen $T(W)$ vertauschbar sein muß, so schließt man ganz ähnlich wie im vorigen Paragraphen, daß

$$T_1(W) = T_2(W) = \ldots = T_m(W)$$

gewählt werden darf, und daß dann

$$T(W) = E_m \times T_1(W), \; T(Q) = C \times E_k$$

wird, wenn k den Grad der Matrix $T_1(W)$ bedeutet.

Nun ist aber, wenn $Q = r E_n$ und $C = K(r)$ gesetzt wird, für je zwei positive Zahlen r und s offenbar

$$K(r)\ K(s) = K(r s),$$

wobei die Koeffizienten der Matrix $K(r)$ stetige Funktionen der Veränderlichen r sein müssen. Aus dem Satze XI folgt, daß $T(A)$ nur dann unzerfällbar sein kann, wenn $C = K(r)$ durch eine konstante Ähnlichkeitstransformation auf die Form $r^\beta P_m(\log r)$ gebracht werden kann. An Stelle von $P_m(\log r)$ darf hier aber auch $P_m(n \log r)$ gesetzt werden. Denn aus

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^2 t & 0 \end{pmatrix}$$

folgt durch Anwendung der m-ten Potenztransformation, daß $P_m(t)$ für jedes $\gamma \neq 0$ durch eine konstante Ähnlichkeitsformation in $P_m(\gamma t)$ übergeführt werden kann.

Wir dürfen daher annehmen, daß bereits

$$C = r^{\alpha' n} \cdot P_m(n \log r)$$

ist. Dann wird aber

$$T(r W) = r^{\alpha' n} \cdot P_m(n \log r) \times T_1(W),$$

also für $A = |D|^{\frac{1}{n}} W$

$$T(A) = |D|^{\alpha'} \cdot P_m(\log |D|) \times T_1(W).$$

Der irreduziblen Darstellung $T_1(W)$ läßt sich aber nach der am Schluß des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung eine irreduzible ganze rationale Darstellung $S(A)$ von $\mathfrak{R}_n$ (oder, was hier dasselbe ist, von $\mathfrak{K}_n$) zuordnen, die für alle W mit $T_1(W)$ übereinstimmt. Eine solche Darstellung $S(A)$ ist aber homogen von einem gewissen Grade l (vgl. D., Abschnitt I). Da $W = |D|^{-\frac{1}{n}} \cdot A$ ist, wird

$$T_1(W) = S(W) = |D|^{-\frac{l}{n}} \cdot S(A).$$

Setzt man $\alpha = \alpha' - \frac{l}{n}$, so erhält $T(A)$ die verlangte Form (41).

Man überzeugt sich auch leicht, daß umgekehrt jeder Ausdruck der Form (41) eine unzerfällbare stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ liefert, sobald die ganze rationale Darstellung $S(A)$ nur irreduzibel ist. Dies erkennt man auf Grund des in der Einleitung erwähnten Kriteriums, indem man zeigt, daß jede Matrix, die mit allen $T(A)$ vertauschbar ist, von der Form $M \times E_k$ sein muß, wo M mit allen $P_m(t)$ vertauschbar, also eine ganze rationale Funktion von P_m (1) ist (vgl. § 3). Eine solche Matrix M hat aber nur eine charakteristische Wurzel, dasselbe gilt daher auch für $M \times E_k$.

Man hat noch zu beachten, daß $S(A)$ durch $T(A)$ nicht eindeutig bestimmt ist. Für jede positive gerade ganze Zahl p kann vielmehr $T(A)$ auch in der Form

$$T(A) = |D|^{\alpha-p} \cdot P_m(\log|D|) \times S'(A)$$

geschrieben werden, wobei $S'(A) = D^p \cdot S(A)$ zu setzen ist. Dagegen ist $|D|^\alpha S(A)$ als der einzige irreduzible Bestandteil von $T(A)$ eindeutig charakterisiert. Hieraus folgt zugleich, daß eine zweite unzerfällbare Darstellung

$$T'(A) = |D|^{\alpha_1} \cdot P_{m_1}(\log|D|) \times S_1(A)$$

nur dann mit $T(A)$ ähnlich ist, wenn $m = m_1$, und $|D|^{\alpha_1} S_1(A)$ der Darstellung $|D|^\alpha S(A)$ ähnlich ist, was offenbar erfordert, daß $\alpha_1 - \alpha$ eine gerade ganze Zahl wird.

XVII. *Jede unzerfällbare stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ aller komplexen Substitutionen A in n Veränderlichen mit nicht verschwindenden Determinanten*

$$D = |D| e^{i\phi} \qquad (0 \leqq \phi < 2\pi)$$

läßt sich durch eine konstante Ähnlichkeitstransformation auf die Form

$$T(A) = |D|^\alpha e^{i\nu\phi} P_m(\log|D|) \times S'(A) \times S''(A) \tag{42}$$

bringen. Hierbei bedeutet α eine komplexe und ν eine ganze rationale Zahl, die Matrix $P_m(t)$ hat die frühere Bedeutung, unter $S'(A)$ und $S''(A)$ sind zwei ganze rationale irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ und unter $\bar{A}$ die zu A konjugiert komplexe Matrix zu verstehen (vgl. hierzu die Bemerkung auf S. 122).

Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie beim Satze XVI. Die Gruppe $\mathfrak{R}_n$ denken wir uns mit Hilfe der Gruppe $\mathfrak{U}_n$ aller unimodularen Substitutionen U und der Gruppe $\mathfrak{Q}$ aller Multiplikationen $Q = v E_n$ erzeugt. Setzt man

$$D^{\frac{1}{n}} = |D|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\phi}{n}}, \quad A = D^{\frac{1}{n}} U, \tag{43}$$

so ist die unimodulare Substitution U durch A eindeutig bestimmt.

Ist nun $T(A)$ eine unzerfällbare stetige Darstellung von $\mathfrak{R}_n$, so kann man wieder, da die Darstellung $T(U)$ von $\mathfrak{U}_n$ nach Satz XIV vollständig reduzibel ist, durch eine auf $T(A)$ angewandte Ähnlichkeitstransformation erreichen, daß

$$T(U) = E_m \times T_1(U), \quad T(Q) = C \times E_k$$

wird, wo $T_1(U)$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{U}_n$ bedeutet. Hierbei muß, wenn wieder $Q = v E_n$ ist, $C = L(v)$ eine stetige Lösung der Gleichung

$$L(v)\,L(w) = L(v\,w) \qquad (v\,w \neq 0)$$

sein. Nach Satz XII kann daher angenommen werden, daß C die Form

$$C = r^\beta e^{i\lambda\phi} P_m(n \log r) \qquad (v = r e^{i\phi},\ \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

hat. Das liefert (vgl. die Formeln (43))

$$T(A) = |D|^{\frac{\beta}{n}} e^{\frac{i\lambda\phi}{n}} P_m(\log|D|) \times T_1(U)$$

Nun läßt sich aber nach den Sätzen IV und XIV zu $T_{\text{I}}(U)$ eine irreduzible ganze semirationale Darstellung $S_{\text{I}}(A)$ der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ angeben, die für alle U von $\mathfrak{U}_n$ mit $T_{\text{I}}(U)$ übereinstimmt und in der Form

$$S_{\text{I}}(A) = S'(A) \times S''(\bar{A})$$

gewählt werden darf, wo $S'(A)$ und $S''(A)$ zwei ganze rationale irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{R}_n$ sind. Da $S'(A)$ und $S''(A)$ wieder homogen etwa von den Graden l' und l'' sind, wird

$$T_{\text{I}}(U) = |D|^{-\frac{l'+l''}{n}} e^{\frac{l''-l'}{n} i\phi} S'(A) \times S''(\bar{A}).$$

Das liefert $T(A)$ in der Form (42), nur daß ν noch nicht als ganze rational, sondern in Form eines Bruches $\frac{\mu}{n}$ erscheint.

Soll nun aber (42) eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ liefern, so muß das auch für

$$f(A) = e^{i\nu\phi}$$

der Fall sein, d. h. sind ϕ, ϕ' und ϕ'' die im Intervall $0 \leqq \phi < 2\pi$ gelegenen Amplituden der Determinanten der Substitutionen A, B und AB, so soll

$$e^{i\nu(\phi+\phi')} = e^{i\nu\phi''}$$

sein. Wählt man z. B. A und B so, daß $\phi = \phi' = \pi$ wird, so ist $\phi'' = 0$ zu setzen. Das liefert $e^{2ni\nu} = 1$, folglich muß ν ganzzahlig sein.

Man erkennt wieder wie auf S. 120, daß jede Darstellung der Form (42) unzerfällbar ist, sobald $S'(A)$ und $S''(A)$ irreduzible ganze rationale Darstellungen sind. Ferner übersieht man auch leicht, wann zwei unzerfällbare Darstellungen dieser Art einander ähnlich sind.

Es sei noch bemerkt, daß man wegen

$$e^{i\phi} = \frac{D}{|D|}, \quad e^{-i\phi} = \frac{\bar{D}}{|D|}$$

den in (42) auftretenden Faktor $e^{i\nu\phi}$ auch fortlassen kann, ohne daß für $S'(A)$ und $S''(A)$ auch gebrochene rationale Darstellungen von $\mathfrak{R}_n$ zugelassen werden.

Da wir die irreduziblen ganzen rationalen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{R}_n$ auf Grund der Ergebnisse meiner Dissertation vollkommen beherrschen, werden durch die Sätze XVI und XVII sämtliche stetige Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{K}_n$ genau bestimmt.

§ 9.

Die uneigentlichen Gruppen $\mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{H}_n$.

Die Darstellungstheorie erfordert nicht, daß die gegebene Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Darstellungen durch lineare homogene Substitutionen bestimmt werden sollen, eine »eigentliche« Gruppe mit Einheitselement und inversen Elementen

sei. Sie umfaßt auch den Fall einer »uneigentlichen« Gruppe $\mathfrak{G}$, von der nur vorausgesetzt wird, daß je zwei Elementen A und B von $\mathfrak{G}$ ein eindeutig bestimmtes »Produkt« AB mit assoziativem Kompositionsgesetz zugeordnet wird.

Derartige uneigentliche Gruppen sind insbesondere die Gesamtheit $\mathfrak{G}_n$ aller linearen homogenen Substitutionen G in n Veränderlichen und die Gruppe $\mathfrak{H}_n$ aller reellen Substitutionen von $\mathfrak{G}_n$. Man kann sich auch hier die Aufgabe stellen, alle stetigen Darstellungen $T(G)$ von $\mathfrak{G}_n$ (bzw. $\mathfrak{H}_n$) näher zu kennzeichnen.

Man setze

$$\mathfrak{G}_n = \mathfrak{K}_n + \mathfrak{L}_n ,$$

wo $\mathfrak{K}_n$ (wie früher) alle Substitutionen A von nicht verschwindender Determinante D und $\mathfrak{L}_n$ alle Substitutionen B mit der Determinante 0 umfaßt. Jedes B läßt sich dann als Limes von Substitutionen $A_1, A_2, \cdots$ aus $\mathfrak{K}_n$ auffassen. Wird jeder Substitution G von $\mathfrak{G}_n$ eine Matrix $T(G)$ des Grades N zugeordnet, so haben wir es offenbar dann und nur dann mit einer stetigen Darstellung von $\mathfrak{G}_n$ zu tun, wenn die $T(A)$ eine stetige Darstellung von $\mathfrak{K}_n$ bilden und außerdem stets aus

$$\lim_{\nu \to \infty} A_\nu = B$$

auch

$$\lim_{\nu \to \infty} T(A_\nu) = T(B) \tag{44}$$

folgt. Hierzu ist nur erforderlich, daß dasselbe bei irgendeiner vollständigen Zerlegung von $T(A)$ in unzerfällbare Bestandteile für jeden dieser Bestandteile der Fall sei. Wir können uns daher wieder von vornherein auf das Studium der unzerfällbaren Darstellungen beschränken.

Es ist nun folgendes zu beachten: Geht man von einer beliebigen Darstellung $T(A)$ von $\mathfrak{K}_n$ in N Variabeln aus, so erhält man eine (nicht notwendig stetige) Darstellung $T(G)$ von $\mathfrak{G}_n$, indem man für jedes B aus L_n für $T(B)$ die Nullmatrix des Grades N vorschreibt. Eine solche Darstellung von $\mathfrak{G}_n$ heiße kurz *trivial*.

Wir haben uns nur zu fragen, wann für eine unzerfällbare Darstellung der Gruppe $\mathfrak{K}_n$, die schon auf die Form (42) gebracht sei, die Stetigkeitsforderung (44) erfüllt ist, und wann hierbei insbesondere eine nicht triviale Darstellung von $\mathfrak{G}_n$ entsteht.

Offenbar darf man sich dabei auf den Fall beschränken, daß für keine der beiden in (42) auftretenden ganzen rationalen Darstellungen $S'(A)$ und $S''(A)$ alle Koeffizienten durch D teilbar sind[1]. Dann liefert, wie man sich leicht überlegt, der Faktor $S'(A) \times S''(A)$ die ganze rationale *nicht triviale* Darstellung $S'(G) \times S''(G)$ von $\mathfrak{G}_n$[2]. Es kommt dann nur noch auf das Verhalten des Faktors

$$T'(A) = |D|^{\alpha} e^{i\nu\varphi} P_m(\log|D|)$$

an.

---

[1] Hierzu ist nach den Ergebnissen meiner Dissertation notwendig und hinreichend, daß die Charakteristiken von $S'(A)$ und $S''(A)$ nicht durch D teilbar seien.

[2] Dies lehrt schon (vgl. D., Abschnitt I) die Betrachtung der Substitionen der Form

$$x_1' = w_1 x_1, \quad x_2' = w_2 x_2, \cdots, \quad x_n' = w_n x_n .$$

Soll $T'(A)$ eine stetige Darstellung $T'(G)$ von $\mathfrak{G}_n$ liefern, so muß offenbar α entweder einen positiven Realteil a besitzen oder gleich 0 sein. Ist $a > 0$, so entsteht, wie auch ν und m gewählt werden, eine triviale Darstellung $T'(G)$. Soll also diese Darstellung nicht trivial sein, so muß $\alpha = 0$ sein. In diesem Fall wird aber, wie man unmittelbar einsieht, $T'(G)$ nur dann stetig, wenn $\nu = 0$ und $m = 0$, d. h.

$$T'(A) = 1\,, \quad T(A) = S'(A) \times S''(A)$$

wird.

Das Analoge ergibt sich auf Grund des Satzes XVI noch etwas einfacher für die Gruppe $\mathfrak{H}_n$.

Wir gelangen auf diese Weise zu dem Satz

XVIII. *Soll eine stetige unzerfällbare Darstellung der uneigentlichen Gruppe $\mathfrak{G}_n$ nicht trivial sein, so muß sie eine irreduzible ganze semirationale Darstellung sein. Handelt es sich um die Gruppe $\mathfrak{H}_n$, so kommt nur eine irreduzible ganze rationale Darstellung in Betracht.*

Zu beachten ist noch folgendes. Für die Gruppe $\mathfrak{H}_n$ liefert z. B. die Darstellung

$$T(A) = |D|^{\frac{1}{2}} P_m(\log|D|)$$

von $\mathfrak{R}_n$ für jedes $m \geq 0$ eine (triviale) stetige Darstellung von $\mathfrak{H}_n$. Diese Darstellung ist aber nicht differenzierbar. Denn z. B. ist für die Substitution

$$(A) \qquad x_1' = a x_1\,, \quad x_2' = x_2\,, \cdots, \quad x_n' = x_n \qquad (a > 0)$$

der in $T(A)$ auftretende Koeffizient $a^{\frac{1}{2}} \log a$ an der Stelle $a = 0$ nicht nach a differenzierbar. Dies liefert ein einfaches Beispiel für die Tatsache, daß die schönen Ergebnisse von v. Neumann (vgl. S. 101, Fußnote 3) über die Darstellungen einer eigentlichen Gruppe für uneigentliche Gruppen nicht mehr gelten.

Ausgegeben am 5. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XI. XII

Library of Congress
Aug 6 - 1928
Smithsonian Deposit

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 29. März. (S. 125)
Klassensitzung am 19. April. (S. 126)
RUBNER: Über die physiologische Bedeutung wichtiger Bestandteile der Vegetabilien mit besonderer Berücksichtigung des Lignins. (Mitteilung vom 3. März 1927.) (S. 127)

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

XI. Gesamtsitzung. 29. März.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Pompeckj sprach über das Thema: Zur Geschichte des Ohrskelettes der Wale. (Ersch. später.)

Im Zusammenhang mit der Umprägung von Landsäugetieren zu den einseitigst an das Leben im Wasser angepaßten Walen haben alle Skelettelemente hochgradige Umgestaltungen erfahren. In sehr eigenartiger Weise wurde davon das Ohrskelett betroffen, dessen Umformungen schon frühzeitig — mindestens im jüngeren Eozän — mit dem Verlust der normalen Schallübermittelung verbunden waren. Die Verfolgung der einzelnen Etappen in der Veränderung des Ohrskelettes zeigt ein auffallendes Vorauseilen der Bulla tympanica und der Gehörknöchelchen zur walartigen Gestaltung dieser Elemente, während im Felsenbein und Mittelohr die Ausbildungsart der Landsäugetiere länger erhalten bleibt. Hieraus resultiert eine der Möglichkeiten dem Ausgangstypus der Wale unter den Landsäugern nachzuspüren, der vermutlich den ausgestorbenen Hyaenodontiden unter den Creodontiern (Urraubtieren) nahegestanden hat.

Daß die Größe, Dichte und Massigkeit des Ohrskelettes der Wale mit der vollkommenen Einschränkung dieser Tiere auf das Leben als Schwimmer im Zusammenhang steht, läßt sich durch eine Reihe von Analogien — u. a. auch an Schwimmformen der Reptilien, den fossilen Ichthyosauriern und Mosasauriern — zeigen.

2. Vorgelegt wurde der 7. Bd. der Mathematischen Werke von Karl Weierstrass (Leipzig 1927).

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Emil Wiechert in Göttingen am 19. März durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 23. Mai.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. v. Laue berichtete über neuere Untersuchungen über die Beugung des Lichtes.

Die Experimente von Kalaschnikow, Mitra, Banerji und anderen weisen schlagend die von beugenden Rändern ausgehenden Randwellen nach, welche sich nach den Untersuchungen von Sommerfeld und Rubinowicz aus der Wellentheorie des Lichtes ergeben.

2. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. Reinhardt in Greifswald vor: Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope. (Ersch. später.)

Es wird gezeigt, daß es bei drei und mehr Dimensionen derartige Polytope gibt, die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen sind.

Über die physiologische Bedeutung wichtiger Bestandteile der Vegetabilien mit besonderer Berücksichtigung des Lignins.

Von MAX RUBNER.

(Vorgetragen am 3. März 1927 [s. Jahrgang 1927 S. 50].)

I.

Die Blockadezeit, deren Ende noch kaum ein Jahrzehnt hinter uns liegt, denn ihre Ausläufer schleppten sich in die Nachkriegszeit hinein, hatte unsere Bevölkerung vor umstürzende Umwälzungen der Ernährung gestellt. Unvorbereitet, wie damals die Behörden waren, wußten sie nicht ein noch aus. Wenige Monate nach Beginn des Krieges begann die Zwangsernährung mit der Rationierung der Nahrungsmittel, der Animalien, des Brotes, des Fettes, des Zuckers, der Kartoffeln und aller möglichen anderen Dinge, frei blieben Obst und Gemüse. Die Ernährung wurde ergänzt durch Strecken der Nahrungsmittel mittels Zusätzen verschiedener Art, durch Aufsuchen neuer Nahrungsmittel pflanzlicher Natur. Unzählige Vorschläge aller Art wurden den Behörden unterbreitet. Eine skrupellose Volksbelehrung suchte bald dieses bald jenes Nahrungsmittel oder Surrogat als Rettungsmittel zu empfehlen und die Kriegsernährung als Erlöserin von aller Schwelgerei und als die Ära zur Rückkehr zu einfacheren Sitten zu preisen. Mit der Unkenntnis paarte sich häufig genug gutgemeinter Trug. Heute auf einzelnes rückschauend einzugehen, ist nicht die Aufgabe des Tages, aber die Erkenntnis steht fest, für die große Masse hat die große Not des Volkes keinen dauernden Eindruck hinterlassen. Die Wünsche nach Nahrung sind zu tief im Wesen der einzelnen wie eines Volkes verankert, als daß nicht die Rückkehr zu alten Sitten und Gewohnheiten einträte. Und würde die Verwaltung einer neuen Blockade viel schaffensbereiter gegenüberstehen als ehedem?

Solche Probleme wollen von langer Hand aus erwogen und vorbereitet sein. Sie sind auch nur in Abwägung der großen internationalen Bewegung in der Volksernährung und unter energischer Umgestaltung und Förderung der Landwirtschaft in langer Sicht zu lösen. Auf das allgemeine Ernährungsproblem werde ich an anderer Stelle näher eingehen.

In der Blockadezeit waren auch die wissenschaftlichen Fragen der Nahrungsmittelchemie und Ernährungslehre noch nicht so weit geklärt, als es not-

wendig gewesen wäre. Aber diese notwendige Umgestaltung hat sich doch rasch vollzogen, und jedenfalls haben wir in vieler Richtung einen Vorsprung vor anderen Nationen gewonnen, den man mehr außerhalb als im eigenen Lande gewürdigt hat.

Die Ernährungswissenschaft hat sich bemüht, in jener gärenden Zeit nach dem Rechten zu sehen, die Lücken auszufüllen, die sich überall zeigten, die Mißverständnisse zu heben und vor Mißgriffen zu warnen und darzutun, was an Nahrungsmengen überhaupt notwendig sei, welche Folgen die ungenügende Zufuhr habe und welches die untersten Grenzen der Existenzfähigkeit einer nationalen Ernährung sind.

Es wäre zu wünschen, daß auch in ärztlichen Kreisen diese Erkenntnisse tiefer eindringen und in ihrer Bedeutung erkannt werden. Ein tiefer Abstand trennt die Ernährungswissenschaft von der Modediätetik. Es ist eine irrige Auffassung, als bestände eine Volkskost in der Zusammenstellung beliebiger Nahrungsmittel. Im Gegenteil, eine volkstümliche Ernährungsweise ist eine durch lange, oft Jahrhunderte alte Empirie gewählte Ordnung bestimmter Gerichte. Mit der zwangsweisen Umstellung durch die Blockade war die Möglichkeit der üblichen Ernährungsformen unterbunden.

Auf diese Änderungen und auf ihre Folgen hat man in der Periode der Not kaum geachtet, es muß aber doch einmal ausgesprochen werden, daß schon diese Umgestaltung der Essensweise an sich schwer auf eine Bevölkerung wirkt.

Es soll im nachfolgenden ausschließlich auf die organischen Stoffwechselfragen eingegangen werden, die auch erfahrungsgemäß bei freier Nahrungswahl und gemischter Kost für eine Bevölkerung die ausschlaggebenden sind.

Das Problem der Ernährung liegt, wenn man von dem Gesagten absieht, im Notfall auf rein quantitativem Gebiet, d. h. auf der Möglichkeit, die Menge irgendwelcher Nährstoffe tunlichst zu erhalten oder den Verlust so klein als möglich zu machen. Die quantitative Einschätzung ist aber nur auf energetischem Wege möglich, was, wie es scheint, auch heute noch nicht in weiten Kreisen der Physiologen verstanden wird. Wie ich vielfach an anderen Stellen gesagt habe, ist die Gefahr einer ungenügenden Kalorienzufuhr weit größer als selbst eine längere Einbuße an Eiweißzufuhr, obschon letzteres zu schwerwiegenden Umstimmungen der Disposition zu Krankheiten geführt hat.

Als die animalischen Nahrungsmittel in naher Sicht zu Ende gingen, als Fett, Brot und Kartoffeln schon rationiert waren und ungenügend waren, träumte man von einer Umstellung auf vegetabilische Diät. Was wir damals aber eine vegetabilische Kost nannten, war durchaus eine quantitativ ungenügende und in ihrer Komposition schlechte Kost, auch, von den Geschmackswerten abgesehen, stand sie hinter dem, was vegetabilisch lebende Völkerschaften genießen, weit zurück, weil sie sich auf die minderwertigen Dinge beschränkte, welche einem auf gemischte Kost in seiner Landwirtschaft und Viehzucht eingestellten Volke nur wenige Auswahl zu bieten vermochten.

Man versicherte durch eine Ergänzung der Nahrung durch Gemüse und Obst alles Fehlende zu liefern, obschon man hätte sagen müssen, daß Ge-

müse, die im Frieden nur $^1/_{20}$ unseres Nahrungsbedarfes deckten, unmöglich so plötzlich höhere Erträgnisse liefern können, und daß vom Obst, das kaum $^1/_{40}$ unseres Bedarfes deckte, noch weniger Hilfe kommen konnte.

Wie man nicht an die Produktionsmöglichkeiten kritisch dachte, so hat man auch die Nahrungsmittel einfach nach ihren analytischen Werten, d. h. ohne Rücksicht auf ihr physiologisches Verhalten eingeschätzt.

Bei dem gewaltigen Defizit an Eiweiß in der Blockadenahrung hat man natürlich Ausschau auf weitere N-Quellen gehalten.

Mit Obst und Gemüsen greift man auf eine Nahrungsquelle über, die in ihren Einzelheiten weit weniger bekannt ist als die Animalien oder von den Vegetabilien die Zerealien und Leguminosen.

Aus den vielen Untersuchungen, welche ich darüber in der Kriegszeit angestellt habe, mögen die wichtigsten, soweit hier die Eiweißfrage in Betracht kommt, zusammengestellt sein.

In 100 gr Trockensubstanz sind N bzw. echtes Protein ausschließlich Amidstickstoff:

Nahrungsmittel	N	Protein
Äpfel	0.22	1.37
Kohlrüben	0.51	3.18
rote Rüben	0.65	4.06
Kartoffeln	0.70	4.37
Meerrettich	0.73	4.56
Schwarzwurzeln	0.77	4.81
Teltower Rüben	1.30	8.12
Blaukraut	1.41	8.81
gelbe Rüben	1.45	9.06
Wirsing	1.49	9.31
Blumenkohl	2.24	14.00
Haselnüsse	2.97	18.55
Spinat	2.94	18.36
Grünkohl	3.14	19.01
Steinpilze	3.43	21.43
Salat	3.95	24.68

Wer auf Eiweißquellen ausgeht, findet nach der Tabelle eine Reihe von Gemüsen, die einen Vergleich mit Leguminosen und manchen Animalien aushalten können.

Enthalten ist der Gesamt-N in zweierlei Form, sowohl N als Amid-N usw., und echtes Protein. Auch bei den Zerealien und Leguminosen kommt einiger Amid-N vor, aber in viel geringerer Proportion als bei den Gemüsen usw. (im Durchschnitt).

Die Verteilung von Amid-N zu Protein ist folgende:
Von 100 N sind echtes Protein:

bei Schwarzwurzeln	27.3
» roten Rüben, Wirsing, Rosenkohl, Kohlrüben, Teltower Rüben, Mohrrüben, Meerrettich, Kartoffeln	40—50

bei Blumenkohl 52.4
» Blaukraut 57.5
» Grünkohl 68.1
» Steinpilzen 68.7
» Äpfeln 76.3
» Spinat 81.9
» Haselnüssen 95.5

Die Unterschiede sind also sehr groß, und der Eiweißwert kann nicht unmittelbar aus dem N-Gehalt der Pflanzen ersehen werden.

Es läßt sich der Gedanke nicht abweisen, hier Nahrungsmittel von zum Teil sehr hohem Wert vor sich zu haben, die durch ihre großen Unterschiede im N-Gehalt gewissermaßen den verschiedensten Ernährungsaufgaben dienen können, dem Bedürfnis einer N-armen Diät bis zu N-Mengen, die den Leguminosen oder auch manchen animalischen Nahrungsmitteln (Milch, manche Fleischarten) gleichwertig scheinen.

Gerade weil aber die Zusammensetzung eines Nahrungsmittels an sich für die Volksernährung keineswegs allein ausschlaggebend ist, sondern vor allem die Verdaulichkeit in Frage kommt, habe ich auch diese experimentell in Betracht gezogen, freilich nicht für alle Objekte, sondern mehr für die wesentlichen Typen. Auf die Ergebnisse im einzelnen gehe ich hier nicht ein, aber das Gesamtresultat zeigte so große Verluste bei einzelnen Nahrungsmitteln, daß die natürliche Reihenfolge geordnet nach der chemischen Zusammensetzung durch Verdauungsverluste wesentlich modifiziert, ja sogar umgeworfen wird.

Für das praktische Leben und für den Nährwert bleibt bei allen diesen angeführten Nahrungsmitteln noch zu berücksichtigen die Größe des Abfalls, welcher bei der Zubereitung der Handelswaren bis zur Herstellung eines genießbaren Gerichtes entsteht.

Zieht man beide Momente, Verdaulichkeit und Abfallgröße, in Betracht, so kommt man nach meinen Untersuchungen zu folgendem Bild:

In 100 Teilen Handelsware sind:

	Einfuhr			Verdaut	
	Kal.	Amid-N usw.	Protein	Kal.	N insgesamt
1. Milch	67	0.547		63.6	0.509
2. Fleisch	327	2.7		313	2.6
3. Kartoffeln	98	0.337		90	0.282
4. Roggenbrot	226	0.840		195.5	0.500
5. Wirsing	16.7	0.122	0.091	11.7	0.159
6. Mohrrüben	20.6	0.111	0.096	18.0	0.126
7. Spinat	26.0	0.090	0.407	—	—
8. Äpfel	30.6	—	—	27	—
9. Kohlrüben	33.3	0.041	0.056	26	0.033
10. Steinpilze	132.9	0.509	1.242	85.4	1.133
11. Haselnüsse	187.4	0.035	0.788	184.0	0.823

Hier läßt sich die Stufenleiter der Veränderungen durch die Blockade deutlich erkennen.

Mit dem Ausscheiden des Fleisches haben wir ein hochwertiges, konzentriertes Nahrungsmittel eingebüßt. Kartoffeln und Brot können uns nur einen unvollkommenen Ersatz und einen solchen überhaupt nur dann bieten, wenn wir größere Nahrungsmengen aufnehmen; und betrachten wir uns dann die dritte Gruppierung, die man als freie Nahrungsmittel bezeichnete, wobei Steinpilze und Nüsse, weil in zu geringen Mengen erhaltbar, ganz ausscheiden, so sieht man die Möglichkeit einer Ernährung nur unter Anwendung kolossaler Nahrungsmittelmengen gegeben, wobei noch der Umstand berücksichtigt werden müßte, daß Gerichte, aus Gemüse bestehend, beim Kochen noch wasserhaltiger zu werden pflegen, wie sie von Natur schon sind. Die Beispiele lehren, wie notwendig es ist, bei der Ernährung alle Umstände eingehend zu würdigen.

Praktisch genommen haben die gesuchten Nahrungsquellen auch vollkommen versagt und den Kräfteverfall nicht aufhalten können. Diese Lehre sollte man auch heute nicht vergessen. Denn auch jetzt noch werden dem Obst und Gemüse Nähraufgaben zugeschrieben, die sie nie erfüllen können, auch wenn der Anbau solch erhobenen Wünschen folgen könnte, was nirgendwo auf der Welt der Fall ist.

II.

Die Vorgänge in unserem Organismus bei Umstellung von einer animalischen oder gemischten Kost auf eine vegetabilische werden zunächst gar nicht richtig eingeschätzt. In der Literatur fungiert die vegetabilische Kost gewöhnlich als »eiweißarme Kost«. Das ist an sich nicht zutreffend, denn man kann sowohl eine vegetabilische Kost zusammenstellen, die sogar sehr eiweißreich ist, wie auch die vergleichende Ernährungsphysiologie der Völker zeigt, daß zwischen Völkern gemischter Kost und vegetabilischer Kost im Eiweißverbrauch kein Unterschied ist.

Zutreffender ist schon die Unterscheidung beider Ernährungsweisen mit Bezug auf Verdaulichkeit, wobei die gemischte Kost der vegetarischen im Durchschnitt überlegen ist, besonders auch hinsichtlich des N-Verlustes, der bei Vegetabilien sehr erheblich ist.

Auch darin liegt nicht der eigentliche Unterschied; wir haben es, was man bisher nicht zu würdigen verstand, mit einer völligen Umstimmung und Umstellung in Vorgängen unseres Verdauungskanals zu tun. Ich spreche dabei nicht von dem allgemeinen leicht Feststellbaren und Fühlbaren, der stärkeren Belastung durch die großen Volume der üblichen vegetabilischen Speisen, auch nicht von der gleichfalls belästigenden Gasbildung im Darm und auch nicht von der langsamen Verdauung. Zum Verständnis der Verdauungsprozesse muß ich auf die von mir festgestellte Tatsache verweisen, daß das, was wir »Kot« nennen, im Einzelfalle in der Zusammensetzung grundverschiedene Dinge sind.

Bei den Animalien haben wir so gut wie gar keine eigentlichen Nahrungswerte als Abgang, sondern einige Reste von Verdauungssäften und Reste, die aus der Umsetzung der Eiweißstoffe über die Gallenstufe herrühren. Bei den Vegetabilien trennen sich vor allem deutlich zwei große Gruppen, wirkliche Reste der Nahrung, auf die ich im nächsten Abschnitt zu sprechen komme, und mehr oder minder große Mengen von Resten von Verdauungssäften, die häufig der Ausdruck von gewaltigen Vorgängen im Drüsenapparat des Darmes sind. Die Hälfte und mehr einer Ausscheidung kann auf diesen Rest der Verdauungssäfte fallen.

Diese Anregung zur Sekretion ist wieder nicht allein auf das Eiweiß, Fett oder die Kohlehydrate ihres Aufbaues zurückzuführen, vielmehr wahrscheinlich auf andere Begleitstoffe der Nahrung, vielleicht auf Substanzen des Zellsaftes, deren Wirkung sich in manchen Fällen sogar auf die Erhöhung des Eiweißverbrauches im Sinne also einer Stoffwechselsteigerung bezieht.

Die Organtätigkeit erweist sich also zwischen den beiden Ernährungsformen offenbar grundverschieden. Infolge dieser Steigerung der Stoffwechselproduktausscheidung kommt man bei Betrachtung der Ergebnisse der einzelnen Nahrungsmittel zu höchst auffälligen Konsequenzen, nämlich zu einer oft befremdenden Relation zwischen wirklich Resorbiertem und dem Aufwand an Drüsentätigkeit.

Auf 100 resorbierte Kal. treffen an Stoffwechselprodukten (Kal.)

bei feinstem Weizenbrot	3.8
» Vollkorn-Roggenbrot	8.8
» Äpfeln	10.1
gelben Rüben	12.5
Kohlrüben	21.2
Wirsing	42.6

Wir sehen die Nahrung als einen Reiz auf die Sekretionen wirken, die bei manchen Pflanzen eine außerordentliche Größe erlangt.

In diesen erheblichen Ausscheidungen von Resten der Verdauungssäfte liegt auch zum großen Teil der Verlust an N begründet, den die N-Zufuhr der Vegetabilien bei dem Durchtritt durch den Darmkanal aufweist, außerdem bleibt mehr oder minder wirkliches Eiweiß als solches unverdaut, was in einzelnen Fällen auf den Einschluß mancher Eiweißsorten in Zellmembranen selbst oder auch in anderen Fällen wohl so zu erklären ist, daß Eiweißteile an der Zellmembran selbst haften.

Wir kennen keine Völkerernährung, bei der die Beimengung von Gemüsen die oben angegebene bescheidene Grenze wesentlich überschreitet. Unter normalen Verhältnissen sind Nahrungsmittel dieser Art nur Zutaten. Es wäre wohl möglich, daß die übertrieben erscheinende Wirkung auf den Darm zu einem Vorteil bei Kombination mit anderen nicht gemüseartigen Nahrungsmitteln wird. Beachtenswert mag der Umstand sein, daß Blattgemüse die stärkste Wirkung auf den Darm ausüben.

III.

Der zweite Teil der Verluste der Vegetabilien beim Durchtritt durch den Darm besteht in wirklichen Verlusten von Substanzen, die der Resorption widerstanden haben. Deren gibt es eine ganze Menge, eine ganz überragende Rolle spielen in dieser Hinsicht die Zellwände der Pflanzenzellen. Man hat schon vor Jahrzehnten gewußt, daß in den Pflanzen, auch in denen, die zur Menschenernährung dienen, »Holzfasern« enthalten sind, und diese hat man durch verschiedene Verfahren zu bestimmen gesucht. Die häufigst angewandte Methode ist das Weender-Verfahren und bis heute in Gebrauch.

Genau besehen liegt dem Rohfasergehalt ein rein morphologisches Problem zugrunde. Da man sich das Pflanzengewebe, etwas populär ausgedrückt, etwa wie einen Teil eines Bienenstockes vorstellen kann, der in den Wachswaben Nährstoffe enthält, so kann man sich die Aufgabe stellen, zu trennen zwischen der gehäuseartig aufgebauten Zellmembran der Pflanze einerseits und ihrem Inhalt, dem biologisch wichtigsten Teile, der die lebende Substanz oder wertvolle Reservestoffe einschließt.

Dieses Gehäuse und diese Waben, die zweifellos schon rein mechanisch betrachtet aus harten, zähen Teilen bestehen und besonders überwiegend das Holz darstellen, soll durch die Rohfaserbestimmung erfaßt werden. Das ist auch richtig, insoweit wenigstens die Rohfaserbestimmung einen Teil dieser Stützgewebefasern bestimmen läßt.

Es ist mir aber schon 1915 bei Aufnahme meiner Untersuchungen über Vegetabilien gelungen, an Stelle der Rohfaserbestimmung die wirkliche Isolierung der ganzen Zellmembranen zu setzen, wobei sich wesentlich neue Gesichtspunkte, sowohl in analytischer wie in physiologischer Hinsicht, ergeben haben. Man kann also diese »Waben« aus dem Nahrungsmittelgemisch herausschälen und für sich untersuchen und auch ihr Verhalten im Darm kennenlernen, denn auch ihre Abtrennung aus den Abscheidungen kann man durchführen.

Ich habe dann systematisch alle pflanzlichen Nahrungsmittel daraufhin untersucht und darüber in der phys.-math. Klasse Mitteilung gemacht, aber im wesentlichen nur für solche Pflanzenteile, welche sich zum menschlichen Genuß eignen.

Nur zur Aufklärung der Verhältnisse im allgemeinen sind noch einige Holzarten wie Birkenholz und aus Hölzern oder ähnlich hergestellten Substanzen analysiert worden.

Die Unterschiede im Zellmembrangehalt erweisen sich sehr groß; vom Holz abgesehen, das bei der Birke zu 89% davon enthält, haben wir bei genießbaren Teilen als unterste Grenze etwa wie bei der Kartoffel 5—6% und das andere Extrem bei Rüben und Blattgemüse bis zu 24—30% Zellmembranen. Die Zerealien mit 8—9% für das ganze Korn stehen nicht ungünstig, wie auch die Obstarten, soweit sie untersucht sind. Aber auch in einer Frucht wechselt der Zellmembrangehalt, und zwischen Getreidehülsen, Keimling und Mehlkern finden sich die größten Unterschiede.

Gibt auch die analytisch festgestellte »Rohfaser« im großen und ganzen ein annäherndes Bild der Unterschiede, so differiert die Beurteilung nach Zellmembran oder Rohfaser ganz erheblich. Zunächst schon betragen die Zellmembranen natürlich viel mehr, als der Rohfasergehalt erkennen läßt, und die Rohfaser stellt auch nie einen bestimmten gleichbleibenden Gehalt der Zellmembranen dar. Aus Rohfaser läßt sich die Zellmembran etwa durch Umrechnung nicht finden.

Die praktische Auswirkung der Zellmembranbestimmung besteht darin, daß sich die Gruppe »N-freie Extrakte« der Pflanzen wesentlich verkleinert, manchmal in außerordentlichem Maße. Unter N-freiem Extrakt versteht man die Menge von Stoffen, welche rechnerisch hinterbleibt, wenn man N-haltige Stoffe und Asche und Fett und Rohfaser von 100, d. h. der Trockensubstanz, abzieht. In medizinischen Büchern findet man diesen Rest fälschlich als »Kohlehydrat« berechnet, und häufig wird sogar die Rohfaser noch hinzugezählt. In manchen Nahrungsmitteln, die sich bei Diabetes bewährt hatten, ist die Hemmung der Zuckerbildung dadurch zu erklären, daß sie eben überhaupt viel weniger Kohlehydrate enthalten, als man früher annahm.

In allen bisher untersuchten Fällen, die sich auf sämtliche Gebiete unserer Pflanzennahrung beziehen, haben sich drei Gruppen von Körpern feststellen lassen, einmal Zellulose, dann Pentosane. In allen Fällen blieb aber dann noch ein Rest, den weiter zu entwirren mir damals unmöglich war, weil gerade für jene Stoffe, die in diesem Rest enthalten sind, keine brauchbaren Methoden zur analytischen Trennung vorhanden waren. Ich habe diesen Anteil daher kurz als »Restbestand« zusammengefaßt, und dessen Auflösung späteren Untersuchungen vorbehalten. In diese Sammelgruppe gehören die Lignine, dann auch Hemizellulose, Mannan, Galaktan, welch letzteres schon durch verdünnte Säuren leicht in Zucker übergeführt wird.

In ihrem Äußeren sind diese Zellmembranen rein dargestellt nichts weiter als farblose Substanzen, die nur insofern voneinander etwas abweichen, als da und dort in ihren Formen die kleinsten Teilchen etwas »Struktur« beibehalten, dies kann nicht wundernehmen, da ja der innere Zusammenhang der Bestandteile chemisch nicht zerstört worden ist.

Wer eine endlose Variabilität der Zusammensetzung der Zellmembranen voraussetzt, wird überrascht sein, daß der prozentige Aufbau dieser Teilchen nach den Bestandteilen der drei Gruppen nicht allzu groß ist. Die meisten Zellulosewerte der Zellmembran bewegen sich zwischen 41—48 %, also höchstens die Hälfte besteht aus diesen widerstandsfähigen Massen. Die Pentosane bewegen sich zwischen 15—25 % (mit Ausnahme der Kartoffelzellmembran) und die Restsubstanzen zwischen 29—43 %. Also sind die Pentosane im allgemeinen geringer an Masse als die beiden anderen Gruppen. Wenn eine Nahrung aufgenommen wird, die nur aus einem bestimmten Nahrungsmittel besteht, so läßt sich aus den Ausscheidungen die Zellmembran wieder darstellen und sieht in ihrem Äußeren eigentlich kaum verändert aus. Aber mit der Menge des Aufgenommenen verglichen, gibt es bei unseren Nahrungsmitteln keine Zellmembran, die nicht angreifbar wäre für den menschlichen Darm.

Tabelle.

	In 100 Teilen Trockensubstanz sind Zellmembran	Von 100 Zellmembran sind		
		Zellulose	Pentosan	Rest
Grünkohl	25.9	40.22	26.71	33.07
Spinat	26.6	40.23	24.42	35.35
Wirsing	28.5	41.76	23.48	34.76
Brunnenkresse	13.5	41.95	15.49	42.56
Blumenkohl	28.5	43.79	22.11	34.10
Salat	29.7	47.69	20.65	31.66
Kartoffeln	5.59	40.72	5.55	53.73
gelbe Rüben	26.4	42.72	22.31	35.27
Meerrettich	26.4	44.74	24.57	30.69
Schwarzwurzeln	12.5	47.03	24.15	28.82

Wenn man von Kernen und Steinzellen u. dgl. absieht, die ja unverändert abgehen, kann man sagen, daß von allen drei Komponenten der Zellmembran ein Teil verdaut wird. Wenn auch z. B. die Pentosane gelegentlich den Vorrang in der Aufnahmefähigkeit haben, so ist doch diese erleichterte Auflösung keineswegs als ausnehmend groß zu denken, vielleicht ist eine fermentative Einwirkung nicht auszuschließen.

Der Umstand, daß die im Kot des Menschen auftretenden Reste des Unverdauten nicht allzuweit sich von den aufgenommenen Zellmembranen unterscheiden, kann nur durch die innige Vermengung der einzelnen Komponenten erklärt werden, etwa so, daß nur allmählich eine Loslösung und Auflösung kleiner Partikelchen erfolgt, wobei natürlich der anfängliche Grad der Zerkleinerung durch die etwaige Oberflächenvergrößerung auch eine relative Verbesserung in der Verdaulichkeit der Komponenten bedingen kann.

Bei Beobachtungen an Mast- und Milchtieren hat man die Erfahrung gemacht, daß Dinge, die als verholzt gelten, hinsichtlich der Rohfaserverdauung sich schlechter verhalten als anderes Material. Die Zellulose selber hielt man an und für sich für verdaulich.

IV.

Auf diesem Axiom baute sich in der Blockadezeit sozusagen eine neue Industrie auf: die Aufschließung des Strohes und ähnlicher Dinge zu Kraftfutter für Tiere. Die ganze Bearbeitungsweise beruhte überwiegend auf der Anwendung verdünnter Alkalien. Millionenwerte sind dieser Idee geopfert worden, obschon die Grundgedanken dieses Verfahrens unbewiesen waren.

Schon ehe diese Empfehlungen auftauchten und zu Patenten ausgewertet worden sind, hatte ich darauf hingewiesen, daß wir zur Aufschließung des Holzes gar nicht komplizierter Einrichtungen oder auch nur der Erhitzung bedürfen, um einen erheblichen Teil der verholzenden Teile abzuscheiden, das besorgt schon Alkali bei gewöhnlicher Temperatur.

Eine solche Aufschließung nimmt, wenn man sie quantitativ betrachtet, hauptsächlich die Pentosane fort und einen Teil des Lignins, und die Zellulose wird also in reinem Zustande der Verfütterung zugeführt.

Es soll nicht bestritten werden, daß solches Stroh und dgl., welches vorbehandelt war, vielleicht lieber von den Tieren genommen wurde als anderes unbearbeitetes Material. Ich will mich auch in diese Frage der Tierhaltung nicht weiter einlassen. Im Laufe der Jahre habe ich aber so viel Beobachtungen über den Verdauungsvorgang solcher Zellmembranen an Menschen und Fleischfressern gemacht, daß ich zu einer anderen Auffassung dieser Verdauungsprozesse gekommen bin und die zur Beurteilung führenden Tatsachen in Kürze auseinandersetzen will, was bisher nicht geschehen ist.

Schon vor diesen Untersuchungen des Aufschließens im Großbetriebe habe ich an Birkenholz gezeigt,

1. daß das, was man durch Alkalibehandlung wegnimmt, wesentlich über 70% aus Pentosanen besteht, außerdem aus Lignin und einigen anderen Stoffen,
2. daß ein Unterschied in der Verdaulichkeit der Zellulose im Holz und freigemachter gar nicht nachweisbar ist, jedenfalls keine Verbesserung der Verdaulichkeit herbeigeführt wird.

Wenn also solchen bearbeiteten Strohmassen ein gewisser Wert zukommt, so liegt dieses jedenfalls mehr in den physikalischen Eigenschaften dieser Fütterung, vielleicht seiner größeren Weichheit (Arch. f. Physiol. 1915 p. 100).

Weiterhin hat sich zeigen lassen, daß reine Zellulose, d. h. Filtrierpapier selbst für den Fleischfresser zum Teil, d. h. zu 27% verdaulich ist. Aber sie ist ein ungünstiges Nährmaterial, auch wenn sie ganz rein und frei von Beimengungen vorliegt.

Zellulose ist also nicht nur für den Wiederkäuer, sondern auch für Mensch und Fleischfresser ein bei der Verdauung angreifbares Material, wenn auch nur in beschränktem Maße, aber das verholzte Material unterscheidet sich nicht zu seinen Ungunsten von der freien Zellulose, wenn es durch Zerkleinerung und Vermahlung genießbar gemacht wird.

Versuche einer Verbesserung der Verdaulichkeit von Holz und Stroh durch Säurebehandlung sind damals auch gemacht worden, aber fehlgeschlagen. Zwar kann man Birken- und Koniferenholz leichter zerkleinern, wenn es mit Säure vorbehandelt ist, aber die Zellulose bleibt dabei unverdaulich.

Dies steht im Zusammenhang mit der Tatsache, daß die Zellulose beim Menschen (auch beim Hund) nicht auf dem Wege fermentativer, sondern bakterieller Aufschließung erfolgt, wie das ja von Haberlandt eingehend mikroskopisch verfolgt worden ist.

Die saure Aufbereitung des Futtermaterials hinterläßt immer noch so viel Rückstand an Säure, daß es zu einer bakteriellen Verarbeitung im Darm nicht kommt.

Eine derartige Aufschließung läßt sich nach meinen Beobachtungen sehr leicht auch durch Dämpfe von Cl H erzielen, ohne Anwendung von Wärme, wenn man z. B. Holzmehl in einem Exsikkator über einer Mischung von Cl H und konzentrierter Schwefelsäure stehen läßt. Zuerst greift diese Behandlung keine Zellulose an, wohl aber die Pentosane, diese in Pentosen umwandelnd,

weiter wird Lignin mit schwarzer Farbe freigemacht. Der Brennwert solchen Holzes geht von 4.3 Kal. auf 4.1 Kal. zurück, ein Beweis, daß auch flüchtige Stoffe abgegeben werden.

Man hat also zur Gewinnung einer »rationellen« Tiernahrung Zeit und Geld nutzlos vergeudet. Noch besser werden die Verhältnisse aufgeklärt, wenn wir uns in folgendem nur den Verdauungsprozessen der Zellmembranen bei dem Menschen zuwenden. Den Grad der Löslichkeit der Zellulose habe ich beim Menschen wohl in Hunderten von Versuchen festgestellt wie auch den der Pentosane und schon 1918 publiziert. Aber eine Untersuchung konnte ich damals nicht im einzelnen durchführen, nämlich jene für die Restsubstanz, oder ich mußte wenigstens offenlassen, aus welchen Gründen sie sich verschieden verhält. Und diese Lücke sei jetzt ausgefüllt.

V.

Die Restsubstanzen, nach meiner Bestimmungsmethode hergestellt, enthalten mehr oder weniger Lignin. Es erschien mir erwünscht, die Rolle des Lignins bei der menschlichen Ernährung durch direkte Bestimmung in den Einnahmen und Ausgaben näher kennenzulernen. Von anderer Seite liegen einige quantitative Bestimmungen des Lignins in Hölzern vor, das letztere macht etwa die Hälfte der Zellulose aus.

	% Lignin	Zellulose (pentosanfrei)
Birke	19.6	45·3
Buche	22.5	53·5
Fichte	28.3	57.8
Kiefer	26.3	54·5

(Fuchs, Die Chemie des Lignins 1926 p. 72)

Mein Birkenholz enthielt in 100 Teilen:

Zellulose	33.8
Pentosane	29.2
Rest	16.4

also weniger Zellulose als oben, aber das Verhältnis von Restsubstanz zu Zellulose war wie 1 : 2, d. h. in der Restsubstanz scheint also bei Hölzern nur Lignin zu sein. Über das allgemeine Vorkommen des Lignins und sein Verhalten in der Natur steht etwa folgendes fest:

Alles Wachstum geht von unverholzten Zellen aus, manche Pflanzenhüllen halten sich dauernd unverholzt, wie Algen und Flechten[1], bei den Moosen ist die Verholzung nur angedeutet. Stark verholzte Gewebe enthalten keine Nährstoffe mehr. Bei Aussaat von Getreide können schon nach wenigen Tagen an den Gefäßen Verholzungen beobachtet werden. Zuerst scheint methoxylhaltiges Lignin angelagert zu werden. In vielen Fällen dient es zur Versteifung der Gewebe, ähnlich wie die Einlagerung von Kieselsäure. Hölzer

[1] Fuchs, Die Chemie des Lignins p. 208ff.

enthalten zwischen 20—30% Lignin, zumeist 25—28%, die Weichhölzer mehr als die Harthölzer, Gräser führen 15—20% Lignin, Nadeln sind verholzt, Blätter fast immer unverholzt. Das Lignin scheint keine Reservesubstanz zu sein[1], also zu späterer Auflösung nicht bestimmt zu sein.

Außerhalb der Körper erleidet die Zellulose häufig eine Auflösung unter Gasbildung und Auftreten niederer Fettsäuren, unter letzteren hauptsächlich hervortretend findet sich Essigsäure und Buttersäure, die gleiche Zerlegung beobachtet man auch im Darmkanal[2].

Beim Faulen von Holz hat man folgende Beobachtung gemacht. Es wurde gefunden[3]:

	Zellulose	Methoxylzahl	Alkali-löslich
frisches Holz	59.0	3.9	10.6
halb vermodert	41.7	5.2	38.1
ganz vermodert	8.5	7.8	65.3

Man schließt hieraus auf eine Anreicherung faulen Holzes an Lignin, letzteres widersteht dem Bakterienangriff besser als Zellulose und gibt die Grundlage zur Humusbildung und zu den weit verbreiteten Humuskohlen, während bei der Bildung der Sapropelkohlen Umsetzungen durch Faulschlamm eine Rolle spielen.

Der Betrachtung der Verdaulichkeit des Lignins seien die wesentlichsten Tatsachen über die Verdaulichkeit der sonstigen Bestandteile der Zellmembran vorausgeschickt.

Nach meinen Versuchen am Menschen kann gesagt werden, daß sich eine einfache Beziehung der Verdaulichkeit zum Aufbau der Zellmembran nicht dartun läßt.

Wenn dem Lignin die Eigenschaft der Erschwerung der Verdauung zugeschrieben wird, so wäre damit noch nicht gesagt, daß zwischen beiden eine strenge Abhängigkeit bestünde, weil die Verteilung des Lignins keine gleichmäßige ist und manchmal nur einzelne Teile der Pflanzengewebe mit Ligninanlagerung versehen sind.

Von den drei Gruppen der Bestandteile der Membranen kann man den Pentosanen die leichteste Lösbarkeit zusprechen, schon milde chemische Eingriffe spalten diese ab. Die Herauslösung der Pentosane aus der Zellmembran schreitet sogar in den unteren Darmabschnitten weiter fort, wo sie dann unresorbiert liegenbleiben können.

Am unberechenbarsten erweist sich beim Menschen die Verdauung der Zellulose, sie ist individuell bei demselben Nahrungsmittel bei gleichzeitiger Verfütterung an verschiedenen Personen ganz verschieden, was offenbar damit zusammenhängt, daß hauptsächlich Bakterien an der Aufspaltung der Zellulose beteiligt sind und die Bedingungen für das erforderliche Bakterienwachstum sehr leicht sich ändern. Ein zelluloselösendes Ferment, wie es bei einigen Schnecken vorkommt, besitzen, wie es scheint, auch die Wiederkäuer nicht.

---

[1] Fuchs l. c. p. 244.
[2] Rubner, Zeitschr. f. Biol. XIX p. 81.
[3] Fuchs p. 248.

VI.

Die mit reiner Zellulose und an Hölzern gemachten Anschauungen über die Verdaulichkeit der Zellulose darf man aber nicht auf die menschlichen Nahrungsmittel im allgemeinen übertragen. Schon bei den Körnerfrüchten zeigen sich etwas günstigere Verhältnisse.

Die weitere Untersuchung der Verdaulichkeit von vegetabilischen Nahrungsmitteln hat Ergebnisse gezeitigt, welche in mancher Richtung ziemlich unerwartet waren. Eigentlich sollte man annehmen, wenn die reine Zellulose in ihrer Verdaulichkeit bekannt ist, müßte sich daraus die Eigentümlichkeit der Verdauung der Zellulose verschiedener Nahrungsmittel leicht voraussagen lassen. Die Experimente ergaben aber nachfolgendes in Prozenten:

Tabelle.

	Bei der Verdauung im Verhältnis zur Zufuhr in der Kost	
	Verluste an Zellmembran	Verluste an Zellulose
Mohrrüben	5.92	9.64
Wirsing	11.68	12.90
Kohlrüben	17.40	17.4
Äpfel	22.00	21.2
Roggenkeimlinge	32.23	47.5
Roggenvollkorn	51.00	56.1
Birkenholz	64.9	60.8
präpariertes Fichtenholz	67.7	93.5
Filtrierpapier	73.0	73.0

Die Tabelle führt eine Reihe von Nahrungsmitteln auf. Verschiedene Personen haben sich mindestens mehrere Tage mit einem dieser Nahrungsmittel allein und ausschließlich ernährt. Darunter sind Gemüse, Wurzelgewächse, Obst, Brot und zum Vergleich ein Versuch über Holzfütterung am Hund.

Auf Grund der Verdaulichkeit beim Menschen zeigen die pflanzlichen Zellmembranen sich grundverschieden. Und ebenso grundverschieden, wenn man auch den Zellulosegehalt für sich betrachtet. Derselbe chemische Körper wird das eine Mal mit einem Verlust von 6—9 %, das andere Mal mit 73—93 % Verlust verdaut und gerade die rein dargestellte Zellulose am allerungünstigsten. Würden wir gefunden haben, daß reine Zellulose sehr leicht verdaut wird, dann wäre die Theorie von der Hemmung durch Zunahme inkrustierender Substanzen ganz selbstverständlich und überzeugend.

Sonach bleibt keine andere Erklärungsweise, als daß es eben verschiedene Zellulosen mit verschiedenen Verdaulichkeitsgraden gibt. Möglichkeiten einer solchen Annahme würden vielleicht gefunden werden können im verschiedenen kolloidalen Aufbau. So spricht man z. B. von junger Zellulose, aber immer nur in dem Sinne der Verholzungstheorie. Eine andere Annahme wäre die Voraussetzung einer verschiedenen Zusammensetzung der Zellmembranen unter

Einfügung von Molekülkomplexen, welche sich gewissermaßen nur bei Verschiedenheiten des kolloidalen Aufbaus finden. Zu denken wäre dabei an Verbindungen jugendlicher Zellformen mit Eiweißstoffen und Lipoiden.

Gestützt würde eine solche Vorstellung durch eine Beobachtung hinsichtlich der Verdauungsfähigkeit der Zellmembranen von gelben Rüben. Stellt man nämlich diese Zellmembranen rein dar, wobei sie ein feines flockiges, farbloses Material bilden, und füttert es an Hunde, da sich ein entsprechender Versuch an Menschen nicht machen läßt, so hört die gute Verdaulichkeit auf. Im frischen Zustand bzw. auch nach dem Kochen verhält sich also die Zellmembran anders.

Erfolgt die Verdauung auch bei den leichtverdaulichen Membranen durch bakterielle Angriffe auf die Zellulose, so wäre es immerhin auch möglich, daß die Bakterienflora bei bestimmten Nahrungsmitteln eine ganz verschiedene ist, und deshalb bei der Fütterung rein dargestellter Zellmembranen mit anderen Nahrungsmitteln zusammen zur Entwicklung besonderer Bakterienspezies kein geeigneter Nährboden vorhanden ist.

Bei der allgemeinen Meinung, daß besonders den Ligninsubstanzen die Schwerverdaulichkeit zuzuschreiben sei, wird die Bestimmung des Lignins als wichtig erscheinen müssen.

Damit begibt man sich auf ein Gebiet, das in vielen Richtungen noch recht unaufgeklärt ist. Denn schon bei der Definition und Charakterisierung gehen die Meinungen auch heute noch erheblich auseinander.

König und Rump verstehen unter Lignin die nicht flüchtigen, alkohol- und ätherunlöslichen methylierten Verbindungen der Pflanzen, die ihren Methylalkohol nicht schon durch Behandlung mit NaOH, wohl aber mit starker Schwefelsäure abgeben. Da der Methylalkohol der Verbindungen wechselnd sein dürfte, läßt sich aus dem ersteren nicht auf die Ligninmasse schließen.

Von anderer Seite wird einfach das in 72% Schwefelsäure Unlösliche als Lignin aufgefaßt.

Das kürzlich erschienene Buch, Die Chemie der Lignine von W. Fuchs zeigt in ausführlicher Weise die zahllosen Vorschläge und Verfahren zur Klärung der Methodik und Darstellung sowie die schwankenden Vorstellungen über Zusammensetzung und Herkunft dieser zweifellos wichtigen Stoffe.

Das Aussehen verschiedener Ligninpräparate ist verschieden. Je nach der Darstellungsweise erhält man es als gelb bis tiefbraun in dicken Schichten schwarz aussehende Substanz. Bei den Bemühungen, in der Kriegszeit Zucker aus Holz zu bereiten, wurden große Mengen dieses Lignins als unverwertbarer Abfall erhalten.

Ob die schwere Zerlegbarkeit oder geradezu eine Unzerlegbarkeit des Lignins auch für die biologischen Vorgänge bei der Verdauung gilt, darüber kann man ohne weiteres aus dem von anderer Seite gebrachten Material keinen Schluß ziehen.

Eben deshalb habe ich schon vor Jahren Experimente zur Aufklärung dieser Frage angestellt und weitergeführt und will sie hier mitteilen, da

mir die experimentelle Arbeit weiterhin durch äußere Umstände unmöglich gemacht worden ist.

Ich habe eine Reihe von Verfahren zur Trennung des Lignins von anderen begleitenden Substanzen, und zwar schon im Jahre 1915, geprüft. Einen Weg bot die Verwendung von Ammoniak. Die Verwendung von Säuren (Mineralsäuren und deren Gemische und organische Säuren) schien mir aber einfacher. Die Verzuckerung des Holzes durch Anwendung von Salzsäure war, wie schon erwähnt, ein Verfahren, das günstige Resultate aufgewiesen hatte. Unter all diesen Vorschlägen ist die Methode Willstätters, bestehend in der Auflösung einer Substanz pflanzlicher Herkunft in Salzsäure von 1.21 spez. Gewicht, wobei man als Lignin ein tiefbraunes Produkt erhält, weitaus die beste und handlichste.

Prof. Heuser hat mir seinerzeit Lignin aus Holz überlassen. Die schwarze Masse enthielt 92.2% Trockensubstanz und nur 0.32 Asche. Davon läßt sich nur wenig in salzsaurem Alkohol und beim Kochen in Chloralhydratlösung extrahieren. Pentosane sind nicht darin enthalten, durch Behandlung mit Cl (chlorsaurem Kali und Salzsäure) wird die Masse gelb und ist dann in Ammoniak ohne Rückstand löslich, also zellulosefrei. 1 gr organischer Trockensubstanz lieferte 6.277 kg/cal. an Verbrennungswärme, Holz nur etwa 4.2 kg/cal. Die Verbrennungswärme ist also viel höher als die von Kohlehydraten, was mit der Annahme über die Natur der Lignine in gutem Einklang steht.

Im Gesamtdurchschnitt enthalten Lignine etwa

C	H	O
63.12	5.9	31.0

(s. Fuchs l. c. p. 75) mit mancherlei Differenzen im einzelnen. Das Molekulargewicht steht noch nicht fest.

Die schwarze, meist fest zusammenbackende Masse ist nicht das ursprüngliche Lignin der Nahrungsmittel selbst. Die Lignine lassen sich ohne Farbenveränderung aus Hölzern mit Ammoniak ausziehen (Rubner, Arch. f. Anat. und Physiol. 1916, p. 48) worauf die Einwirkung der Salzsäure keine weitere Schwärzung des Holzes hervorruft. Wir haben keinen Grund, anzunehmen, daß ein gröberer quantitativer Abbau bei der Darstellung des Lignins mittels Salzsäure vorkommt.

Aus den zahlreichen Versuchen über die Verdaulichkeit pflanzlicher Nahrungsmittel, die ich in den Jahren 1915 bis 1918 ausgeführt habe, läßt sich aus dem Verhalten der ligninhaltigen Restsubstanz immerhin mit Sicherheit entnehmen, daß auch Lignine beim Hund und Menschen verdaut werden.

Der einzige ältere quantitative Versuch, die Resorbierbarkeit von Lignin festzustellen, ist von König und Becker am Pflanzenfresser ausgeführt worden, dabei wird angegeben, daß Lignin der Weizenkleie nicht, wohl aber freies Lignin beim Schaf zu 17.6—18.9% verdaulich sei. Die Versuchsanordnung war aber dabei so kompliziert, daß m. E. ein bestimmter Entscheid nicht getroffen werden kann, zumal auch, wie schon berührt, das gefütterte abgespaltene Lignin möglicherweise nicht in allen Eigenschaften mit dem in den

Membranen gefundenen ursprünglichen übereinstimmt. (Veröffentlichungen der Landwirtschaftskammer der Provinz Westfalen 1918.)

Für die Untersuchungen auf Lignine empfiehlt es sich nicht, die Nahrungsmittel als solche zu verwenden, da ein derartiges Gemenge verschiedener Stoffe der Reindarstellung große Schwierigkeiten entgegensetzt. Für meine Versuche wurden zuerst die Zellmembranen der Nahrungsmittel und ebenso die Zellmembranen des Kotes dargestellt. In diesem ist an Verunreinigung nichts anderes mehr vorhanden als kleine Mengen von Stickstoffsubstanz und Asche. Als sich in einer Reihe von Vorversuchen das Verfahren nach Willstätter bewährt hatte, habe ich es auch weiterhin beibehalten.

Die Ausführung der Methode von Willstätter (Chem. B. 46, 2401, 1913) stößt, wie schon gezeigt, bei den für uns interessierenden Stoffen auf manche Schwierigkeiten, weil die Auflösung der Zellmembranen in der konzentrierten Salzsäure nicht immer schnell erfolgt, sondern manchmal längere Zeit erfordert. Ist die Reaktion zu Ende, so wird durch einen mit Asbest beschickten Goochschen Tiegel filtriert und mit konzentrierter Salzsäure nachgewaschen, schließlich der Salzsäurerest mit Wasser und mit Alkohol und Äther ausgewaschen, getrocknet und gewogen.

Nach diesem Verfahren wurden folgende Ergebnisse erzielt: Birkenholz, feinst gepulvert, gab 17.2 % Lignin.

Das Präparat enthielt in 100 Teilen 81.10 Zellmembran mit

33.2 % Zellulose
28.9 % Pentosan
37.9 % Rest (= 30.7 Teile auf das Holz gerechnet)

Von der Restsubstanz waren 17.2 Teile Lignin = 56 %, also über die Hälfte (s. auch oben).

In einem Fütterungsversuch am Hund gingen zu Verlust:

70 % der Zellulose
52.6 % des Pentosanes
62.9 % der Restsubstanz

Man könnte also annehmen, wenn man die Zahlen so deuten will, das Lignin sei quantitativ zu Verlust gegangen und die anderen Teile der Restsubstanz ohne jeden Verlust verdaut worden. Dieses ist aber zweifellos sehr unwahrscheinlich und die Zersetzung eines Teiles des Lignins sicher.

Die Haselnußschalen sind eine Substanz, die man a priori als etwas völlig Unverdauliches ansehen mag, doch habe ich zeigen können, daß bei feinster Pulverung auch dieses harte Material beim Hunde verdaulich ist. 100 Teile Zellmembran enthielten:

36.68 % Zellmembran
27.72 % Pentosane
35.60 % Restsubstanz

Wir fanden bei einer anderen Probe 35.8 % der Membranen an »Lignin«; somit scheint die ganze Restsubstanz aus Lignin zu bestehen.

Bei der Verdauung gingen verloren:

von	der Zellulose	58.2 %
»	» Pentosane	62.86 %
»	» Restsubstanz	59.54 %

Reine Kleiezellmembranen aus Weizen enthielten nach meinem Versuch in 100 Teilen Zellmembranen

20.7 % Zellulose
40.48 % Pentosane
30.05 % Restsubstanz

Gefunden wurden auf Reinkleie berechnet = 17.9 % Lignin = 59.6 % der Restsubstanz.

Beim Hund ist von solcher Kleie nicht verdaut worden:

75.0 % der Zellmembranen
44.7 % der Zellulose
38.7 % von Pentosanen
25.3 % der Restsubstanz

Da nun $^1/_4$ der Restsubstanz verlorenging, etwa 60 % aber aus Lignin bestehen, so folgt von selbst, daß hier der Beweis für die Verdaulichkeit der Lignine des Getreidekorns vorliegt.

Im Gegensatz zu den Körnerfrüchten, deren Zellmembranmasse durch die Kleie repräsentiert wird, schwer verdaulich ist, und auch reichlich Lignine enthält, stehen Wurzelgewächse und Blattgemüse. Zwei Beispiele werden zu einem Einblick genügen. Die Mohrrüben haben eine Zellmembran, die sich aus

42.42 % Zellulose
22.31 % Pentosane
35.27 % Restsubstanz (2.2 Lignin)

zusammensetzt.

Die Zellmembran, die sich chemisch nicht wesentlich von anderen schwer verdaulichen unterscheidet, wird außerordentlich gut resorbiert, so daß nur verlorengehen:

von	der Zellmembran	5.92 %
»	» Zellulose	9.64 %
»	» Pentosane	4.19 %
»	» Restsubstanz	2.79 %

Die Mohrrüben unterscheiden sich von allem bisher aufgeführten Pflanzenmaterial durch ihren geringen Ligningehalt von 2.2 % der Zellmembran. Von der Restsubstanz sind nur 6.2 % Lignin. Mikroskopisch findet man als »Lignin« braunschwarze Krümel und schwarze Spiralgefäße. Aus meinen Versuchen am Menschen hat sich also ergeben, daß sich in den Ausscheidungen

mikroskopisch auch im wesentlichen als geformte Masse nur die Spiralgefäße der Mohrrüben nachweisen lassen, so daß es hier naheliegt, die Unverdaulichkeit oder Schwerverdaulichkeit einzelner Teile der Zellmembran auf diese Imprägnation von Lignin zu beziehen, vorausgesetzt, daß nicht auch nebenbei noch eine Verkorkung des Spiralgefäßes eine Rolle spielt.

Von Blattgemüsen wurde der Wirsing analysiert. Nach meinen Analysen enthält die Zellmembran

38.96 % Zellulose
23.55 % Pentosane
37.49 % Restsubstanz (4.66 % Lignin)

Von der Restsubstanz ist nur ein kleiner Teil Lignin, die Zellmembran enthielt 4.66 % davon, also nur 12.4 % der Restsubstanz. Die Zellmembran des Wirsings gehört ebenso wie die der Mohrrüben zu den leichtverdaulichen. Zu Verlust gegangen sind:

von	den Zellmembranen	11.68 %
»	der Zellulose	12.93 %
»	» Restsubstanz	10.09 %

Die vorliegenden Tatsachen beweisen, daß die Lignine nirgendwo die Hauptmasse der Zellmembranen ausmachen, daß sie sogar in stark verhärteten Massen oft nur in mäßigen Mengen vorkommen, daß sie ferner nicht zu den schwerverdaulichen Stoffen gehören.

Bei einer Kotprobe, welche bei Ernährung mit Kriegsbrot gewonnen war, sind 18.95 % Lignin gefunden worden, woraus sich für den Tag 6.53 gr Lignin als Ausscheidung ergaben. Im Brot hat der Ligningehalt etwa 12.6 pro Tag ausgemacht, was einem Verlust von rund 51.6 % entspricht. Der Verlust an »Restsubstanz« war bei dem betreffenden Manne zu 36.7 % gefunden worden, woraus folgt, daß die anderen Komponenten der Restsubstanz besser als das Lignin verwertet würden.

Bei Klopferbrot waren in der Aufnahme eines Mannes etwa 7.9 gr Lignin täglich. In den Ausscheidungen wurde an Lignin 3.97 gr gefunden, also ein Verlust von 50.2 %, während die Restsubstanz im ganzen 66.3 % verlor. Bei Gerstenbrot wurden etwa 7.8 gr Lignin aufgenommen und 4.2 gr Lignin in der Ausscheidung gefunden = 55.4 % Verlust. Von der Restsubstanz waren verlorengegangen 32.8 %.

Im ganzen genommen stellte sich der Ligninverlust in den beobachteten Fällen also nicht sehr verschieden heraus, bei den Haselnußschalen auf 59.5 %, bei den Brotversuchen auf 51.6, 50.2, 55.4 %, also auf $^5/_{10}$—$^6/_{10}$ der Einfuhr.

In welcher Weise das Lignin schließlich im Organismus abgebaut wird, darüber läßt sich zur Zeit keine Angabe machen. Obschon die Mengen des verdaulichen Anteils des Lignins nicht allzu gering sind, kommt aber doch vom Standpunkt der Energieversorgung dem verdauten Lignin eine größere Bedeutung beim Menschen nicht zu.

Die Zusammensetzung der Zellmembranen gestaltet sich unter Einrechnung des Ligningehalts wie folgt:

	Schwer aufschließbare Membran			Gut aufschließbare Membran	
	Birkenholz	Haselnuß-schale	Kleie	Mohrrüben	Wirsing
Zellulose	33.2	36.68	29.7	42.43	38.96
Pentosan	28.9	27.70	40.48	22.31	23.55
Lignin	17.2	35.60	17.90	2.00	4.66
Rest	20.7	—	12.02	32.96	32.83

Die schwerverdaulichen Zellmembranen enthalten also mehr Lignine als die leichtverdaulichen.

Da aber die Verdaulichkeit der Zellulose von der Verholzung oder dem Ligningehalt, wie früher gezeigt, nicht abhängig ist, so haben wir die Lignine nur als Leitsubstanzen zu betrachten, die nur die Schwerverdaulichkeit der verschiedenen Zellulosen markieren.

Ausgegeben am 23. Mai.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XIII—XVI

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 26. April. (S. 147)
Klassensitzung am 3. Mai. (S. 148)
K. Reinhardt: Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope. (Mitteilung vom 19. April.) (S. 150)
Gesamtsitzung am 10. Mai. (S. 156)
Adresse an Hrn. Alois Brandl zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 3. Mai 1928. (S. 157)
Rubner: Die Welternährung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. (Mitteilung vom 2. Februar.) (S. 159)
Klassensitzung am 24. Mai. (S. 184)
Ludendorff: Über die Abhängigkeit der Form der Sonnenkorona von der Sonnenfleckenhäufigkeit. (S. 185)

Library of Congress
JAN 11 1929
Smithsonian Deposit

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang einer aufzunehmenden Mitteilung soll in der Regel in den Sitzungsberichten bei Mitgliedern 32, bei Nichtmitgliedern 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte, in den Abhandlungen 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der Abhandlungen nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 200 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XIII. Gesamtsitzung. 26. April.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Eduard Meyer sprach über Ursprung und Entwicklung des dynastischen Erbrechts auf den Staat und seine geschichtliche Wirkung, vor allem auf die politische Gestaltung Deutschlands.

Während die Anschauung, daß der Anspruch auf das Königtum nur einer bestimmten Familie zusteht, aus der der Herrscher entnommen werden muß, überall verbreitet ist und sich daraus die verschiedenen Gestaltungen der Thronfolge entwickelt haben, ist die privatrechtliche Behandlung des Erbrechts auf den Staat und die daraus sich ergebenden Erbteilungen, die Ansprüche der Töchter und der weiblichen Linie auf die Erbfolge, die Vererbung durch Heirat allen anderen Gebieten der Geschichte in Orient und Okzident völlig fremd. Sie hat sich im Frankenreich gebildet und ist von hier aus dominierend für den ganzen Verlauf der Geschichte des Abendlandes in Mittelalter und Neuzeit geworden. Dies wird an einzelnen Beispielen weiter ausgeführt und vor allem an der Geschichte Deutschlands, dessen territoriale Gestaltung bis auf den heutigen Tag dadurch bestimmt ist.

2. Hr. Eduard Meyer überreichte die 1. Abt. des II. Bandes seiner »Geschichte des Altertums« (2. Aufl., Stuttgart und Berlin 1928).

3. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt:

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse:

500 *RM* für eine Reise des Hrn. Dr. P. Woldstedt in Berlin zum Studium der Glazialfragen in Nordamerika,

1500 *RM* dem ordentlichen Mitgliede Hrn. Nernst zum Bau eines Dynamometers und zur Beschaffung anderer Apparate für eine Untersuchung der Frage nach der absoluten Geschwindigkeit der Erde,

2500 *RM* für den Abschluß der Arbeiten des Hrn. Dr. H. Louis in Berlin im Piringebirge in Bulgarien;

durch ihre philosophisch-historische Klasse:

600 *RM* für Herstellung von Photographien englischer Dekretalen-Handschriften durch Hrn. Dr. W. Holtzmann in Berlin.

Ausgegeben am 18. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XIV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 3. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Schmidt las: Über die Charliersche Entwicklung einer »arithmetischen Verteilung« nach den sukzessiven Differenzen der Poissonschen asymptotischen Darstellungsfunktion für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. (Ersch. später.)

Für die von Charlier in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführte und von Ch. Jordan weiteruntersuchte Entwicklung einer »arithmetischen Verteilung« $v(t)$ $(t = 0, 1, 2, 3 \cdots)$ in die Reihe

$$v(t) = \sum_n^{\infty} c_n \psi_n(t),$$

wobei $\psi_0(t)$ durch die Poissonsche Formel

$$\psi_0(t) = \frac{a^t}{t!} e^{-a}$$

und die $\psi_n(t)$ durch ihre sukzessiven Differenzen

$$\psi_n(t) = \psi_{n-1}(t-1) - \psi_{n-1}(t)$$

definiert sind, hat Frau Dr. H. Pollaczek-Geiringer, Berlin, den ersten Konvergenzbeweis gegeben.

In der vorliegenden Note wird ein neuer einfacher Beweis gegeben, der unter weiteren Voraussetzungen gilt und nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige Bedingungen für die Konvergenz der obigen Entwicklung liefert.

2. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. G. Pólya in Zürich vor: »Eine Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete.«

Es sei A eine beschränkte ebene Punktmenge, deren Komplementärmenge G ein Gebiet ist, in dem eine Potentialfunktion $u(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften existiert. $u(x, y)$ ist im Endlichen regulär, verschwindet am Rande von G und genügt der Bedingung $\lim_{|z| \to \infty} (\log|z| - u(x, y)) = \log \tau$, wo τ eine passende Zahl bedeutet $(z = x + iy)$. Die Gesamtlänge des Schattens, die A bei senkrechter Projektion auf eine jede Gerade derselben Ebene wirft, ist dann höchstens 4τ.

3. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit von Hrn. Dr. E. Hopf in Berlin-Friedenau vor: Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern.

$L(u)$ sei ein positiver linearer Funktionaloperator. In der Arbeit wird

1. bei nichtsingulärem Operator L ein Satz von Perron-Frobenius-Jentsch über den absolut kleinsten Eigenwert der Gleichung $u = \lambda L(u)$ neu bewiesen;

2. unter gewissen Voraussetzungen der Satz bewiesen: gibt es zwei, den Ungleichungen

$$\phi < \Phi, \qquad \phi \leqq L(\phi), \qquad \Phi \geqq L(\Phi)$$

genügende Funktionen ϕ und Φ, so gibt es eine Lösung der Gleichung $u = L(u)$ mit $\phi \leqq u \leqq \Phi$;

3. eine spezielle Anwendung von 2. auf singuläre Integralgleichungen der Form

$$u(x) = \lambda \int_0^\infty H(x-t)\, u(t)\, dt, \quad H > 0$$

gemacht.

4. Vorgelegt wurde der mit Unterstützung der Akademie erschienene 2. Faszikel des Supplement-Bandes der »Opuscula Ichneumonologica« von Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht (Blankenburg i. Thür. 1928).

Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope.

Von Prof. Dr. Karl Reinhardt
in Greifswald.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 19. April 1928 [s. oben S. 126].)

Hilbert hat in seinem bekannten Vortrag über »Mathematische Probleme« (Gött. Nachr. 1900) auch die Frage aufgeworfen, ob nur Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen die Eigenschaft besitzen, eine Zerlegung des euklidischen n-dimensionalen Raumes R_n in kongruente Bereiche zu liefern. Für $n = 2$, also für die euklidische Ebene, ist dies tatsächlich der Fall; mit diesem Problem beschäftigt sich eine kürzlich in diesen Sitzungsberichten erschienene Arbeit von mir und eine später erscheinende Fortsetzung derselben. Dagegen ist die Frage für $n > 2$ zu verneinen, wie ich hier an Beispielen zeigen will.

Ich behandele zunächst den Fall $n = 3$. Hier liegt der innere Grund für die Existenz von Zerlegungsbereichen (d. s. Bereiche mit der Eigenschaft, daß sich der R_3 in zu ihnen kongruente Exemplare zerlegen läßt), die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen des R_3 sind, ja sogar von Zerlegungspolyedern von dieser Beschaffenheit, darin, daß es mehrfach zusammenhängende Zerlegungspolyeder gibt, die keine Fundamentalpolyeder sind. Ein solches kann leicht aus dem in Abb. 1 dargestellten Polyeder P gewonnen werden. P entsteht aus einer rechteckigen Platte von der Dicke a, der Breite $3 \cdot a$ und der Länge $4 \cdot b$ durch Anbringen eines Loches und eines Einschnitts. Loch und Einschnitt haben die Form quadratischer Säulen von der Höhe b und mit der Grundkante a, und sind so beschaffen, daß sie die Breite der Platte in drei und ihre Länge in vier gleiche Teile teilen.

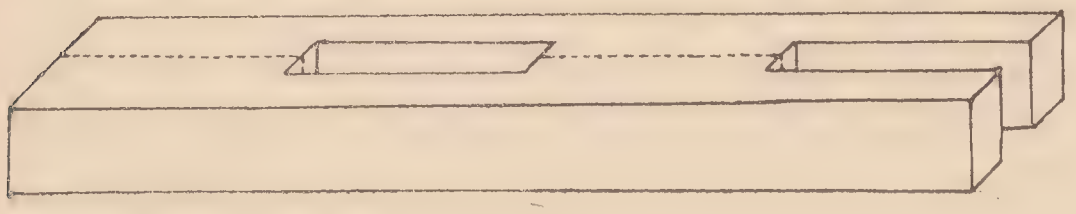


Abb. 1.

Ich will zuerst einen Überblick über die Arten gewinnen, auf welche sich der Raum in Exemplare P zerlegen läßt. Ich kann zunächst aus je zwei Exemplaren P drei verschiedene einfach zusammenhängende Zerlegungspolyeder P_1, P_2, P_3 gewinnen. Zu diesem Zweck bezeichne ich die Achse von P (das sei die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der »linken« und

»rechten« Seitenfläche der Platte, aus der P entstand) mit $\bar{a}$, und die Ebene, die auf $\bar{a}$ in dem Punkte senkrecht steht, der von der »linken« Seitenfläche um $\frac{3}{2} \cdot b$ »nach rechts zu« entfernt ist, mit E. Die positive Richtung von $\bar{a}$ sei die »nach rechts«. Übe ich dann auf P eine Schraubung $\left(+b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ mit $\bar{a}$ als Achse, mit der Verschiebung $+b$ und mit der Drehung durch den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ aus, so fügt sich offenbar das gedrehte mit dem ursprünglichen Polyeder gerade zu einem Gesamtpolyeder P_1 zusammen. Ebenso hätte ich P_1 erhalten, wenn ich die Schraubung $\left(-b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ ausgeführt hätte. Übe ich dagegen nach der Schraubung $\left(+b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ noch eine Spiegelung an E aus, so erhalte ich auf entsprechende Weise ein anderes Gesamtpolyeder P_2. Führe ich schließlich dieselbe Spiegelung nach der Schraubung $\left(-b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ aus, so entsteht ein drittes Polyeder P_3. In Exemplare P_1 oder P_2 oder P_3 kann man aber den Raum ersichtlich dadurch zerlegen, daß man sie zunächst zu unendlich langen Balken von kreuzförmigem Querschnitt (s. Abb. 2) aneinanderreiht, und diese Balken dann in der in Abb. 2 angegebenen Weise — und etwa gegeneinander »unverschoben« — zusammenfügt.

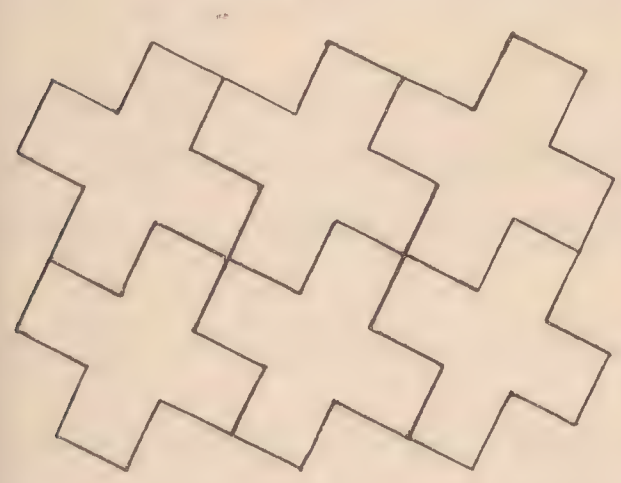


Abb. 2.

Ich will nun, um unnötige Weitschweifigkeiten hier zu vermeiden, etwa $b = \frac{3}{2} \cdot a$ annehmen, und dann beweisen, daß Zerlegungen des R_3 in Exemplare P nur über Polyeder P_1 oder P_2 oder P_3 möglich sind. Zu diesem Zweck stelle ich zunächst folgende Hilfsbetrachtung an.

Es sei ein Quader mit den Seitenflächen f_1', f_1''; f_2', f_2''; f_3', f_3'' gegeben; f_i' möge f_i'' gegenüberliegen ($i = 1, 2, 3$). Ferner sei eine Anzahl von Polyedern p_i vorgelegt; jedes p_i habe die Eigenschaft, daß seine sämtlichen Seitenflächen nur drei zueinander senkrechte Stellungen besitzen. Mit diesen p_i sei der Quader lückenlos ausgefüllt, und zwar so, daß f_1', f_1''; f_2', f_2'' Begrenzungen der Füllung darstellen, diese aber über f_3' und f_3'' möglicherweise hinausragen kann. Ich behaupte, daß dann sämtliche p_i sich in der Füllung in Normalstellung befinden, d. h. so, daß für jedes p_i die drei Ebenenstellungen mit den Stellungen der Seitenflächen des Quaders übereinstimmen. Dies ist klar; denn nenne ich für den Augenblick eine Kante eine konkave Kante, wenn sie den Flächenwinkel $\frac{\pi}{2}$ in einen zu füllenden Raumteil hineinschickt (wie z. B. die auf f_3' senkrechten Quaderkanten), so muß ein Polyeder p_i, von dem eine Kante (teilweise) mit einer konkaven Kante zusammen-

fällt, offenbar stets Normalstellung haben, wenn die beiden Ebenen, die die konkave Kante bestimmen, Normalstellung besitzen. Nun kann ich mir die Füllung des Quaders schrittweise vorgenommen denken, indem ich ein p_i nach dem anderen an eine konkave Kante anlagere. Ich kann von einer auf f_3' senkrecht stehenden konkaven Quaderkante ausgehen. Wenn die an diese grenzenden p_i in Normalstellung den Quader noch nicht füllen, müssen ersichtlich neue konkave Kanten entstehen, deren Bestimmungsebenen wieder Normalstellung haben müssen, und mit denen ich dann fortfahren kann. Dies Verfahren läßt sich fortsetzen, bis die Füllung erschöpft ist. Damit ist dann die Behauptung bewiesen[1].

Aus dieser Hilfsbetrachtung folgt nun, daß das Loch in P (das hier den zu füllenden Quader darstellt) nur durch andere Polyeder P in Normalstellung gefüllt werden kann. Man braucht also nur die zwölf möglichen Normalstellungen von P daraufhin zu prüfen, ob sie das Loch oder einen Teil desselben zu füllen vermögen. Die vier Stellungen, bei denen die Kanten von der Länge a senkrecht stehen (wie in Abb. 1), sind hierzu nicht imstande. Die vier Stellungen, bei denen die Kanten von der Länge a diejenige Richtung besitzen, welche ursprünglich die Kanten von der Länge $3 \cdot a$ hatten, liefern Füllungen, und zwar zwei davon je zwei, die beiden anderen wegen $b = \frac{3}{2} \cdot a$ keine. Diese Füllungen sind genau die zu den Polyedern P_1, P_2, P_3 führenden. Bei ihnen wird jedesmal das Loch gänzlich durch ein Polyeder gefüllt. Von den vier letzten Stellungen, bei denen die Kanten von der Länge a die ursprüngliche Richtung der Kanten von der Länge $4 \cdot b$ besitzen, liefern zwei ersichtlich Füllungen von Teilen des Loches; da aber wegen $b = \frac{3}{2} \cdot a$ diese Stellungen allein niemals zur ganzen Füllung führen können, und andere Stellungen nicht in Frage kommen, so ist damit die Behauptung bewiesen, daß eine Zerlegung des R_3 in Exemplare P nur über Polyeder P_1, P_2, P_3 möglich ist.

Ich will es hier dahingestellt sein lassen, ob möglicherweise bei einer Raumzerlegung die Polyeder P_1, P_2, P_3 gemischt vorkommen können, da ich die Polyeder P_2 und P_3 sowieso gleich ausschalten werde. Jedenfalls kann nämlich festgestellt werden, daß die oben geschilderte Zerlegung des R_3 in Polyeder P, sofern sie nur über Polyeder P_2 oder nur über Polyeder P_3 erfolgt, und die Balken etwa »unverschoben« aneinandergelagert werden, eine

---

[1] Das Wesentliche bei diesem Gedankengang ist das stets erneute Auftreten konkaver Kanten. Treten nur konvexe Kanten auf (d. h. solche, die den Flächenwinkel $\frac{3\pi}{2}$ in den noch zu füllenden Raumteil schicken), so werden die Verhältnisse wesentlich anders, da konvexe Kanten in Seitenflächen weiterer Polyeder liegen können. Hierauf beruht die Schwierigkeit der Behandlung der allgemeineren hierher gehörigen Probleme, etwa der Zerlegung des ganzen Raumes in Polyeder p_i, wo der fragliche Satz über die Normalstellung falsch wird (während er in der Ebene stets gilt). Ein Beispiel dafür bietet etwa die regelmäßige Zerlegung des Raumes in kongruente Würfel, wenn man sich dieselbe durch eine Netzebene in zwei Teile (Halbräume) zerspalten und den einen Teil durch eine beliebige Bewegung, welche die Netzebene in sich überführt, gegen den anderen verdreht denkt.

gruppenmäßige ist, d. h. eine solche, bei der P als Fundamentalpolyeder erscheint. Ich ändere daher P so ab, daß eine Zusammenfügung von zwei Exemplaren P zu P_2 oder P_3 unmöglich wird, und nur eine Zusammenfügung zu P_1 möglich bleibt. Dies kann auf mannigfache Weise geschehen, etwa durch Anbringen von zwei kongruenten Federn von quadratischem Querschnitt an den linken Seitenflächen des Loches und des Einschnitts von P, und von je einer dazu kongruenten und um $\frac{\pi}{2}$ verdrehten Nut an der rechten Seitenfläche des Loches und an der linken Seitenfläche von P, so wie es z. B. Abb. 3 angibt, wo nur das Loch (bei fehlender vorderer Begrenzung) herausgezeichnet ist. Bei der Herstellung der Polyeder P_1 verspunden sich je eine Feder und die zugehörige Nut, während Polyeder P_2 und P_3 jetzt nicht mehr möglich sind, und im übrigen die sämtlichen seitherigen Betrachtungen bestehen bleiben, so daß also jetzt nur mehr eine einzige Zerlegung des Raumes (abgesehen von einer Verschiebung der Balken gegeneinander) in Exemplare des neu entstandenen Polyeders $\overline{P}$ möglich ist.

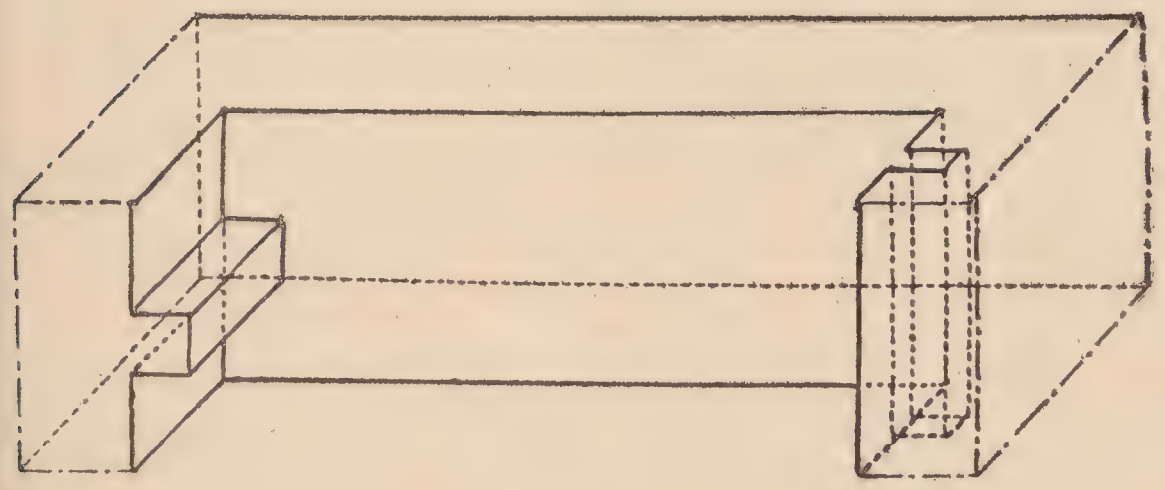


Abb. 3.

$\overline{P}$ ist nun ein Zerlegungspolyeder vom Ringzusammenhang, das nicht Fundamentalpolyeder ist. Denn übt man auf ein geeignet gewähltes Exemplar in der einzigen soeben nachgewiesenen Zerlegungsart die Schraubung $\left(+b, \pm\frac{\pi}{2}\right)$ aus, die es in ein anderes Exemplar der Zerlegung überführt, so wird dieses zweite Exemplar durch dieselbe Schraubung sicher nicht in ein Exemplar der Zerlegung übergehen. Man kann aus $\overline{P}$ nun aber auch leicht ein einfach zusammenhängendes Zerlegungspolyeder mit der gleichen Eigenschaft gewinnen. Zu diesem Zweck ist nur nötig, $\overline{P}$ durch einen ebenen Schnitt, dessen Ebene durch die Achse $\bar{a}$ von $\overline{P}$ geht und auf der Grundfläche der rechteckigen Platte, aus der P entstand, senkrecht steht, in zwei kongruente einfach zusammenhängende Polyeder $\overline{\overline{P}}_1$ zu zerteilen. Dieser Schnitt ist in Abb. 1 angedeutet. $\overline{\overline{P}}_1$ ist nun allerdings wieder Fundamentalpolyeder, denn übt man auf ein Exemplar die Schraubung $(+2b, \pm\pi)$ aus, und fügt man das so entstehende Exemplar mit dem ursprünglichen zusammen, so läßt sich der Raum ersichtlich in Exemplare des so entstandenen Gesamtpolyeders wieder gruppenmäßig zerlegen. Es bleibe auch wieder dahingestellt, ob man nicht etwa noch auf ganz andere Weise den Raum nunmehr in Polyeder $\overline{\overline{P}}_1$ zerlegen kann. Man kann jedenfalls die sich auf $\overline{P}$ gründende Ausgangszerlegung, durch welche $\overline{\overline{P}}_1$ eben definiert wurde, als einzig mögliche wieder dadurch erzwingen, daß man zwei Exemplare $\overline{\overline{P}}_1$, die zusammen $\overline{P}$ ergeben, etwa erneut verspundet. Dies kann beispielsweise (um jede weitere Mög-

lichkeit a priori auszuschließen) dadurch geschehen, daß man sich die »linke« der beiden in Abb. 1 gezeichneten Schnittflächen von $\overline{P}$ durch die Achse $\bar{a}$ in zwei kongruente Rechtecke[1] geteilt denkt, und daß man am »hinteren« Exemplar $\overline{\overline{P}}_1$ mit dem Mittelpunkt des »oberen« Rechtecks als Zentrum der Grundfläche einen (genügend kleinen) Zapfen von der Form eines geraden (etwa regelmäßig dreiseitigen) Prismas »nach vorne« anbringt[2], während der kongruente Zapfen vom Mittelpunkt des unteren Rechtecks aus am »vorderen« Exemplar $\overline{\overline{P}}_1$ »nach hinten« angeheftet werden muß. Umgekehrt sind dann an beiden Exemplaren die zu den Zapfen gehörigen Nuten auszusparen. Dann sind die beiden Exemplare immer noch kongruent (vermöge einer Drehung um $\bar{a}$ durch den Winkel π), ein Exemplar $\overline{\overline{P}}$ ist ein einfach zusammenhängendes Zerlegungspolyeder, es ist nur eine einzige Zerlegung (im früheren Sinne) möglich, und in dieser Zerlegung erscheint $\overline{\overline{P}}$ nicht als Fundamentalpolyeder. Es gibt im R_3 also Zerlegungsbereiche, die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen sind.

Ich will nun noch kurz zeigen, daß es überhaupt in jedem R_n $(n \geqq 3)$ Zerlegungspolytope gibt, die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen sind. Ich beweise nämlich, daß diese Behauptung für den R_n richtig ist, wenn sie für den R_{n-1} gilt, und für den R_3 habe ich sie eben bewiesen.

Zu diesem Zweck stelle ich folgende Betrachtungen an: Es sei eine Zerlegung der Ebene in kongruente Bereiche vorgelegt. Dann kann ich daraus eine Zerlegung des Raumes in kongruente Bereiche gewinnen, indem ich über jedem Bereich der ebenen Zerlegung als Grundfläche die (etwa gerade) beiderseits unendlich lange Säule errichte, und die Folge dieser Säulen durch äquidistante und zu der Ausgangsebene parallele Ebenen schneide. Ich kann die so gewonnene Raumzerlegung noch dadurch abändern, daß ich die einzelnen Säulen beliebig gegeneinander (in ihrer Richtung) verschiebe. Im allgemeinen wird es wohl außer den eben genannten noch andere Zerlegungen des Raumes in Exemplare des so gebildeten räumlichen Bereichs geben. Auch hier kann ich jedoch die geschilderten Zerlegungen allein wieder durch geeignete Verspundung der Säulenbausteine erzwingen. Ich nehme an, daß der räumliche Bereich »sehr lang« sei, und bringe auf seiner Deckfläche in der Säulenrichtung einen »genügend langen« und »sehr dünnen« Zapfen von beliebigem Querschnitt an, und auf seiner Grundfläche eine dazugehörige (durch Parallelverschiebung in der Säulenrichtung um die »Höhe« des räumlichen Bereichs) kongruente Nut. Es ist klar, daß durch geeignete Wahl der Länge, der Dicke und des Querschnitts des Zapfens und der Nut stets erreicht werden kann, daß die Säulen bei der Zerlegung zwangsläufig entstehen, und daß dann die oben geschilderten Zerlegungen die einzig möglichen sind. Nun sind, wenn die Zerlegung der Ausgangsebene keine gruppenmäßige war,

---

[1] Wenn hier von »Rechtecken« gesprochen wird, wird im Augenblick nicht an $\overline{P}$, sondern an P gedacht.

[2] Man kann natürlich auch mit geeignet gewählten Quadern in entsprechender Weise verzapfen und zum Nachweis der Einzigkeit der Zerlegung dann direkt wieder den Hilfssatz von S. 151 anwenden.

auch diese Raumzerlegungen keine gruppenmäßigen. Denn dann existiert eine durch die ebene Zerlegung definierte Bewegung der Ebene in sich, die ein Exemplar des ebenen Zerlegungsbereichs sicher nicht in ein anderes solches Exemplar überführt, und damit existiert dann auch eine räumliche Bewegung (eine Bewegung, die durch die Raumzerlegung definiert ist, und aus der ebenen Bewegung durch Komposition mit einer Parallelverschiebung in Richtung der Säulen hervorgeht), die eine ganze Säule der Raumzerlegung sicher nicht mit einer anderen solchen Säule, und damit jeden ihrer Bausteine sicher mit keinem anderen Zerlegungsbereich zur Deckung bringt.

Die gleichen Überlegungen gelten offenbar, wenn man statt von der Ebene von einem R_{n-1} ausgeht, und auf entsprechende Weise aus einem Zerlegungsbereich des R_{n-1} einen solchen des R_n gewinnt, und man kann noch hinzufügen, daß der Zerlegungsbereich des R_n ein Polytop sein wird, wenn es derjenige des R_{n-1} war[1], und daß das erstere Polytop einfach zusammenhängend sein wird, wenn das letztere einfach zusammenhängend war. Ist demnach das Zerlegungspolytop des R_{n-1} so beschaffen, daß keine mit ihm mögliche Zerlegung gruppenmäßig ist, so ist auch keine der möglichen Zerlegungen des R_n in Exemplare des abgeleiteten Polytops gruppenmäßig. Ist also das ursprüngliche Polytop kein Fundamentalpolytop, so ist auch das abgeleitete kein solches. Aus dem vorhin für den R_3 konstruierten Polyeder $\overline{\overline{P}}$ kann man also für jeden R_n $(n > 3)$ ein einfach zusammenhängendes Zerlegungspolytop ableiten, das kein Fundamentalpolytop ist. Es gibt mithin in jedem R_n $(n \geq 3)$ Zerlegungsbereiche, die nicht Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen sind.

[1] Und wenn als Zapfenform ebenfalls ein Polytop gewählt wird.

Ausgegeben am 18. Juni.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XV. Gesamtsitzung. 10. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

*1. Hr. Schlenk sprach über die Wertigkeiten des Kohlenstoffs.

Er erklärt zunächst die Bedeutung des Begriffes »Wertigkeit« für die Chemie im allgemeinen und erläutert die Wichtigkeit der Erkenntnis der Vierwertigkeit des Kohlenstoffs für die Entwicklung der organischen Chemie. Dann gibt er einen kurzen Überblick über die Hauptergebnisse der Forschungen auf dem Gebiet des dreiwertigen Kohlenstoffes und befaßt sich schließlich eingehender mit Verbindungen, in welchen die Existenz zweiwertigen Kohlenstoffs anzunehmen ist, so mit einem von ihm und E. Bergmann dargestellten Natriumadditionsprodukt von Tetraphenylallen:

$$\begin{matrix}C_6H_5\\C_6H_5\end{matrix}\!\!>\!C_{Na} - \vdots C \vdots - C_{Na}\!<\!\!\begin{matrix}C_6H_5\\C_6H_5\end{matrix}.$$

Des weiteren berichtet er von — ebenfalls mit E. Bergmann ausgeführten — Versuchen über Reaktionen, bei welchen (im Sinne von Nef) Methylenradikale als Zwischenprodukte anzunehmen sind. Als einen Fall solcher Art betrachtet er die Reaktion zwischen 9-Chlorfluoren und Natriumalkoholat, die nach seiner Beobachtung nicht zum Äther von 9-Oxyfluoren, dessen Bildung zu erwarten ist, führt, sondern zum Dibiphenylenäthen. In einem anderen Fall ist es gelungen, das vergängliche substituierte Methylen durch einen Reagenten »abzufangen«. Bei der Behandlung von *p*-Nitrobenzylchlorid mit alkoholischer Kalilauge in Gegenwart von Benzaldehyd wurde nämlich *p*-Nitrostilbenoxyd erhalten, eine Verbindung, deren Entstehung nur durch Kondensation von *p*-Nitrobenzyliden mit Benzaldehyd zu erklären ist.

2. Das ordentliche Mitglied der Akademie Hr. Brandl hat am 3. Mai sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

Die Akademie hat den ordentlichen Professor an der Universität Wien Hrn. Dr. Felix M. Exner-Ewarten, den ordentlichen Professor an der Universität Oslo Hrn. Dr. Vilhelm Bjerknes und den ordentlichen Professor an der Universität Brüssel Hrn. Dr. Louis Dollo zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer philosophisch-historischen Klasse Hrn. Professor Dr. Friedrich von Bezold in Bonn am 3. Mai durch den Tod verloren.

Berichtigung. Bei der Abhandlung des Hrn. Brandl, S. 72—84 dieses Jahrganges, sind versehentlich die Tafeln I und II verwechselt worden.

Adresse an Hrn. Alois Brandl zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 3. Mai 1928.

Hochgeehrter Herr Kollege!

An dem Tage, an dem Sie vor 50 Jahren den wissenschaftlichen Ritterschlag empfingen, gedenkt Ihrer die Preußische Akademie mit den wärmsten Glückwünschen. Sie blickt mit Ihnen voll Stolz und Dankbarkeit auf die Ernte einer unermüdlichen und erfolgreichen gelehrten Wirksamkeit, die Ihnen vor bald einem Vierteljahrhundert als dem ersten Vertreter Ihres Faches den Zutritt zu unserem Kreis eröffnete und Sie seitdem in vielseitigster und fruchtbarster Weise an den Arbeiten der Akademie teilnehmen ließ. Wenn Sie seinerzeit in Ihrer Wahl ein bedeutsames Zeichen dafür erblickten, daß der Anglist vor lauter Sprechübungen und Realien nicht aufhören dürfe, Philologe zu sein, so haben Sie dieses Bekenntnis Ihrer Antrittsrede in fortschreitender Durchgeistigung aller Probleme wahrgemacht. Es war Ihnen vergönnt, ein Fach, das in materialistische Sprachgelehrsamkeit und dilettantische Literaturbetrachtung sich zu teilen drohte, zu einer umfassenden und geschlossenen Einheit auszubauen, indem Sie die Erfahrungen Ihres klassisch-philologischen und germanistischen Bildungsganges zur Anwendung brachten. Die Übertragung der exakten Methoden und der großen Gesamtauffassung Ihrer germanistischen Lehrer Heinzel, Müllenhoff und Scherer auf das englische Gebiet ermöglichte Ihnen, in Altertumskunde, Sprachgeschichte, Textkritik und Literaturgeschichte eine gleich sichere Herrschaft über Material und Probleme sich zu erwerben. Von der Geographie der altenglischen Dialekte bis zu den modernen Mundarten, deren Mannigfaltigkeit Sie während des Krieges in den Gefangenenlagern phonetisch aufnahmen, vom angelsächsischen Traumgesicht bis zum Märchen eines lebenden irischen Dichters, von den Anfängen der englischen Autobiographie bis zur psychologischen Interpretation der Selbstzeugnisse neuerer Dichter über die Art ihres Schaffens, von der grammatischen Deutung alter Texte bis zur allgemeinen Betrachtung des Sprachlebens haben Sie in gewaltigem Umkreis kaum ein Feld Ihrer Wissenschaft unberührt gelassen. Sie haben die Volksdichtung in gleicher Weise wie die großen Schöpfungen des künstlerischen Genius eindringender Betrachtung unterzogen, und wenn Ihr stoffgedrängter Abriß der englischen Literaturgeschichte im »Grundriß der germanischen Philologie« eine Menge unbekannter Namen ans Licht zog und gruppierte, so haben Sie den großen Einzelnen wie Coleridge und vor allem Shakespeare monumentale Darstellungen gewidmet. Dabei haben Sie sich den Zusammenhängen des englischen Geisteslebens mit der antiken Bildung,

mit der Renaissance und den modernen Literaturen des Kontinents nicht verschlossen und doch seine besondere Bedingtheit durch den Boden, die Geschichte, die Eigenkultur dieses Landes stets betont. In dem Reichtum der Gesichtspunkte und Fragestellungen haben Sie Ihren Schülern eine Fülle fruchtbarer Anregungen vermittelt und mehrere Generationen anglistischer Forscher und Lehrer herangebildet, deren Tätigkeit die Richtung Ihrer Führung den kommenden Geschlechtern übermitteln wird. Sie sind jung geblieben im Verkehr mit den Jungen und sind dabei sich selbst treu geblieben im Wandel der Zeiten, indem Sie einen offenen Sinn für das Neue mit Pietät für das Angestammte und Althergebrachte, freien Weltblick mit festwurzelnder Heimatliebe zu vereinen wußten. Die verjüngende Kraft der Tiroler Bergluft, die Sie nach alljährlichem Besuch der geliebten Heimat mit Antäuskräften in Ihren großen Wirkungskreis zurückkehren läßt, möge Ihnen noch viele Jahre lebensfrischen Schaffens und uns noch manchen Ertrag Ihrer rastlosen Tätigkeit bescheren!

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Die Welternährung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft.

Von Max Rubner.

(Vorgetragen am 2. Februar 1928 [s. oben S. 21].)

Einleitung.

Die Ernährung ist in der ganzen belebten Welt die Hauptgrundlage der Existenz der Individuen, ein profaner Vorgang zwar, aber nichtsdestoweniger entscheidend für Gedeihen und Wohlbefinden und die Lebensmöglichkeit überhaupt. Auch wir Menschen hängen an diesen Naturnotwendigkeiten, zumeist wohl ohne besondere Reflexionen über diese Vorgänge. Insoweit man allenfalls kritisch dazu Stellung nimmt, findet unser Ideenkreis seinen Ausgangspunkt von der individuellen Erfahrung. Diese erkennt zwar gewisse Zusammenhänge zwischen Gesundheit und Art der Nahrung an, wie sie andererseits eine schrankenlose Freiheit in der Wahl der Nahrungsmittel als gegeben erachtet. In Wirklichkeit ist dieser freie Wille nicht so unbeschränkt, wie viele glauben. Das leitende Moment, das hinter dieser anscheinend freien Wahl steht, muß doch etwas ganz Besonderes sein, sonst würden nicht Millionen von Menschen, wenn sie erwachsen sind, trotz Wandelbarkeit der Speisen und anscheinenden Massenunterschieden im Genuß nicht jahre- und jahrzehntelang auf dem gleichen Körpergewicht bestehen bleiben können.

Diese Zusammenhänge aufzuklären war erst der Ernährungsphysiologie vorbehalten. Die reine, Jahrtausende alte Empirie konnte ein Verständnis dieser Dinge nicht gewinnen. Sind doch unsere persönlichen Erfahrungen auf diesem Gebiete hauptsächlich auf Qualitätsunterschieden begründet, während die Wissenschaft ein quantitatives Erfassen erfordert.

Erst die Ernährungsphysiologie hat gezeigt, daß das, was der Laie sieht und fühlt, den Kern der Sache nicht berührt; und daß das ernährende Prinzip nichts Einheitliches ist, das hat erst die Entwicklung der Wissenschaft des 19. Jahrhunderts gelehrt.

Das nährende Prinzip wird zu einem Gemenge verschiedener chemischer Stoffe, die in bestimmter Qualität und Menge gemischt werden müssen, aus den äußeren Eigenschaften der Materialien aber nicht erkennbar sind.

Das Bedürfnis nach Nahrung hängt, wie die Physiologie dann auch gezeigt hat, von Masse, Alter, Arbeitsleistung des Einzelnen ab. Von den Stellen des Verbrauchs nährender Substanzen im Körper wird, das Nähere ist uns nicht bekannt, jene allgemeine Empfindung ausgelöst, die man Hunger

nennt und uns durch den Appetit zur Nahrungsaufnahme in ganz bestimmter Richtung zwingt. Hunger und Appetit sind Vorgänge, die sich aus zwei Prozessen zusammensetzen, einem instinktiven Regulationsmechanismus, begründet auf dem Nahrungsbedarf der Zellen des Organismus, also auf rein physiologischen Bedingungen, und weiter psychischen Vorgängen, welche das allgemeine Verlangen nach Nahrung umsetzen in das Verlangen nach bestimmten Speisen, die den Volksgewohnheiten angepaßt und anerzogen sind.

Das allgemeine Zellverlangen nach Nahrung hat direkt nichts mit den Bedürfnissen nach Speisen zu tun, sondern liegt im Bedürfnis nach Nährstoffen begründet. Der Zellhunger ist daher etwas viel Einfacheres und Einheitlicheres wie das als die Projektion in die Außenwelt erscheinende Verlangen nach »Speisen«. Das Innengefühl des Hungers steigert sich manchmal zur Erscheinung des Heißhungers, also zum Erhaltungstrieb, der sich über Vernunft und Erziehung hinwegsetzt. Der Hunger ist nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ gefärbt, indem der Bedarf nach bestimmten Nährstoffen auch die psychischen Vorgänge beeinflußt.

Die Natur deckt vor allem durch den Regulationsmechanismus des Hungers beim Normalen die Bedürfnisse ohne Verschwendung von Material.

In einer größeren Menge von Menschen sind die Einzelanforderungen durch Alter, Größe, Beruf geregelt, aber erfahrungsgemäß verschieden. Vor einiger Zeit habe ich in den Sitzungsberichten der Akademie[1] über die Grenzwerte, innerhalb deren die Einzelleistungen namentlich durch Beruf und Lebensweise schwanken, Mitteilung gemacht, wobei sich eine viel engere Begrenzung ergeben hatte, als man gewöhnlich annahm. Die Extreme liegen nicht allzuweit über oder unter dem Durchschnitt. Aus diesem Gedanken heraus nähern wir uns einer Möglichkeit, die für weitere Betrachtungen von großer Bedeutung ist, nämlich der Zusammenfassung größerer Menschenmassen in Mittelwerten, welche berechtigt ist, wenn Altersaufbau und die Massen und die sonstigen Existenzbedingungen nicht allzu verschieden sind.

Wir verlassen damit das Gebiet der individuellen Ernährung, stellen das Ernährungsproblem um in Massenproblem, indem wir an Stelle des Individuums den Mittelwert der Ernährung eines Volkes aufsuchen, den Mittelwert von Millionen von Menschen, und nicht mehr Eintagsbeobachtungen, sondern Jahresdurchschnitte zu erfassen suchen. Der Gedanke, an Stelle des Individuums die ganze Menge einer Nation als Einheit zu erfassen, zeigt einen neuen Weg, der sowohl physiologisch wie auch anthropologisch und nationalökonomisch von großer Bedeutung ist. Die Anregung zum Studium des nationalen Verbrauchs geht bei meinen Untersuchungen schon auf die Vorkriegszeit zurück, sie hat sich aus Vorfragen über die Verproviantierung von Festungen entwickelt, in der Blockadezeit erhöhte Bedeutung gewonnen und schließlich durch Erweiterung des Materials durch die Entente und anderweitige Feststellungen zum Vergleich unseres Landes mit anderen Nationen geführt.

Man kann auf verschiedenen Wegen zu einem solchen Mittelwert der Nation kommen, entweder rein physiologisch, indem man den Aufbau der

---

[1] 1926 XXVII p. 384.

ganzen Nation in alle Altersklassen zerlegt und für die Erwachsenen die Arbeiterschichten in ihrem Ernährungsbedarf auf Grund physiologischer Feststellungen berechnet oder den Nahrungskonsum eines Landes zugrunde legt. Beide Wege haben mir für Deutschland übereinstimmende Werte des Verbrauchs pro Kopf der Bevölkerung gegeben. Diese allgemeine Betrachtung und deren Großzügigkeit hat den Vorteil, daß sie uns von den Eindrücken der kleinlichen Natur des Alltagslebens befreit.

In den großen Zahlen spielen die Absonderlichkeiten einzelner kleiner Ernährungsgruppen, ob Vegetarier, Nichtvegetarier, Proteinphobisten, Rohkostler und ähnliche Richtungen, keine Rolle mehr, wohl aber treten die rein völkischen Eigenschaften in aller Schärfe hervor. Die nationalen Werte sollen uns das Schicksal ganzer Völker, die nicht nur durch die Umwelt, sondern auch durch vererbte Eigenschaften und tausendjährige Tradition bedingt sein können, erzählen. Ein solcher Versuch einer allgemeinen Betrachtung der Welternährung wird ja zunächst nur ein Rohbau sein können, an dessen Ausbau noch Generationen reichlich Arbeit finden sollen.

Im allgemeinen ist man stets geneigt gewesen, auch den Völkern ganz besondere Eigentümlichkeiten zuzuschreiben, von Rassenunterschieden aller Art gar nicht zu reden. Diese Frage der Welt- und Nationenernährung läßt sich in zwei große Teile scheiden, von denen der eine bereits durch meine Untersuchungen schon gelöst worden ist. Diese zwei großen Gebiete sind die Stoffwechsellehre und die Nahrungsmittellehre. Das, worüber der Mensch gewöhnlich nachzudenken pflegt, ist die letztere. Da interessiert ihn der Geschmack, Geruch und Aussehen, die künstlichen Mittel der Verbesserung der Nahrung, die Kochkunst also, und eine allgemeine Kritik der Gesundheitswerte der Kost, die Bekömmlichkeit und ähnliche allgemeine Anschauungen. Weit über die Laienkreise hinaus sind die Volksmassen von der absoluten Richtigkeit ihrer eigenen Ernährungsform überzeugt und betrachten Fremdes mit abfälliger Kritik. Die vergleichende internationale Nahrungsmittellehre zeigt uns ohne weiteres die Voreingenommenheit in dieser Richtung.

Im Gegensatz zur Nahrungsmittellehre steht dem Laien und selbst manchen ärztlichen Kreisen die Stoffwechsellehre. Gewöhnlich betrachtet man sie als »theoretisches« System. Kaum eine wissenschaftliche Entdeckung ist aber von solcher Tragweite gewesen wie die Erkenntnis, daß die Vielfältigkeit der Nahrungsmittel aus ihrer Zusammensetzung aus wenigen einfachen Nährstoffen ihre Erklärung findet.

Die Stoffwechsellehre löste den Wirrwarr der Nahrungsmittel in wenige einzelne Komponenten auf, sie setzt voraus, daß die dem Körper in Nahrungsmitteln zugeführte Nahrung richtig dem Geschmack und der Bekömmlichkeit nach gemischt sei, was Aufgabe der Diätetik ist. Sie zergliedert die Nahrungsmittel in ihre Komponenten, von denen uns zunächst die drei hauptsächlichsten organischen Stoffgruppen Eiweiß, Fett und Kohlehydrate interessieren. Solange man aber nur diese rein chemisch definierten Stoffe kannte, ließ sich eine Verallgemeinerung der Stoffwechsellehre nicht durchführen. Meine Untersuchungen haben gezeigt, daß es für die Erhaltung des Lebens auch

auf den Energiegehalt der Nährstoffe ankommt, weshalb sie sich nach der Masse der Energie (Kalorien) summieren lassen, doch muß stets ein kleiner Bruchteil der Energie in Form von Eiweiß geboten werden. Von diesen Gesichtspunkten ausgehend, haben sich die verschiedensten Ernährungsweisen in einer Einheit ausdrücken lassen und Vergleichungen ermöglicht, nicht nur für die individuellen Ernährungsformen, sondern auch für die Massenernährung großer Volksschichten und ganzer Völker überhaupt.

Die Lehre von der Energetik ist keine Theorie, die man beliebig annehmen oder ablehnen kann, sondern die einzige Möglichkeit, ein Gesamtmaß der Ernährungsvorgänge, das ebensowenig entbehrt werden kann wie Maß und Gewicht für andere Dinge, zu gewinnen. Wir werden sehen, daß neben der Bedeutung der Energetik und der Stoffwechsellehre die Teilerscheinungen der Ernährung, die man heute als »neuere Ernährung« in den Vordergrund schieben will, zurücktreten und sich von selbst erledigen.

I. Abschnitt.

Der Welt-Stoffwechsel und Kraftwechsel der Völker.

Ich habe der Akademie schon vor einigen Jahren Mitteilung[1] über die Ergebnisse der Nationenernährung der wichtigsten Kulturvölker gemacht, über Deutschland, Italien, Frankreich, England, Nordamerika und Japan, über eine Gesamtbevölkerungszahl von etwa 450 Millionen Menschen, also einen erheblichen Teil der Erdbevölkerung überhaupt. Alle diese Völker, der weißen und auch gelben Rasse angehörig, unterscheiden sich sehr mannigfaltig in ihren Eßgewohnheiten, wie man weiß, so sehr, daß es dem einzelnen schwer fällt, in die Lebensgewohnheiten der anderen sich einzufügen. Das Empfinden der Fremde im Ausland beruht nicht sowohl in der Verschiedenheit der Sprache, als vielmehr in der Verschiedenheit des Essens. Jede Nation hält ihre Lebensgewohnheit für die allein richtige.

Tabelle.

	Pro Kopf der Bevölkerung treffen täglich[2]			
	in Gramm			in Kalorien
	Protein	Fett	Kohlehydrate	
Japan[3]	81	29	485	2553
Italien	88	58	466	2612
Rußland, altes	79	43	473	2666
Deutschland	87	60	428	2770
Österreich, altes	81	57	478	2825
Frankreich	88	67	485	2973
England	90	105	403	2997
Nordamerika	89	—	430	—
Mittel	85.4	59.8	459.6	—

[1] 1920, XI S. 341. [2] Als Durchschnittsgewicht 45 Kilo zu rechnen.
[3] Umgerechnet von dem kleineren Körpergewicht der Japaner auf mittleres Gewicht der anderen Nationen.

85.4 Protein	=	350.1 Kalorien
59.8 Fett	=	556.1 »
459.6 Kohlehydrate .	=	1884.4 »
	Summe	2790.6 Kalorien

Vorstehende Tabelle enthält den pro Kopf einer Bevölkerung entfallenden Anteil an Protein, Fett, Kohlehydraten und die Summe aller dieser Stoffe ausgedrückt in Kalorien. Wenn man an die Verschiedenheiten der Ernährung denkt und an die Möglichkeiten verschiedenartiger Betätigung (Arbeit), so ist das Ergebnis der vorläufigen Feststellung vom physiologischen Standpunkt höchst überraschend gewesen. Auf die geringen Differenzen im Einzelfalle lege ich vorläufig kein Gewicht, die kleinen Unterschiede mögen als Fehlergrenzen unserer heutigen Versuchsmethodik gelten.

Im Gesamtdurchschnitt zeigen die Kalorienzahlen, daß es keine Nation gibt, die als darbende, unterernährte gelten müßte, oder jedenfalls auch keine faulenzende Nation oder andererseits auch keine Übermäßiges leistende, denn solche Unterschiede würden sich in der Gesamtmenge der verzehrten Nahrungsmittel ausprägen.

Mit großer Wahrscheinlichkeit dürfen wir auch für jene größeren Völkerkomplexe der Erde, die noch nicht untersucht sind, eine Übereinstimmung mit den oben gezeigten Werten annehmen. Anders mag es sich verhalten, wenn man zu kleineren Nahrungsverbänden übergeht, etwa zur Beobachtung der kleinen Reste primitiver Völkerschaften, oder solcher kleinen Verbände, die unter ganz abweichenden Kultur- und klimatischen Verhältnissen leben oder zu leben gezwungen sind.

Überraschend dürfte auch das Fehlen von Rassenunterschieden sein. In dieser Hinsicht mag man sich an die Ergebnisse über den Energieverbrauch an Warmblütern im allgemeinen erinnern, worüber ich früher berichtet habe[1]. Trotz Verschiedenheit der Spezies zeigen sich bei groß und klein unter den gleichen Lebensbedingungen keine Unterschiede hinsichtlich Körpermasse und Energieverbrauch. Bei einer Kulturnation wird der einzelne mit seiner Arbeitsleistung in den Volksverband gestellt, und wie die Arbeit gleichmäßig geleistet wird, ordnet sich ihr auch eine gleichmäßige Ernährung bei. Anders bei vielen Naturvölkern, wo den Ernteperioden eine überreiche Ernährung mit Gewichtszuwachs entspricht, während dem Übermaß dann auch Perioden echten Nahrungsmangels und des Hungers folgen.

Bei einem fast gleichen Verbrauch von Energie pro Masseneinheit zeigen die Völkerstudien als zweitwichtige Tatsache auch ein Gleichbleiben der Menge des Proteinverbrauchs innerhalb mäßiger praktisch irrelevanter Breite der Schwankungen.

Dies ist besonders auffallend, weil wir in unserer Tabelle, wie wir später noch hören werden, Bevölkerungen mit ganz verschiedenen Eßsitten aufgenommen haben. Völker mit zum Teil fast vegetarischer Kost und solche mit

[1] Sitzungsber. d. phys.-math. Klasse 1924, XVII, S. 217ff.

gemischter Kost, darunter die Angelsachsen, die der Laie gern im Verdacht hat, ausgesucht starke Eiweißesser zu sein.

Also auch die vegetarisch lebenden Völker stehen im Eiweißkonsum hinter den andern nicht zurück.

Die physiologischen Möglichkeiten würden es erlauben, mit sehr verschiedenen Eiweißrationen zu leben, und doch bleibt der Eiweißkonsum überall derselbe — eine sehr bemerkenswerte Tatsache. Die niedrigste Grenze des Eiweißkonsums würde sich auf der Stufe der Abnutzungsquote d. h. um 4—5 % Eiweißkalorien im Verhältnis zu den Gesamtkalorien bewegen, und wir haben andererseits das Extrem einer ausschließlichen Eiweißkost als Möglichkeit. Aber keine der äußersten Grenzwerte kommt dem Durchschnitt der Welternährung nahe, mit ihren 12.5 % Eiweißkalorien steht sie fast dreimal so hoch wie die Zahl des Minimums. Wir finden hier die Zweckmäßigkeit einer Proteinzahl bestätigt, die von seiten der Ernährungsphysiologie schon lange gegenüber irreleitenden Vorschlägen von anderer Seite geltend gemacht worden sind. Was Millionen von Menschen ertragen und empirisch seit wohl Jahrtausenden erprobt haben, kann man ohne Bedenken als gesundheitsgemäßen Durchschnitt ansehen.

Die Proteine sind wichtig für den Körper; auf sie im allgemeinen hier einzugehen, ist nicht möglich.

Für den Eiweißstoffwechsel ist es auch offenbar gleichgültig, ob es sich um pflanzliches oder tierisches Eiweiß handelt, denn in beiden Fällen wird das Protein in derselben Weise in die N-haltigen Endprodukte zerlegt, und speziell, was die Harnsäure anlangt, sind die Vegetabilien bei hohem N-Gehalt prinzipiell nicht von den Durchschnittswerten animaler Kost verschieden.

Eins ist leicht verständlich. Eine aus Animalien und Vegetabilien gemischte Kost läßt sich für den individuellen Bedarf leicht auf jede beliebige Eiweißkonzentration bringen, was für manche Zwecke des Wiederaufbaus des Körpers von Wert sein kann.

Aber eines mag noch hervorgehoben werden. Im Durchschnitt sind die Proteine zugleich die wesentlichen Träger der für den Organismus tauglichen Salze.

Was endlich das Verhältnis von Fett und Kohlehydraten anlangt, so zeigen sich bei den Völkern die größten Unterschiede. Die Ostasiaten, die Japaner zeigen eine ausgesprochene Fettarmut in ihrer Kost gegenüber dem Mitteleuropäer und dem Angelsachsen, wenn ich mit letzteren Worten auch den Nordamerikaner mit einbegreife. Bei unseren europäischen Ernährungsformen müßten wir unsre Ernährung gründlichst umgestalten, um mit so wenig Fett auszukommen, wie es bei den Japanern der Fall ist.

Nach den Untersuchungen meines Laboratoriums bleiben die Mischungen von Fett und Kohlehydraten innerhalb weiter Grenzen ohne Einfluß auf den Eiweißbedarf. Die nationalen Varianten bestätigen uns also die bereits bekannten Erfahrungen.

Die großen Variationen in der Zusammensetzung nationaler Gewohnheiten zeigen uns noch zwei Tatsachen, einmal, daß die Quellen der Vitamine nicht

so eng begrenzt sind, wie man zur Zeit meint, und ferner, daß die Versorgung mit Aschebestandteilen, die naturgemäß bei den verschiedenen Nationen sehr variabel ist, überall doch mindestens das Ausreichende und Nötigste zuführt.

II.

Eine Frage, die sich hier noch nicht diskutieren läßt und auch für die weitere Betrachtung ausgeschieden werden kann, aber oft erhoben wird, ist die besondere Leistungsfähigkeit einzelner Nationen in körperlicher Hinsicht. Anthropologische Angaben und Berichte von Reisenden heben solche Unterschiede sehr häufig hervor. Für den Physiologen läßt sich aber auf einer so unsicheren Basis wenig anfangen.

Wenn Rassenunterschiede beim Menschen bestehen, so drücken sich solche nicht in den mittleren Leistungen einer Nation aus, sondern am ehesten in extremen Einzelleistungen, wie sie beim Sport vorkommen. Bis jetzt haben aber die internationalen Sportkämpfe keinen Anhaltspunkt für wirklich bestehende Ungleichheiten maximaler Art bei einzelnen Rassen ergeben.

Die Beanspruchung der menschlichen Kraft zu Arbeitszwecken ist bei den Kulturnationen teils durch Arbeitsmaschinen, teils durch soziale Gesetze zurückgedrängt, so sehr, daß zum Teil dann aus Gesundheitsgründen freiwillige »Arbeit« geleistet werden muß.

Aus den früheren Angaben über den Energieverbrauch läßt sich ableiten, daß die Durchschnittsleistung einer Größe entspricht, die wir schon vor Jahrzehnten als mittlere Arbeit bezeichnet haben. Weiter läßt sich feststellen, daß die berufliche Leistung niemals in Dauerleistungen die Menschenkraft voll auswertet, ja meistens nur die Hälfte der maximalen Arbeitskraft beansprucht.

Aber zwei Tatsachen mögen berücksichtigt werden. Einmal die Beschränkung der muskulären Arbeit in den feuchttropischen Klimaten. Es ist die geringe Leistungsfähigkeit mancher Negerstämme oft schon berührt worden. Hier mag auch der Wille zur Arbeit, der den Kulturmenschen durchschnittlich auszeichnet, fehlen.

Der zweite Punkt wäre das Vorkommen der Unzweckmäßigkeit einer Volksernährung auf Grund von religiösen Vorstellungen, wie bei den Hindus, mit Verminderung der Leistungsfähigkeit als Folge schlechten Körperzustandes.

Wie sich die eben auseinandergesetzten Quantitätsverhältnisse der Massenernährung und die Qualität und Auswahl an Nahrungsstoffen im Laufe von Jahrtausenden gestaltet haben mögen, läßt sich durch genaue zahlenmäßige Beobachtungen nicht erweisen. Denn auch nur vereinzelte Feststellungen exakter und quantitativer Art reichen nicht weiter als etwa 130—140 Jahre zurück. Ein berühmter Physiker, Graf Rumford, hat damals in München die Kost der Soldaten genau untersucht, und aus diesen Angaben habe ich berechnet, daß die Ernährungsmenge und der Eiweißverbrauch der damaligen Soldaten in nichts von den heutigen verschieden war. Da aber die Völker ihre allgemeine

somatische Beschaffenheit in Jahrtausenden nicht geändert haben, so ist nach zwei Richtungen hin, nämlich was die energetischen Verhältnisse und den Proteinverbrauch anlangt, anzunehmen, daß Veränderungen auch darin sich nicht ausgebildet haben werden. Anders steht es mit den schon berührten labilen Verhältnissen zwischen Fett und Kohlehydraten, die mit dem Wandel der Nahrungsmittel Verschiebungen zwischen den beiden N-freien Stoffen vielleicht herbeigeführt haben können.

Auch für die Zukunft werden wir in den Grundzügen des Energie- und Proteinverbrauchs pro Kopf der Bevölkerung kaum eine Änderung erwarten. Wie später auseinandergesetzt wird, läßt sich in Zukunft sogar eine weitere Ausgleichung der Ernährungsweise der verschiedenen Nationen als das Wahrscheinlichste voraussetzen.

II. Abschnitt.

Die Nahrungsmittel.

Wenden wir uns nach den Einheitswerten des quantitativen Nahrungsverbrauches der Frage zu, womit stillen denn die Völker ihre Lebensbedürfnisse, so betreten wir ein Gebiet, auf dem die Natur uns die allergrößte Freiheit läßt; schon die Fülle von eßbaren Dingen ergibt unbegrenzte Möglichkeiten und Kombinationen. Von einheitlichen Zügen, von einer Ordnung, Gruppierung scheint man kaum reden zu können.

Die Menschen leben, wie es scheint, überall von dem, was ihnen ihr Land, ihr Boden, ihre Viehzucht bietet oder der Handel bringt. Und in demselben Volke sind in den einzelnen Gruppen Lebensregeln und Speisegewohnheiten ungemein zahlreich.

Jedes Volk, ja jeder Stamm hält an Besonderheiten fest; der Europäer ißt im allgemeinen ein chinesisches Menu mit Schrecken und Abscheu, und der Chinese verachtet als barbarisch, was wir ihm darbieten. Ja man braucht nicht weit zu reisen, um scharfe landsmannschaftliche Unterschiede auch bei uns zu finden. Trotz der Vielseitigkeit der Erscheinungen ist es aber doch möglich, ganz bestimmte Gruppierungen von durchschlagender Bedeutung festzustellen.

Es mag die Bemerkung vorausgeschickt sein, daß es für den Menschen vom Standpunkt des Stoffwechsels offenbar keine Prädestination zum alleinigen Genuß von Animalien oder von Vegetabilien gibt. Anatomische Bedenken haben schon wegen der Auswahl und Vorbereitung der Nahrungsmittel durch die Kochkunst keine Bedeutung. Auch die praktische Erfahrung zeigt uns die Möglichkeit der beiden Ernährungsformen.

In neuerer Zeit hat man einzelne Bezirke kleiner Völkerschaften mit ausschließlicher Fleischernährung beobachtet. Es sind die Eskimos, die zwischen Hudsonbay und Makenziefluß fern vom Meere leben; wir kennen die Lebensweise der Wolgafischer, welche zur Fangzeit über $^{8}/_{10}$ ihrer Kost mit Fischfleisch decken, und andererseits indische Bevölkerungsgruppen, die keinerlei tierische Nahrung aufnehmen. In dieser Vielseitigkeit unseres Stoffwechsels

und unserer Verdauungsorgane liegt die Möglichkeit des Menschen, auch unter extremen Verhältnissen sich seßhaft zu machen.

Betrachten wir aber nun die Kulturvölker nach ihrer Nahrungswahl, so ergibt sich folgendes Bild.

Von 100 Kalorien sind

	in Italien	in Frankreich	in Deutschland	in England
Zerealien	63.7	55.2	40.8	37.7
Kartoffeln	1.9	6.7	12.0	6.3
Zucker	2.2	3.4	5.9	14.2
Fleisch	5.9	11.9	15.8	16.0
Milch	1.5	4.3	8.6	7.1

Unter den jetzt untersuchten Völkern werden die extremen Möglichkeiten der Nahrungswahl nicht ausgenutzt. Nur bei den Japanern könnte man sagen, sie lebten im wesentlichen vegetarisch, denn 95 % ihrer Kost entstammt dem Pflanzenreich.

Die Animalien sind den Pflanzen gegenüber seltenere Nahrungsmittel, daher bewegen sich die animalischen Nahrungsanteile innerhalb engerer Grenzen. Im allgemeinen findet man nicht mehr als $^4/_{10}$ der Kost aus Animalien bestehend, und $^6/_{10}$ sind Vegetabilien. Zu den Animalien werden übrigens nicht nur Fleisch usw. gerechnet, sondern auch die tierischen Fette (z. B. Butter). Das Verhältnis der Animalien ist mit Japan = 1 beginnend in Italien = 2, Frankreich = 4, Deutschland = 6, England = 8. Der relative Fleischkonsum wird in Italien = 1 gesetzt, in Frankreich = 2, Deutschland = 3, England = 3. Man weist also dem Engländer zu Unrecht ein übertriebenes Fleischbedürfnis zu. Zwischen Deutschland und England bestehen nur Unterschiede in der Art der Fleischsorten, welche aufgenommen werden, in Deutschland viel Schweinefleisch und Wurstwaren, in England Hammel- und Rindfleisch. Deutschland und England genießen viel mehr tierisches Fett als andere Nationen.

Der Deutsche ist der einzige, in dessen Kost die Kartoffel eine größere Rolle spielt. Gemüse machen bei uns etwa $^1/_{20}$, das Obst $^1/_{40}$ unserer ganzen Nahrung aus. Der Engländer genießt am wenigsten Gemüse, nämlich nur $^1/_{60}$—$^1/_{70}$ des ganzen Nahrungsbedarfes; die Kost der Italiener ist die einzige, welche nennenswert Früchte aufführt (9.9 % der ganzen Kost).

Was die Gründe für die verschiedene Wahl der Nahrung bei den einzelnen Nationen sind, läßt sich in Kürze nicht darlegen. Der Grundgedanke scheint zunächst der wahrscheinlichste, ein Volk wird sich von dem nähren, was das Land an Nahrungsmitteln produziert. Allein es zeigt sich doch die Unmöglichkeit, diesen Gesichtspunkt allein als maßgebend zu betrachten. Nicht der Fleischmangel zwingt den Menschen stets zu einer vegetarischen Kost. Es gibt Länder, welche die Haustiere nur als Zugtiere benutzen und weder die Milch der Kühe noch das Fleisch benutzen.

Der volkswirtschaftliche Nachteil der völligen Vernachlässigung der Viehwirtschaft als Nahrungsquelle liegt auf der Hand.

Zweifellos hat in vergangener Zeit, als der Welthandel noch nicht bestand, die Eigenproduktion einen bestimmenden Einfluß ausgeübt, heute

kennen wir Nationen, die zwar die altgewohnten Ernährungsformen beibehalten haben, zur Deckung ihrer Bedürfnisse aber ganz auf den Import angewiesen sind und durch diesen nur allmählich Veränderungen ihrer Nahrungsversorgung einleiten.

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, daß die genauer bekannten Kulturvölker mit Ausnahme der Japaner von einer gemischten Kost leben, die zu $^4/_{10}$ aus Animalien besteht.

Ein weiteres Scheidungsprinzip läßt sich zunächst nicht finden. Ganz anders gestaltet sich das Verhältnis für die Massenernährung, wenn wir nur eine Nahrungsmittelgruppe, die Zerealien, näher betrachten und damit dann die Weltproduktion an Zerealien in Zusammenhang bringen.

Von letzteren gibt es nur eine beschränkte Zahl, welche für den Menschen praktisch in Betracht kommen, nämlich nur Weizen und Roggen (Gerste und Hafer) einerseits, Reis und Mais andererseits; gemischte Ernährungsformen zwischen beiden Hauptgruppen kommen eigentlich nicht oder nur in wenigen Ausnahmefällen bei den Weizen- und Roggenessern vor.

Die Völker trennen sich, indem sie als Zerealien die eine oder andere Art benutzen, in die Gruppe der Brotesser und Reis- oder Breiesser; letzteren Namen hat man gewählt, um zu sagen, daß Mais und Reis nur in gequollenem Zustand aufgenommen werden. Auf die Frage, ob die Breiform der Zerealien in längst vergangenen Zeiten die primäre war, gehe ich nicht ein, da sie hier nicht interessiert[1].

Wie man aus der Weltstatistik sieht, gehört die Mehrzahl der heutigen Einwohner, nämlich $^3/_5$, zu den Brei-, hauptsächlich Reisessern und nur $^2/_5$ zu den Brotessern, welche Weizen und Roggen verwenden.

Der Reis wird meist gewaschen oder nicht gewaschen, enthülst oder nicht enthülst mit Wasser zum Quellen gebracht. Dabei gibt es sehr verschiedenartige Zusätze, entweder von etwas Fleisch, von etwas Fisch oder Gemüse oder gelegentlich Gewürze. Eine Mahlzeit wird meist warm gegessen, ein Teil manchmal zurückbehalten und kalt verzehrt. Aber all diese Einzelheiten haben nicht viel Interesse, die Hauptsache bleibt, Reis oder Mais sind nie verwendbar zu Brot.

Zur Brotbereitung kann man nur Weizen oder Roggen verwenden. Von den selten in schlechten Erntezeiten oder bei Nahrungsmangel gegessenen Hilfsbroten sei abgesehen.

Nur Weizen und Roggen enthalten die Klebereiweißstoffe, welche mit Wasser einen klebrigen Teig bilden, der durch Gärmittel (Sauerteig oder Hefe) gelockert wird.

Die Bedeutung, die in der Herstellung des Brotes als Nahrungsmittel liegt, hat man bis jetzt nicht ausreichend gewürdigt.

Was bedeutet das Brot im täglichen Leben? Das Brot ist eine auch kalt zu genießende, dauerhafte Konserve.

---

[1] Näheres findet sich bei Maurizio, Geschichte unserer Pflanzennahrung. 1927.

Durch das Brot wird ein erheblicher Teil der Nahrung aus dem üblichen Verband der Mahlzeiten herausgenommen. Und in diese Lücke müssen andere Nahrungsmittel hineinrücken, irgendwelcher Art; zumeist sind es die Animalien gewesen, welche bei den Brotessern die Ergänzung brachten. Das Brot führt also auch zur Belebung der Mahlzeit und Variation und zur gemischten Kost. Es ist auch merkwürdig, daß die Röstung des Mehles bei dem Backen dem Brot Geschmacksstoffe verschafft, die ein Abgegessensein an Brot eigentlich fast nie beobachten lassen. Das Brot ist trotz seines geringen Wassergehaltes kein zu trockenes, wohl aber ein gehaltvolles Nahrungsmittel.

Die primitivere Lebensform der Reisesser verfügt nur über sehr voluminöse wasserhaltige Gerichte, die sozusagen für jede Mahlzeit, von wenigen Formen der Zubereitung abgesehen, täglich wieder am Feuer zubereitet zu werden pflegen.

Unter den Brotessern haben wir so ziemlich alle Völker mit hochentwickelter Kultur, und auch die Japaner bereiten sich vor, die andere Ernährungsform zu wählen.

Die gemischte Kost der Brotesser zeichnet sich wegen der Mitverwendung von Animalien durch höheren Fettgehalt aus und ist deshalb konzentrierter an Nährstoffen. Bei den Brotessern sehen wir stets auch nebenbei die Viehzucht im Gebrauch, das Fleisch der Jagdtiere und die Viehzucht liefern den Grundstock der Hauptmahlzeiten.

Die aus Animalien und Vegetabilien gemischte Kost hatte u. a. den Vorteil, daß Landstrecken, die für Getreide unbrauchbar sind, in der Weidewirtschaft auszunutzen waren, also eine Mehrung der Produktion pro Hektar Fläche brachten. Die Viehzucht war auch immer eine gewisse Rückversicherung bei schlechten Ernten, mit denen man doch allzeit zu rechnen hatte.

Endlich basiert auf der Viehzucht auch die ganze Bekleidungswirtschaft, die Beschaffung des Leders, durch die Wolltiere die Beschaffung wärmender und gesundheitlicher Kleidung.

Bei den reinen Breiessern und jenen, die keine oder vernachlässigte Viehwirtschaft trieben und treiben, ersetzt die Baumwolle oder allenfalls die Seide nur unvollkommen das tierische Bekleidungsmaterial.

In den Brotessern der früheren Zeiten sehen wir schon die Grundzüge unserer ganzen heutigen Eßkultur angedeutet.

Nachdem wir die Gruppierung im großen vorgenommen haben, wird es notwendig sein, an der Weltstatistik einige Anhaltspunkte für die Produktion der Nahrungsmittel, welche auf die beiden großen Klassen treffen, zu gewinnen. Was die einzelnen Nahrungsmittel der Gegenwart anlangt, so läßt sich darüber folgendes sagen.

Von den beiden brotbildenden Getreiden nimmt der Weizen die erste Stelle ein. In der gesamten Getreidewirtschaft der Welt steht mit zunehmendem Anbau der Weizen mit 130 Millionen Tonnen voran. Daneben haben wir

43.4 Tonnen Roggen, der nicht einmal allein zur Menschenernährung dient und sichtlich im Bau zurückgeht.

In Europa ist die Weizenproduktion	54.9	Mill.	Tonnen
die Roggenproduktion	41.8	»	»
In Amerika ist die Weizenproduktion	41.2	»	»
die Roggenproduktion	1.4	»	»
In Asien ist die Weizenproduktion	26.5	»	»
die Roggenproduktion	0.2	»	»

Der Roggenbau konzentriert sich also auf Europa, er ist außerhalb als Brotbildner ohne alle Bedeutung.

An Roggen wurde 1925 geerntet:

In Deutschland ...	8.1	Mill. Tonnen	neben 3.2 Mill. Tonnen Weizen	
» England	—			
» Frankreich	1.1	»	»	
» Rußland	20.8	»	»	neben 18.0 Mill. Tonnen Weizen
» Polen	6.6	»	»	
» U.S.A.	1.2	»	»	
» Kanada	0.3	»	»	

Die einzigen drei Roggenländer sind heute noch Deutschland, Polen und Rußland, aber selbst Rußland erzeugt neben Roggen reichlich Weizen, so daß Deutschland eine Ausnahmestelle einnimmt. Das eigentliche Brotgetreide der Welt ist jetzt und bleibt offenbar der Weizen. Roggen ist stets weniger ertragreich als Weizen. In roher Zahl liefert ein Hektar etwa

bei Roggen	1453	kg	brauchbares Material
» Weizen	1767	»	» »

Kurz gesagt, an verdaulichen Nährstoffen dürfte ein Weizenacker 20% mehr Kalorien als ein Roggenfeld und 70% mehr Protein liefern. Wir werden diesen wichtigen Punkt später nochmals zu betrachten haben, wenn die Frage der Anbaufähigkeit des Weizens zu erörtern ist. Die Zerealien sind, vom Brot (Weizen und etwas Roggen) abgesehen, nur als Viehfutter gedacht. Rußland hat früher 41% seiner Gerste auch ins Ausland geschickt, womit Deutschland zum Teil seine frühere große Schweinezucht betrieben hat. Heute, nach Parzellierung des Großgrundbesitzes, gehen kaum 8.3% der Ernte zur Ausfuhr. Deutschland hat seine Gersteneinfuhr, die früher 96.9% der Eigenproduktion ausmachte, auf 34.6% der Eigenproduktion reduziert. In der Haferproduktion und -einfuhr hat sich bei uns nichts geändert, die Haferproduktion Rußlands sinkt, jene von Amerika steigt.

Der Reis ist das Hauptnahrungsmaterial des Breiessers, angebaut hauptsächlich in den Monsunländern Süd- und Ostasiens. Unter den Produzenten steht an erster Stelle China, dann folgt Brit.-Indien. Der Reis-

handel zu Nahrungszwecken ist im Verhältnis zur Produktion gering. Die Bedeutung des Reises für einzelne Länder geht aus folgender Tabelle über die Produktion hervor:

Tabelle.

	1926 Millionen Tonnen	
Italien	0.69	1.04 (Europa)
Sonstiges Europa	0.35	
U.S.A.	0.8	1.68 (Amerika)
Sonstiges Amerika	0.84	
Britisch-Indien	46.13	199.36 (Asien)
Japan	11.17	
Südchina	6.08	
Siam	4.95	
Niederländ.-Indien	5.05	
China	120.0	
Sonstige Länder	5.0	

Der Reis verbleibt also wesentlich in Asien als hauptsächliches Nahrungsmittel, was von ihm sonst in der Welt verbraucht wird, hat wenig Bedeutung.

Der Mais, der auch zu den Massenprodukten der Zerealien gehört, spielt für die menschliche Ernährung keine sehr wesentliche Rolle. Die Maisproduktion nimmt zu, Amerika ist der Hauptproduzent, es liefert drei Viertel der ganzen Welternte. Rußland ist von der Gerstenfütterung der Tiere mehr und mehr zur Maisfütterung übergegangen, den Maishandel unterhält Argentinien, während der Hauptproduzent, die U.S.A., den größten Teil für die Viehzucht des eigenen Landes aufbraucht.

Im Zusammenhang hiermit sei noch die Kartoffel erwähnt. Sie gehört zwar nicht zu den Zerealien, hat aber dort, wo sie sich eingenistet hat, das Brotgetreide etwas zurückgedrängt, so etwa wie der Reisbau dem Brotkornbau in Italien einstmals gefährlich wurde.

Wir haben im allgemeinen übertriebene Vorstellungen von der Bedeutung der Kartoffel für die Volksernährung. Die Kartoffel spielt in der Welternährung überhaupt keine Rolle. Merkwürdigerweise nicht einmal in ihrem Mutterlande, in Amerika; für die heutige Verbreitung der Kartoffel scheint im wesentlichen der Stand der Schweinezucht maßgebend zu sein, weniger die Menschenernährung.

Heutzutage sind nur Deutschland, Rußland, Polen die hauptsächlichsten Kartoffelproduzenten und Kartoffelesser.

Die Gesamtproduktion an Kartoffeln beträgt in Mill. Tonnen

in Deutschland	30.0
Rußland (+ Asiat. Rußland)	50.8
Polen	24.9
England und Irland	6.8
Nordamerika	9.7
Kanada	2.0

Früher war Deutschland der erste Kartoffelproduzent, jetzt tritt es hinter Rußland zurück. In unserer Ernährung macht die Kartoffel 12% des Gesamtnahrungswertes aller Nahrungsmittel aus. Technischer Verbrauch und Viehfütterung verschlingen auch bei uns ganz erhebliche Mengen. Der Verbrauch für den Menschen geht anscheinend zurück.

Ob bei den Völkern bestimmte Geschmacksrichtungen bestehen, scheint uns nicht überzeugend erwiesen zu sein. Manche meinen, von den Russen und von den Slaven überhaupt, daß diesen mehr Zuneigung zu sauren Darbietungen in der Kost eigen sei.

Im Grunde genommen läßt sich nur sagen, daß das Salzige sich mehr mit dem Genuß von Fleisch verträgt. Von den Zerealien haben die Weizenbrotesser ein Nahrungsmittel, das mehr zu Süß neigt, die Roggenbrotesser ein Gebäck von ausgeprägt saurem Geschmack, und insofern würde ja dies mit den Roggenbrotessern, die hauptsächlich Slaven sind, und mit deren angeblicher Zuneigung zu sauren Speisen übereinkommen.

Noch kurz mag der Zucker als Nahrungsmittel gestreift werden. Seine Hauptbedeutung für die große Masse des Volkes hat er als Genußmittel, d. h. wegen des süßen Geschmackes.

Zur Zeit haben die Angelsachsen den größten Zuckerverbrauch. Der Grund ist nicht leicht einzusehen. Denn nächstliegend wäre es, an den großen Konsum der Engländer an Tee zu denken, andererseits haben die Hauptteekonsumenten, die Chinesen, keineswegs, soweit bekannt ist, einen außergewöhnlichen Zuckerverbrauch. Die gewaltige Ausdehnung des Genusses gezuckerter Früchte als Konserven in England und in Amerika könnte vielleicht als Quelle hohen Zuckerkonsums mit in Betracht kommen.

Damit mag die Betrachtung unserer heutigen Welternährung vorläufig abgeschlossen sein.

III. Abschnitt.

Der Wandel der Ernährungsformen bis zur Gegenwart.

Es hat großen Reiz, auch noch in die Vergangenheit zurückzugreifen und sich zu belehren, wie die gegenwärtige Ernährung entstanden sei, freilich ist das Material zu solchen Betrachtungen etwas unsicher, weil uns zahlenmäßige Angaben aus älteren Zeiten vollkommen fehlen. Auch muß ich mich meist auf europäische Verhältnisse beschränken.

Was wir moderne und heutige Ernährung nennen, ist erst in ungemessenen Zeiträumen mit der Entwicklung des Menschen entstanden. Zweifellos hat die Entdeckung von Ernährungsmöglichkeiten erst die Ansiedlung der Menschen auf der Erde begünstigt. Über die ersten Urformen der Ernährung wissen wir wenig Sicheres. Aber doch so viel, daß es sich um eine Form der Nahrungsbeschaffung gehandelt haben muß, die man kurzweg als Jagd usw. und nachdem als Fischerei bezeichnen darf. Daß die Menschen sich je nach Klima und Jahreszeit auch mit dem Sammeln eßbarer Vegetabilien beschäftigt haben werden, kann als selbstverständlich gelten. Ich

habe schon erwähnt, daß die hohe Akkomodationsfähigkeit an Animalien wie Vegetabilien die Verbreitung des Menschengeschlechts gefördert hat. Die Art dieser Urernährung wird in einzelnen Teilen der Erde gewiß recht grundverschieden gewesen sein. Menschlich wurde die Ernährung erst mit dem Gebrauch des Feuers. Diese Erfindung brachte die Möglichkeit, an sich ungenießbare Dinge schmackhaft und bekömmlich zu machen. Die Rohkost zu verlassen, bedeutete den größten Fortschritt in der Ernährungsgeschichte der Menschheit, vom Standpunkt der Ausdehnung der Ernährungsmöglichkeiten in der Quantität, der Hebung der Qualität und hinsichtlich der hygienischen Beschaffenheit der Kost Gewinn an Gesundheit.

Die Gewinnung neuer Geschmackswerte war ebenso wichtig wie die Gewinnung vermehrter Nahrungsgröße.

Die Nahrung der Menschheit war im Lauf der Jahrtausende unzähligen Variationen ausgesetzt, ihr Entstehen und ihre Umbildung ein fortwährendes Tasten und Suchen. Wie lange es dauerte, bis selbst die kümmerlichsten Fortschritte erreicht wurden, darüber haben wir keine genauere Kenntnis. Manche meinen, daß mindestens seit dem Übergang, welche die Quartärzeit mit der jetzigen Erdperiode verbindet, von der Epoche der Steinzeit an schon Getreide, und zwar allem Anschein nach Weizen, gebaut worden sei.

Aber lassen wir die Perioden der Geschichte, die uns doch keine Sicherheiten geben können, beiseite, so sehen wir in dem alten Reich der Ägypter schon die Brotbereitung auf hoher Stufe stehen. Die alten Ägypter waren Wohlschmecker ersten Ranges, die Tischchen mit Totenspeisen waren bedeckt mit Früchten, Broten, Kuchen, Fleischstücken, Geflügel, Eiern, Wein und Ölkuchen und Blumensträußen.

In eines Königs Grabpalast fand man sechs Sorten Weine, fünf Sorten Geflügel, vier Sorten Bier, zehn Sorten Fleisch, sechzehn Sorten Brot und Kuchen.

Das Brot bildete ein Hauptnahrungsmittel wie heute bei uns. Das Korn wurde entweder zerstampft, aber es gab Schrotmehl und Feinmehl, und auch in Mühlen wurde Korn gemahlen und dabei gesiebt. Die Brotfrucht war der Weizen. Der gärende Teig wurde mit bloßen Füßen getreten, dann gab man ihm die Form, Kuchen, Sternchen, Dreiecke, Schnecken wie heute. Gebacken wurde an geheizten Öfen, auf deren Außenfläche der Teig aufgelegt wurde.

Von Ägypten aus kamen diese technischen Ergebnisse allmählich zu anderen Völkern. Die gemischte Kost der alten Ägypter entspricht durchaus selbst modernen Verhältnissen. Die Verwendung des Fleisches von Haus- und Schlachttieren, die Verwendung der Milch, des Brotes und Mehles und des Käses als Nachspeise bei den Römern war allezeit die Kost der Vornehmen. Und was man später so tadelnd als Überschwang der römischen Kost verwarf und mit Recht, war niemals die eigentliche Volksernährung, welch letztere sich in einfachen Formen bewegt haben wird, eine gemischte Kost aus Animalien und Vegetabilien, in den Zutaten schwankend nach den Provinzen. Wohin die Römer kamen, brachten sie ihre Essensform als Ausdruck ihrer Zivilisation.

Völker, die aus dem Osten Europas nach Deutschland einwanderten, haben wohl ihre eigene Essenskultur mitgebracht, sich aber bald von der höheren Kultur der römischen Bezirke beeinflussen lassen. In ganz Europa, das ja zur Broternährung gehört, war schließlich die grundsätzliche Ernährungsform die gemischte Kost, und auf diesem Standpunkt ist sie bis heute geblieben. Wir wollen dabei wesentlich nur die Ernährung größerer Landesteile im Auge behalten.

Wie die Lage betreffs des Konsums der Zerealien heute ist, wurde schon oben erwähnt. Aber nicht im entferntesten ist der landbautreibende Mensch von Anfang etwa auf unsere heutige Kultur oder reine Sämereien gekommen. Auch dort, wo man Brot herstellt, hat Art und Reinheit des Getreides vielfach gewechselt, wenn auch Weizen und auch Roggen weit verbreitet gewesen sind.

Was uns in hohem Maße auffällt, ist der allmähliche Umschwung im Anbau des Brotgetreides, der allmählich den Roggen verläßt und zur Getreidekultur übergeht und, wo das nicht möglich ist, den überseeischen Import in Anspruch nimmt.

Die früher weit verbreitete Roggenkultur, die auch als Mischkultur mit Weizen üblich war, ist immer mehr zurückgegangen.

Noch 1727 war in der Umgebung von Edinburgh ein kleiner Weizenacker eine Seltenheit, aber seit 1780 ist in Schottland der Weizenverbrauch auf das Zehnfache gestiegen. In Dänemark hat der Weizenbau und der Weizenverbrauch stark zugenommen.

In Frankreich wie in Italien, wo auch erst Roggen neben Weizen Verwendung fand, ist der Roggenbau dem Weizenbau ganz gewichen. Kanada, Australien und Britisch-Indien, soweit Brotgetreide gebraucht wird, sind Weizenesser. Dazu gehört auch Nordamerika, wo der Mais bei der menschlichen Ernährung nur nebenbei benutzt wird. Alle Romanen, Angelsachsen, die Schweizer, ein Teil von Süddeutschland sind Weizenbrotesser. Was sonst noch an Zerealien im Gebrauch ist, ist alles dem gewichen.

Nur Teile von Deutschland, d. h. der Osten, Rußland, Polen, sind vorläufig noch Schwarzbrotesser und Roggenländer geblieben. Vor 100 Jahren war in England und in Irland Roggenbrot viel verbreitet, heute ist es dort eine Seltenheit.

Der Roggen verlor sich in Frankreich allmählich schon vor der Revolutionszeit. In den französischen Städten herrschte seit fast zwei Jahrhunderten das Weizenbrot. Die Ansprüche an ein gutes Mehl waren in Frankreich schon im 16. und 17. Jahrhundert höher als anderwärts. Überall wollte man gebeuteltes, d. h. kleiefreies Mehl haben. Der rascheren Entwickelung eines guten Brotes war die Brotversorgung durch den Staat hinderlich, bei der gewissen Interessentenkreisen und dem Hof enorme Gewinne zuflossen, während das Volk durch die hohen Brotpreise bedrückt wurde. Es gab Brot für die verschiedenen Stände. Das feinste Weizenbrot für den oberen Adel und Hof, ein Hausbrot oder bürgerliches Brot und das dritte Pain bis, ein schwarzes Brot mit Kleie, und viertens für die Ärmsten Brot mit besonderem Kleiezusatz.

Die Brotfrage hat mit zum Ausbruch der Französischen Revolution beigetragen, und der erste Schritt war der, daß die Brotversorgung und die Einteilung des Brotes nach Ständen aufgehoben wurde. Die Brotfrage hat das ganze 19. Jahrhundert beschäftigt, sie gehört noch heute zu den Tagesfragen und zeigt, mit welcher Zähigkeit einzelne Probleme verfolgt werden. In mühevollem Ringen hat die Technik alter Ordnung, die als Flachmüllerei bezeichnet wurde, Kleie und Mehl getrennt und etwa 65 % brauchbares Material geliefert, die moderne Hochmüllerei, besonders für den Weizen angewandt, bringt es auf 80 % Ausmahlung. Der ganze Brotkampf des 18. Jahrhunderts drehte sich um die Beseitigung der Kleie. Das 19. Jahrhundert wollte in der Kleie wieder besondere Nährwerte entdecken, bis man nachzuweisen in der Lage war, daß aus rein morphologischen Gründen niemals aus ihr Verdauliches geschaffen werden kann, und daß die Natur des kleiereichen Mehles der Verdauung unter keinen Umständen günstig ist.

Vor wenigen Jahren konnte ich auch zeigen, daß die Kleiebeseitigung vom ökonomischen Standpunkt kein Nachteil ist, weil die Verfütterung an Tiere in Fleisch und Tiermast hochwertige Nährstoffe dem Menschen zu gewinnen erlaubt, in demselben Maße, wie er auf den verdaulichen Teil der Kleie verzichtet.

Inzwischen ist die Bewegung der großen Massen bei uns im Verlangen nach Weißbrot, d. h. Weizenbrot, immer lebhafter geworden; besonders in den Industriezentren, in großen Städten greift das Verlangen nach Weißbrot immer mehr um sich. Mit Sorge sieht der Roggenbauer in die Zukunft, der Bedarf an Weizen muß per Übersee gedeckt werden und bedingt eine Steigerung der gegenwärtigen negativen Handelsbilanz. Die Verhältnisse drängen zu einer Entscheidung, die Frage der Möglichkeit der Umstellung des Roggenbaues in Weizen muß ernstlich in Aussicht genommen werden. Solche Möglichkeiten gibt es. Es ist vielleicht wenig bekannt, daß der Getreidebau in Amerika erhebliche Krisen durchgemacht hat und Krankheiten aller Art die Ernten vernichtet haben und große Strecken für Weizen unbebaubar waren, bis Carlton auf den Gedanken kam, im Ausland nach geeigneten Weizensorten zu suchen, die das rauhe Klima seiner Heimat vertragen. Er fand in der Turgai-Steppe einen herrlichen Weizen, Kubanka durum, der im Nordwesten der Vereinigten Staaten heimisch geworden ist, und den Charkow-Winterweizen. Auch umfangreiche Züchtungen in Deutschland haben gezeigt, daß man auf dem Wege der Vererbungszüchtung zu Weizen kommen kann, welche auf vielen Roggenböden gut gedeihen.

Die Beispiele mögen genügen, um die Wege zu zeigen, auf denen die Landwirtschaft neue Früchte, die der allgemeinen Geschmacksbewegung der Massen entsprechen, zu züchten vermag.

Nicht zu vergessen ist die inzwischen geglückte Herstellung großer Mengen künstlichen Düngers, wodurch die Erträgnisse des Bodens gesteigert werden können.

Außer Roggenbau und Weizenbau hatten wir in Deutschland Perioden der Einwanderung anderer Zerealien, die, wie sie gekommen, auch wieder verschwunden sind. Namentlich nach Mißernten hat man auf das

Mitverbacken der verschiedenartigsten Dinge zurückgegriffen, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll, auch nicht auf die Aussaat von Mengekorn, d. h. verschiedenartiger Körnerfrüchte nebeneinander. Von den wieder verdrängten Körnerfrüchten mag folgendes gesagt sein.

Hirse, einst über den größten Teil der Welt verbreitet, ist heute nur noch in einzelnen Teilen Rußlands, Nordchinas, Mittelasiens zu finden.

Der Buchweizen, seit dem 15. Jahrhundert in Norddeutschland bekannt und über Sibirien aus Nepal und China zugewandert, ist eine uralte Kulturpflanze Ostasiens, war bis nach dem nördlichen und mittleren Frankreich gewandert. Aber schon seit dem 18. Jahrhundert ist der Buchweizen ohne jede Bedeutung und war zu Brot nie zu gebrauchen außer in Hungerszeiten.

Hafer zu menschlicher Ernährung ist als Grütze nur bei den Slawen und in einzelnen Teilen Schottlands zu finden. Mit den Schotten ist die Hafergrütze auch nach Amerika gekommen.

Eine merkwürdige Geschichte haben die Leguminosen als Nahrungsmittel. An sich sind sie als Eiweißträger geschätzt worden und seit Mitte vorigen Jahrhunderts als billige Möglichkeiten der Eiweißzufuhr empfohlen. Es ist uns bekannt, daß Pythagoras seinen Schülern die Bohnen verboten hat. Man hat sich vielfach bemüht, den Grund dieses Verbotes aufzuklären. Es dürfte aber das, was Cicero über das Bohnenverbot sagte, zutreffen. Gerichte aus reifen Bohnen belasten den Darmkanal und verursachen Blähungen und stören so die Ruhe des Geistes. Diese Darmstörungen werden in gleicher Weise später immer wieder hervorgehoben und galten auch für ärztliche Diätetik des vorigen Jahrhunderts als wichtig. Es ist aber interessant, auf den Unterschied zu achten, den die Diätetik zwischen frischen, halbreifen Leguminosen und den reifen machte. Den jungen Früchten sollten die schädlichen Wirkungen nicht zukommen. Wahrscheinlich ist diese empirische Beobachtung ganz zutreffend.

Von den Linsen kennt man ihre Herkunft. Sie waren jedenfalls in Palästina zu Hause und angebaut, und die Römer hatten eine Vorliebe für sie. Die Linsen galten zwar für schwer verdaulich und vor allem nur für Leute angemessen, die, in schwerer Arbeit aufgerieben, ihre Kräfte wieder ersetzen wollten.

Haben sich auch die Leguminosen über 2000 Jahre und noch länger mehr oder minder bedeutungsvoll unter den Volksnahrungsmitteln erhalten, so haben sie es doch nie zu einer großen, allgemeinen Anwendung gebracht. Auch unsere modernen Bemühungen, ihnen wenigstens in den Volksküchen einen Platz zu sichern, sind völlig fehlgeschlagen.

Wir finden jetzt einen ausgesprochenen Niedergang des Anbaues der Leguminosen. Die Saubohnen, Gartenbohnen, Linsen, Erbsen, die früher in Mitteleuropa vielfach genossen wurden, nehmen von Jahr zu Jahr in Anbau und Konsum ab. Und ganz ähnlich steht es mit den ölliefernden Pflanzen. Rapsbau, früher weit verbreitet, findet sich nur mehr im Osten, und auch da wird das Öl mehr zur Seifenfabrikation als zum menschlichen Genuß verwendet.

Auch sonst hat sich mancherlei Bemerkenswertes ergeben. In Amerika wurde der Mais als Kulturpflanze zuerst entdeckt. Aber Amerika hat die Maiskultur größtenteils nur für die Viehzucht aufgenommen.

Die Kartoffeln, zuerst 1586 entdeckt und bald eingeführt, sind erst um das Jahr 1800 bei uns in großem Stil zum Anbau gekommen, haben in Deutschland, Rußland, Polen ausgedehnte Bezirke in Anspruch genommen und für die Volksernährung besondere Bedeutung erlangt. Sie verdrängten einen Teil des Weizens und Roggens, wodurch eine nicht unwesentliche Umstellung der Kost, besonders in Norddeutschland, erfolgt ist.

Der Mais, der sich auf einer schmalen Zone im Süden von Italien über Rumänien und etwas weiter nach Osten eingebürgert hatte, wird in Zukunft keine weitere Verbreitung finden. Er kam über die Levante im 16. Jahrhundert nach Italien. Der Mais war schon im alten Amerika, bei den Azteken, Mayas, Chibchas uud im Inkareich eine wichtige Kulturpflanze, aber nicht brotbildend; die amerikanische heutige Maiskultur verdrängt als Tierfutter Hafer und Gerste.

Vom Reis, eine Frucht der tropischen und subtropischen Teile der Erde, der durch die Araber nach Spanien und Ägypten und später nach Italien gelangte, läßt sich nur sagen, daß er sich in seiner Heimat Asien seit Jahrtausenden als Volksnahrung gehalten hat, dabei leben mehr als $^3/_5$ aller Menschen von ihm. Er ist eine ausgesprochene Breipflanze, die selbst die Herstellung von Fladen nur aus einer Sorte von Klebereis erlaubt. Seine Kultur geht in Europa in den letzten Jahren immer mehr zurück, zumal Reisfelder eine sehr günstige Stätte für die Verbreitung der Malaria bilden, und das dürfte für die künftigen Zeiten auch für die Konsumenten in seiner alten Heimat in Betracht zu ziehen sein. Der Reis ist in Europa fast nur ein gelegentliches Beigericht.

Die vorstehenden Betrachtungen haben uns ein wechselndes Bild der Volksernährung gezeigt: das Beibehalten der Grundernährungsformen über Jahrtausende, dabei aber doch wieder den Einbruch fremder Bodenkulturen und ihr Vergehen. Seit einem Jahrhundert oder vielleicht, besser gesagt, seit einem halben Jahrhundert sind die Wandlungen der Kultur recht häufig und umfangreich geworden. Seit dem Zeitalter der großen Seefahrer, der Entdeckung Amerikas und Ostindiens, hat man wohl eine Reihe neuer Nahrungsmittel kennengelernt, ohne aber die Grenzen zwischen Brot- und Breiessern nennenswert zu verschieben. Das Bleibende der neuen Berührung mit dem Auswärtigen blieben eigentlich nur die Genußmittel Tee, Kaffee, Kakao, Tabak, die ersten drei bedeutungsvoll, weil sie alte Ernährungsformen — die Suppen als Frühstück — sozusagen allgemein verdrängt haben und nützend, weil sie doch für einen großen Teil der Bevölkerung den Genuß des Alkohols sicher vermindert haben.

Noch befinden wir uns im Zeitalter der Umwälzungen in gärender Zeit; es liegt nahe, zu fragen, was bringt die Zukunft? Für ferne Jahrhunderte etwas zu sagen, ist uns im Augenblick unmöglich, schränken wir aber unseren Ausblick etwas mehr ein, so können wir uns, glaube ich, doch ein Bild machen, was sich in einigen Jahrzehnten ereignen wird.

IV. Abschnitt.

Die Zukunft.

Anscheinend laufen seit Jahrhunderten oder Jahrtausenden die beiden Grundernährungsformen der Menschheit nebeneinander her. Von beiden ist die Form der Breiesser die ältere, aber innerlich in ihrer Ausgestaltung die konservativere, während wir bei den Brotessern ein fortwährendes Ringen um Verbesserung gesehen haben. Aller Wahrscheinlichkeit nach bestimmte das Entstehen des Brotessens einiger Nationen ihre Bodenständigkeit im gemäßigten Klima, wo die Kultur der an subtropisches Klima und tropisches Klima gewöhnten Zerealien nicht in Frage kam. Die Härte der Lebensbedingungen erzog ein kräftiges, kampfbereiteres Geschlecht, die zahllosen politischen Umwälzungen, der Auf- und Niedergang von Völkern erheischte fortwährend Kampf um die Existenz, Verbreitung der Kenntnisse neuer Existenzbedingungen und außerdem auch die Erorberung neuer Gebiete, und wandernde Völker verbreiteten die Kenntnisse ihrer Kultur und erfuhren die Beeinflussung durch Fremde.

Aber es muß noch etwas Besonderes im Menschen sein, was ihn oder doch manche Völkerschaften dazu bringt, immer wieder nach Neuem, Besserem zu suchen.

Vor allen treibenden Kräften zu Verbesserungen steht der Anspruch, der durch den Geschmackssinn in erster Linie erhoben wird. Man denkt meist nicht daran, daß unsere ganze Wahl der Nahrungsmittel von diesem Gesichtspunkt aus geleitet wird. Alles, was wir an Nahrungsmitteln kaufen, wird nach einem für uns nicht näher zu erklärenden Geschmackswert gekauft. Der Geschmackswert bestimmt den Preis, eine Skala nach dem Preiswert umfaßt, nach dem physiologischen Nährwert betrachtet, die allerverschiedensten Mengen an Nährstoffen und Qualitäten.

Der Geschmackswert wird aber niemals nur nach der Eigenschaft der rohen Substanz des Handels, sondern bei den meisten nach dem Geschmackswert beurteilt, den die Substanz als fertige Speise bietet, also gewissermaßen nach dem Küchenwert.

Diese Geschmackswerte sind zum Teil solche, die man ohne weiteres, wie etwa beim Zucker, welchen alle Menschen als etwas Angenehmes schätzen, empfindet.

Und endlich bedingt das Behagen, das eine Kost oder Speise uns bereitet, eine bestimmte Wertschätzung. Es mögen dabei nicht immer sehr klare Vorstellungen von der Art der körperlichen Wirkung sein, welche auf die Massen Einfluß gewonnen haben, Vorstellungen, die vielleicht in dem allgemeinen Ausdruck der »Bekömmlichkeit« zusammengefaßt werden mögen, für die man dann glattweg den Ausdruck »gesund« wählt.

Wenn auch der Einzelne seine eigenen Lebenserfahrungen macht, so wiegen diese nicht so schwer wie die Beeinflussung unserer Nahrungswahl durch die Erziehung im weitesten Sinne des Wortes, d. h. die traditionelle Lehre von den Nahrungsmitteln. Jede Tierspezies hat ihre besonderen Nahrungsneigungen,

und so gibt es eben typisch menschliche Züge in der Nahrungswahl, die rein nationale Färbung tragen.

Ein kleines Kind kann erst durch lange Überredung dazu gebracht werden, stinkende Käsesorten für etwas zu halten, was begehrenswert sein soll; das natürliche Gefühl sträubt sich zuerst gegen dieses Nahrungsmittel.

Ebenso können auch andere Motive für die Wahl und Bereitung rein suggestiver Art bestimmend sein. Ein Vegetarier wird aus seiner Liste alle Dinge als ungesund streichen, die von Tieren herrühren. Er sieht auch in einem zunächst wohlriechenden und wohlschmeckenden tierischen Nahrungsmittel etwas Ungesundes. In ganz dem gleichen Sinne wirken »elektiv« auf die Nahrungsmittel alle diejenigen religiösen Vorschriften, die auch heute noch bei einzelnen Völkern und Stämmen sich finden.

Es mag auch darauf hingewiesen sein, daß manche Dinge an sich nicht einen hohen Küchenwert haben, sondern nur in Kombination mit anderen Nahrungsmitteln. Eine nationale Küche ist also etwas sehr Komplexes, weil in ihr durch lange Erfahrung solche Kombinationen sich ausgebildet haben, durch welche ein hoher Genußwert gesichert wird, wobei dann auch die Getränke, auf die ich hier nicht eingehe, eine bedeutungsvolle Rolle spielen können.

Die traditionellen Geschmackswerte und Nahrungstriebe sind von einer ungemeinen Widerstandskraft und erhalten sich gegen alle künstlichen Versuche, sie umzugestalten. Sie sind auch so charakteristisch, daß bei uns noch die Eigenarten einiger Volksstämme nach Lieblingsspeisen charakterisiert und benannt werden.

In diesen Geschmackswerten liegt aber keineswegs nur Unwert und Luxus, vielmehr sichern sie (schon das Aussehen und der Genuß vieler Speisen) eine Anregung für die Sekretion der Verdauungssäfte und Erleichterung der Verdauung. Geschmackswerte und ungestörte, leichte, unfühlbare Verdauung sind wesentlich für die Beurteilung der Marktpreise und des Wertes. Es würde zu weit führen, an dieser Stelle noch tiefer auf die nervösen Einwirkungen und Rückwirkungen einzugehen.

Von zwei Momenten wird der Antrieb zur Veränderung beherrscht. Zunächst von den Gewohnheiten der Städter. Der Ernährung der Landbevölkerung mit ihren relativ einfachen Sitten und konservativen Neigungen steht der Städter mit einer verfeinerten Kost im Durchschnitt gegenüber; die Stadtkost ist mannigfaltiger, gewählter und wird erheblich beeinflußt von den Intellektuellen und der Kultnr im allgemeinen. Die Relation von Stadt und Land bedingt den Trieb des Volkes zu Veränderungen. Wir vergessen bestimmt nicht, daß seit weniger als einem Jahrhundert überall in den Kulturstaaten das Städtewachstum mehr oder minder beschleunigt sich durchsetzt. Das zweite Moment, welches ausschlaggebend ist, ist ein soziales.

Die Preiswerte nach den Geschmackswerten und Bekömmlichkeit haben bei jeden Volk eine große Bedeutung, auch bei uns, denn sie sind die Stufenleiter, auf der sich die Wünsche der großen Massen nach oben zu bewegen versuchen nach dem höheren Geschmackswert. Denn

die Nahrung ist stets ein Ausdruck für soziale Unterschiede gewesen und wird es bleiben. Diesen Trieb nach aufwärts kann nichts ändern als die Not.

Sobald sich eine Besserung der Einkommensverhältnisse bei der großen Menge geltend macht, wird zunächst die Kost verbessert, in zweiter Linie die Kleidung, in dritter die Wohnung. Den ersten Anstoß erlebt, wenn die Verhältnisse es erlauben, der Fleischkonsum, meist nicht in quantitativem Sinn, wohl aber qualitativ, indem statt billiger Ware Besseres eingekauft wird. Von den billigen Wurstwaren strebt der Konsum nach Besserung, nach Koch- und Bratfleisch.

Ähnlich auf dem Gebiete der Vegetabilien. Höhere Kultur im Essen bedeutet nicht Mehressen und Massenverzehr, sondern den Austausch minder geschätzter Nahrungsmittel mit gewählteren.

Maßgebend ist nicht allein Massenansammlung von Menschen in Städten, sondern eine starke, geistig leistungsfähige Oberschicht, welche die treibende Kraft darstellt, und ein gewisser Grad von ausreichender Lebenshaltung bei den Massen.

Wenn wir jetzt in nachrevolutionärer Zeit diesem Aufstieg der großen Massen begegnen, wenn wir die Umwandlung des Geschmackes gegen Roggenbrot sehen, so gibt es keinen Halt auf diesem Wege. Wir begreifen aber die Empfindungen des Landmannes, der plötzlich das Produkt seiner Arbeit, wie den Roggen, entwertet sieht. Übrigens hat sich bei dem Brote ein solcher Umschwung schon seit langem vorbereitet. Von Süden und Westen allmählich vorgedrungen ist die bessere Mühlentechnik. Die österreichische Backweise für Kleinbrot gewinnt an Boden, und so wird es auch fürderhin bleiben, ja wir befürchten, daß die Verbreitung des Weizenbrotes ein beschleunigtes Tempo annehmen wird. Jetzt sind die großen und mittleren Städte die Stellen der Propaganda für Weizenbrot. Und auch das flache Land wird mit seinen Bezirken, die in der Nähe der Städte liegen, schon heute mit hineingerissen.

Für die Massen, welche diese Bewegung einleiten, ist die Triebfeder der bessere Geschmack des Weizenbrotes, die bessere Bekömmlichkeit, die vielfachere Verwendbarkeit des Weizenmehles zu Gebäcken aller Art. Man kann gewiß nicht behaupten, daß die Länder mit Weizenbrot irgendwie in ihrer Gesundheit gegenüber den Roggenländern zurückstehen, ganz und gar nicht.

Man kann die Notwendigkeit, den Roggen als Frucht zu erhalten, nicht beweisen, ebensowenig wie das Brotessen überhaupt eine Grundbedingung zur Erhaltung des Menschengeschlechtes ist, denn $^3/_5$ der Menschheit lebt ja ohne Brot. Es wäre aber falsch, die Augen zu verschließen gegenüber dem Drang der Massen nach Weizenbrot. An sich haben wir keinen stichhaltigen Grund, den Roggen als Brotfrucht auszuschließen, besonders auch mit Rücksicht auf die Volkswirtschaft. Eine kluge Politik wird nun dahin zielen müssen, den Übergang zur Weizenkultur in unserer Landwirtschaft zu begünstigen und zu betreiben. Das Ausmaß der Umstellungsfähigkeit ist hier nicht zu erörtern.

Es ist sicher, daß die Körnerfrüchte, die früher neben Weizen und Roggen angebaut wurden, in Zukunft nie wieder auf der Bildfläche erscheinen werden, und daß sogar der Handel mit Übersee vielleicht noch die eine oder andere

Frucht, die heute zur Tierernährung dient, verdrängen wird. Auch die Leguminosen werden wohl je kaum ein Aufleben ihres Anbaues durchmachen. Viehzucht und Milchproduktion werden nach wie vor eine wesentliche Bereicherung der menschlichen Tafel liefern. Und die gemischte Kost, wie sie bei den Romanen, Angelsachsen und Germanen sich jetzt findet, wird die Welt erobern. Sie wird die Breiesser allmählich, soweit es die Natur zuläßt, verdrängen.

Schon heute rüstet sich Japan, der für sie neuen Ernährungsform, soweit es geht, Tür und Tor zu öffnen, und so wird es an den anderen Begrenzungen zwischen Europa und Asien ebenso geschehen. Von der Mandschurei und Sibirien aus drängt die Brotkost weiter nach China. Die alte primitive Kultur der Reiskost wird allmählich zusammenbrechen, und es hängt zunächst nur davon ab, inwieweit der Anbau des Weizens in bisherigen Reisländern getrieben werden kann. Daß die europäische Eßweise im Durchschnitt einen höheren Kulturzustand darstellt, als er bei dem Durchschnitt der Reisesser sich findet, unterliegt keinem Zweifel.

Noch eine unverkennbar wichtige Änderung vollzieht sich auf dem Gebiet des Zuckerverbrauchs. Noch zu Anfang des vorigen Jahrhunderts war das Süße und die Süßung der Speisen offenbar sehr wenig im Gebrauch, oder sie beschränkte sich auf einen engen Kreis der Wohlhabenden. Seitdem ist in Deutschland, noch mehr bei den Angelsachsen, der Konsum an Zucker gestiegen, bei uns bis zu Beginn des Weltkrieges, bei den Engländern und Amerikanern darüber hinaus, und scheint jetzt einen gewissen Endpunkt erreicht zu haben, mit dem verglichen Deutschland nur halb soviel verzehrt. Die Ausdehnung des Zuckerkonsums bei den Angelsachsen findet ihre natürliche Grenze in der zu starken Süßung der Gerichte, welche dem Menschen widersteht.

Was für uns bedenklich erscheint, liegt in der Schwierigkeit Deutschlands, den Eigenbedarf durch Inlandzucker zu decken, wegen der immer schwieriger werdenden Arbeitsfrage, wie schon erwähnt.

Der Rübenzuckerexport nimmt in Deutschland mächtig ab. Der Rückgang wird verschärft durch das Anwachsen der Produktion des Rohrzuckers in den Kolonialländern.

Unserer Landwirtschaft erwachsen immer neue Schwierigkeiten. Die Stadt- und Großstadtbildung zieht Kräfte vom Lande. Seit mehreren Jahrzehnten wächst die ländliche Bevölkerung nicht weiter, wohl aber die Zahl der Konsumenten.

Der Friede von Versailles hat unsere Grenzen im Osten verschoben, unsere Überschußgebiete weggenommen und eine starke Rückwanderung nach Deutschland zur Folge gehabt.

Unsere bequemen Austauschgebiete Rußland und Rumänien haben durch die unsinnige Kleinbauernwirtschaft und Güterzertrümmerung ihre Ausfuhrkraft verloren.

Bei der ungenügenden Produktion kommen für uns natürlich fremde Überschußgebiete als Einfuhrländer in Betracht, leider nur überseeische. Für die deutschen Produzenten kann das Folgen zeitigen, die wir noch nicht ganz zu übersehen vermögen.

Die Beköstigung ist für den Menschen nicht nur zweckdienlich, um den Hunger zu stillen, ihr Zweck ist vielmehr, jedem ein gewisses Maß von Befriedigung zu verschaffen. Man kann mit den gleichen nährenden Stoffen diesen Zweck erreichen oder auch verfehlen. Hebung der Befriedigung bedeutet auch einen allgemeinen Umschwung der Stimmung, auf die jedermann Anspruch hat. Die Mittel zur Erreichung einer schmackhaften und anregenden Nahrung vermag die Kunst des Kochens zu sichern. In dieser Hinsicht darf man für Deutschland sagen, und es gilt auch wohl für andere Länder, haben die letzten Jahrzehnte keine Verbesserung, sondern einen Rückgang wahrnehmen lassen, der bei uns wesentlich verschärft wurde durch die Nachkriegserscheinungen der Wohnungszwangswirtschaft und den Wohnungsmangel überhaupt. An diesen Momenten liegt es, daß viele Familien überhaupt keine eigene Küche haben, daß die Küche häufig durch einen einfachen Gasbrenner ersetzt wurde, daß die Neuanlagen von Küchen mit zu geringer Bodenfläche geschaffen wurden, die einer Frau die Küchenwirtschaft überhaupt nicht erlaubt, und daß man gezwungen ist, weit weniger Zeit auf das Kochen zu verwenden als früher. Die dadurch bedingte Verödung der Kochkunst ist in hohem Maße geeignet, eine Kost einförmig und unbefriedigend zu machen.

Eine Frage mag hier noch aufgeworfen sein, nämlich die, ob die in der Literatur sich breitmachenden Ernährungstheorien irgendeinen Einfluß auf die Gewohnheiten des Volkslebens haben und für die Zukunft die Wege der Nahrungswahl beeinflussen werden.

Die Literatur scheidet sich scharf in große Gebiete, in die wissenschaftliche Ernährungslehre, welche bestrebt ist, unsere Kenntnisse allmählich systematisch auszubauen, die auf die Popularisierung keinen Wert legen darf, und in jene Gruppe von Publikationen, die ohne Zusammenhang mit den wissenschaftlichen Gesamterkenntnissen einzelne Befunde in den Vordergrund stellt, sie ausbeutet oder Tatsachen unkritisch zusammenstellt, kombiniert, und jene Gruppe von Publikationen, die auf ethischen Bedenken gegen gewisse Nahrungsmittel beruhen.

Alle diese leider zu sehr popularisierten Bewegungen haben für die nationalen Gewohnheiten gar keine Bedeutung, sie sind auch, was die Zahl der Interessenten anlangt, viel zu klein, um irgendwie Einfluß zu gewinnen, und widersprechen sich vielfach in ihren Zielen.

Selbst eine starke Beugung volkstümlicher Gewohnheiten, wie die Blockade war, hat keinen dauernden Einfluß auf die Volksernährung ausgeübt.

Mit Zwang in der Volksernährung dauernd einen Umschwung zu erreichen, ist ausgeschlossen. Nur auf dem Gebiet der Kinderernährung, die ja eine Zwangsernährung ist, hat man es in der Hand, wo es nötig ist, an Stelle der Brust auch andere Ernährungsformen anzuwenden. Auch hier begegnet man vielen Unsicherheiten, die zu einem häufigen Wechsel der Anschauungen führen, ein Beweis, daß man die Wahrheit nicht ganz erkannt hat.

Von einer Volksbelehrung in der heutigen Art der Anwendung ist auf dem Ernährungsgebiet nicht viel zu erwarten. Wer aus medizinischen Zuschriften oder aus der Tagespresse sich zusammenstellt, was unberufene Persönlichkeiten an Reformen empfehlen, wird schließlich aus dem Wirrwarr

gegenteiliger Anschauungen nur entnehmen, daß man am besten auf diese Darlegungen ganz verzichtet.

So wenig also solche Bewegungen künstlicher Art eine allgemeine Bedeutung für die Welternährung haben, ebensowenig haben wir auch von einer nahen Zukunft zu erwarten, daß die chemischen Produkte des Laboratoriums die natürlichen Nahrungsmittel ersetzen werden, wie man noch vor einigen Jahren behauptet hat. Wir dürfen nicht vergessen, daß auch die fabrikmäßige Darstellung von Eiweißstoffen, Kohlehydraten und Fetten und etwa die Beigabe von Salzen noch keine Nahrung bilden würden, denn neben diesen Stoffen kommen ja auch noch Vitamine, Lipoide, organische Verbindungen mit Salzen, sekretorisch den Darm reizende Stoffe, Reizstoffe für normale Blutbildung, die Verbesserung des Nährwertes durch die Mischung und vieles andere in Betracht.

Was in jeder Nation die übliche Speisenzusammenstellung empirisch geschaffen hat, das im einzelnen zu bewerten, auf die Brauchbarkeit und den rationellen Wert zu prüfen, muß einer künftigen Generation zur Erforschung vorbehalten bleiben.

Vorläufig und für einige Zeit bleibt es in der täglichen Kost bei der Empirie der Erfahrung der großen Massen. Der Einzelne kann irren, die große Masse verfolgt aber instinktiv und triebhaft gewisse, wenn auch kaum geahnte Ziele.

Ausgegeben am 18. Juni.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

XVI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 24. Mai.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Ludendorff sprach über die Abhängigkeit der Form der Sonnenkorona von der Sonnenfleckenhäufigkeit.

Es ist bekannt, daß zur Zeit der Sonnenfleckenmaxima die Korona ungefähr kreisrund, zur Zeit der Sonnenfleckenminima dagegen stark an den Polen abgeplattet ist. Mit Hilfe von photographischen Aufnahmen der Sonnenfinsternisse gelingt es nun, die Abhängigkeit der Form der Korona vom Sonnenfleckenstande für 13 Finsternisse in dem Zeitraume von 1893 bis 1927 zahlenmäßig zu erfassen, und es ergibt sich eine Reihe von bis jetzt unbekannten Tatsachen: Die durch die Kurven gleicher Helligkeit (Isophoten) definierte Form der Korona hängt von der jeweiligen Relativzahl der Sonnenflecke ab, dagegen von der Phase in der elfjährigen Fleckenperiode nur insofern, als diese Phase die Häufigkeit, Größe und Verteilung der Flecke bestimmt. Die Form der Korona stellt sich also rasch auf den jeweiligen Sonnenfleckenstand ein. Bei großen Relativzahlen der Flecke ist die Abplattung der Korona sehr gering und nimmt nach außen hin nicht zu. Bei kleinen Relativzahlen ist die Abplattung der Korona in den untersten Schichten gleichfalls gering, nimmt aber nach außen hin rasch zu, und zwar innerhalb gewisser Grenzen nahezu proportional dem Abstande vom Sonnenrande. Eine starke Ungleichmäßigkeit der Verteilung der Flecke auf der Sonne beeinflußt die Form der Korona in hohem Maße.

2. Hr. Ludendorff überreichte einen Sonderabdruck des von ihm bearbeiteten Abschnittes über »Die veränderlichen Sterne« aus dem »Handbuch der Astrophysik«, herausgegeben von G. Eberhard, A. Kohlschütter und H. Ludendorff, Bd. 6 (Berlin 1928);

3. Hr. Johnsen die von ihm redigierte »Festschrift Otto Mügge« (Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie, 57. Beilage-Band, Abt. A: Mineralogie und Petrographie, 2 Teile (Stuttgart 1928).

Über die Abhängigkeit der Form der Sonnenkorona von der Sonnenfleckenhäufigkeit.

Von H. Ludendorff.

Die Frage, ob das Aussehen der Sonnenkorona von der Häufigkeit der Sonnenflecke abhängt, hat zuerst A. C. Ranyard in den Memoirs of the Royal Astronomical Society (Vol. 41, S. 496—500, 1879) erörtert, bei Gelegenheit der zusammenfassenden Diskussion aller zu jener Zeit vorliegenden Beobachtungen von totalen Sonnenfinsternissen, die er in diesem sogenannten »Eclipse Volume« gibt. Er ist damals zu klaren Schlüssen nicht gelangt, aber bald darauf[1] hat er deutlich ausgesprochen, daß zu Zeiten geringer Fleckenhäufigkeit die am Sonnenäquator gelegenen Teile der Sonnenkorona weit stärker entwickelt sind als die an den Polen der Sonne gelegenen.

Geraume Zeit später hat A. Hansky seine Aufmerksamkeit demselben Gegenstande gewidmet[2]. Für jede der beobachteten totalen Sonnenfinsternisse greift er eine ihm geeignet erscheinende Zeichnung oder Photographie der Korona heraus und gibt diese Bilder, nach der Phase in der Sonnenfleckenperiode geordnet, auf einer Tafel wieder. Aus dieser Untersuchung geht, so bedenklich auch die willkürliche Auswahl der Bilder ist, doch klar hervor, daß zur Zeit der Sonnenfleckenmaxima die Korona sich einigermaßen gleichmäßig nach allen Seiten um die Sonne herum erstreckt, während zur Zeit der Sonnenfleckenminima die äquatorialen Teile der Korona sich viel weiter erstrecken als die polaren, wie es schon Ranyard bemerkt hatte.

Ganz ähnlich wie Hansky verfährt einige Zeit darauf der indische Astronom K. D. Naegamvala[3]. Er setzt aber die gleichfalls willkürlich ausgewählten Koronabilder nicht nur in Beziehung zu der Phase in der elfjährigen Sonnenfleckenperiode, sondern auch zu den Jahres- und den Monatsmitteln der Sonnenflecken-Relativzahlen, und er gelangt zu der Ansicht, daß die Form der Korona mit diesen in engerem Zusammenhang steht als mit der genannten Phase. Überzeugend zu belegen vermag er diese Ansicht allerdings keineswegs.

Weitere Untersuchungen über den Gegenstand liegen merkwürdigerweise nicht vor, jedoch haben die späteren Sonnenfinsternisse die Abhängigkeit der Form der Korona von der Sonnenfleckenhäufigkeit durchaus bestätigt,

[1] Memoirs of the Royal Astronomical Society Vol. 46, S. 238 (1881).
[2] Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St-Pétersbourg. V^e Série. Vol. VI, S. 251 (1897).
[3] Publications of the Maharaja Takhtasingji Observatory, Poona, Vol. 1 (1902).

worauf von den Beobachtern der Sonnenfinsternisse immer wieder hingewiesen worden ist. Aber das, was wir bis jetzt über diesen Zusammenhang wußten, war doch nur ganz außerordentlich wenig. Mit Sicherheit konnte man eigentlich nur sagen, daß — kurz ausgedrückt — zu den Zeiten der Fleckenmaxima die Korona fast kreisrund, zu den Zeiten der Minima dagegen an den Polen der Sonne stark abgeplattet ist.

Vor allen Dingen fehlte bislang jede zahlenmäßige Erfassung jenes Zusammenhanges. In der Tat erscheint eine solche ja auch auf den ersten Blick als äußerst schwierig, denn die Korona ist ein ungeheuer kompliziertes Gebilde, und was wir in ihr sehen — die übereinanderliegenden Projektionen zahlreicher Strukturen auf die Himmelssphäre — ist schwer zu entwirren und zu deuten. Wenn wir indessen etwa ein auf Papier reproduziertes Bild einer Photographie der Korona betrachten, so sehen wir, daß darauf in der Regel alle jene Einzelheiten mehr oder weniger verschwunden sind: die Korona erscheint auf solchen Bildern meist als eine ziemlich gleichförmig helle Fläche mit relativ scharfer Begrenzung nach außen, welch letztere dadurch zustande kommt, daß die Helligkeit der Korona sehr rasch nach außen hin abfällt. Auf den meisten Koronabildern läßt sich daher mit leidlicher Sicherheit eine Grenzlinie ziehen, und diese Grenzlinie wird nahezu einer Linie konstanter Helligkeit, einer Isophote, der Korona entsprechen. Diese Isophoten nun kann man als die scheinbare Form der Korona definierend ansehen, und wenn wir im folgenden von der Form der Korona sprechen, so meinen wir damit stets die Form der Isophoten. Wir betrachten es hier als unsere Aufgabe, zu untersuchen, wie bei einer bestimmten Sonnenfinsternis die Isophoten in verschiedenen Abständen vom Sonnenrande verlaufen, ferner, wie der Verlauf der Isophoten sich bei verschiedenen Finsternissen unterscheidet, und endlich, wie jener Verlauf von der Sonnenfleckenhäufigkeit abhängt.

Um zu einer möglichst genauen Kenntnis der Isophoten zu gelangen, wäre es natürlich vorzuziehen, sie nicht auf die oben angedeutete, äußerst primitive Art abzuleiten, sondern sie durch direkte mikrophotometrische Vermessung der Originalplatten festzulegen. Da es sich aber hier um einen Vorstoß in ein fast ganz unbekanntes Gebiet handelt, so habe ich mich einstweilen damit begnügt, auf jene primitive Weise zu verfahren, und habe meine Untersuchung im wesentlichen nur auf die in den Berichten über die Sonnenfinsternis-Expeditionen wiedergegebenen Koronabilder begründet. Es war natürlich von vornherein gar nicht zu übersehen, ob es möglich sei, auf diese Art zu brauchbaren Ergebnissen zu kommen. In ganz überraschender Weise hat es sich aber gezeigt, daß dies der Fall ist, und ich konnte eine Reihe von Resultaten ableiten, die neu sind und sicher Interesse verdienen. Unser Wissen über die Abhängigkeit der Korona von der Fleckenhäufigkeit wird dadurch nicht unwesentlich bereichert. Es ist selbstverständlich, daß sich dabei weitere Fragen ergeben, deren Beantwortung einer mikrophotometrischen Vermessung schon vorhandener oder künftig zu gewinnender photographischer Aufnahmen der Korona überlassen bleiben muß.

Es möge hier übrigens gleich bemerkt werden, daß in einzelnen Fällen bereits Isophoten aus den Originalplatten abgeleitet worden sind. Ich erwähne

z. B. die später genauer zu zitierenden bezüglichen Arbeiten von K. Graff über die Korona von 1905 und die von Ö. Bergstrand über die Korona von 1914. Natürlich habe ich diese Isophoten für meine Untersuchungen mit herangezogen, und, wie wir sehen werden, zeigen sich keine systematischen Unterschiede zwischen den aus ihnen und den von mir aus anderweitigen Koronaaufnahmen derselben Finsternisse abgeleiteten Zahlen.

Die Isophoten der Korona sind nun keineswegs einfache mathematische Kurven — etwa Ellipsen —, sondern sie zeigen von solchen sowohl starke systematische wie lokale Abweichungen. Was uns besonders erwünscht erscheinen muß, ist eine Zahl, die ein Maß für die polare Abplattung der Korona gibt. Es liegt der Gedanke äußerst nahe, hierfür einfach das Verhältnis des Äquatorial- zu dem Polardurchmesser der Korona zu wählen. In der Tat kommt man auf diese Weise schon zu leidlich befriedigenden Ergebnissen, aber die Erfahrung hat doch gelehrt, daß es zweckmäßig ist, anders vorzugehen, denn lokale Störungen im Verlauf der Isophoten am Pol oder am Äquator verfälschen oft die auf die angedeutete Art definierte Abplattung. Nach einigem Probieren habe ich schließlich die Abplattung in etwas anderer Weise definiert und die Bilder der Korona nach dem folgenden Verfahren ausgewertet:

Das betreffende Bild wurde mit einem Blatt Pauspapier bedeckt, und auf diesem wurden die Grenzlinie der Mondscheibe und die äußere Grenzisophote der Korona eingezeichnet. (Daß feinere Einzelheiten der Korona durch das Pauspapier hindurch nicht sichtbar waren, war dabei nur von Vorteil.) Alsdann wurde die Pause auf ein weißes Blatt Papier gelegt, auf dem acht durch einen Punkt P gehende gerade Linien gezogen waren, die Winkel von je $22^\circ5$ miteinander bildeten. Diese Linien waren mit I bis VIII beziffert. Die vorher bezeichnete Mitte der Mondscheibe wurde mit dem Punkt P zur Deckung gebracht und die Gerade V in die Richtung der Sonnenachse gedreht. Alsdann wurden mit einem Zirkel die Durchmesser der Isophote längs der Geraden I bis VIII abgegriffen und die entsprechende Zirkelöffnung mit Hilfe eines Millimetermaßstabes gemessen, wobei, angesichts der Unsicherheit des Verlaufes der Isophote, meist nur ganze oder halbe Millimeter notiert wurden. Der Durchmesser d des Mondbildes wurde mit dem Zirkel auf dem benutzten Koronabild selbst in Millimetern gemessen, und darauf wurden die acht gemessenen Durchmesser der Isophote, die entsprechend der Numerierung der Geraden gleichfalls mit I bis VIII bezeichnet werden sollen, auf d als Einheit umgerechnet. Die Abplattung der Korona wird nun willkürlich definiert durch:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{VIII}}{\mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI}} - \mathrm{I}$$

V ist der Polardurchmesser der Korona, IV und VI die beiden um $22^\circ5$ gegen diesen geneigten Durchmesser; I ist der senkrecht auf V stehende, also dem Sonnenäquator entsprechende Durchmesser, II und VIII sind die beiden um $22^\circ5$ gegen diesen geneigten Durchmesser. Bei dieser Art der Auswertung macht es nichts aus, wenn Nord und Süd oder Ost und West miteinander vertauscht werden. In der Regel sind IV und VI nur wenig von V, ferner

II und VIII nur wenig von I verschieden. Durch Benutzung von im ganzen sechs Durchmessern für die Definition der Abplattung ε wird man von lokalen Störungen und von Ungenauigkeiten der Isophoten besser frei, als wenn man nur den Polardurchmesser V und den Äquatorialdurchmesser I benutzt. Die Durchmesser III und VII kommen hier zunächst nicht zur Verwendung; ich habe sie indessen mitgemessen, um ein einigermaßen vollständiges Bild von dem Verlauf der Isophoten zu erhalten.

Bei der im vorstehenden geschilderten Auswertung der Koronabilder ergaben sich einige praktische Schwierigkeiten. Zunächst sind die Bilder häufig ohne Angabe ihrer Orientierung veröffentlicht, man kennt also die Richtung der Sonnenachse auf ihnen nicht. Bei den Koronabildern von ausgesprochenem Minimumstypus ist das in der Regel nicht schlimm, denn man kann bei ihnen die Lage der Pole der Sonne an der Struktur der Korona erkennen, oder aber man kann die Lage der Sonnenachse mit Hilfe anderer, orientierter Bilder derselben Finsternis festlegen. Ungünstiger liegen die Dinge bei den mehr oder weniger kreisrunden Koronabildern vom Maximumstypus. Von solchen konnten nur diejenigen benutzt werden, bei denen die Orientierung angegeben ist. Dies gilt ganz besonders für die Finsternis vom Jahre 1905, für die aber zum Glück ein großes Material an orientierten Bildern vorhanden ist.

Ferner zeigte es sich, daß, wie es auch nicht anders zu erwarten war, sehr kleine Koronaaufnahmen ungenaue Resultate ergaben. Es wurden daher schließlich alle Bilder, bei denen der Durchmesser des Mondes kleiner als 12 mm war, ausgeschlossen. Nur bei den Finsternissen von 1896 und 1918 bin ich in drei Fällen etwas unter diese Grenze heruntergegangen, da die betreffenden Bilder trotz ihrer Kleinheit besonders geeignet erschienen.

War ein Koronabild einmal ausgewertet, so wurden die daraus abgeleiteten Zahlen auch in die nachfolgenden Tabellen aufgenommen, abgesehen von den wegen Kleinheit ausgeschlossenen Bildern und ferner abgesehen von zwei Fällen, bei denen die Isophoten schon beim Zeichnen als unsicher bezeichnet waren.

Bei meinen Untersuchungen habe ich mich auf die Finsternisse von 1893 an beschränkt. Für die früheren ist das Bildermaterial sehr knapp und scheint, wie einige Proben ergaben, nicht zu so befriedigenden Ergebnissen wie bei den späteren Finsternissen zu führen. Vielleicht ist dieser Umstand auf die Mangelhaftigkeit der damaligen Reproduktionstechnik zurückzuführen. Zeichnungen der Korona wurden natürlich grundsätzlich nicht verwandt, sondern nur Photographien.

Wenn für eine Finsternis weniger als sechs brauchbare Koronabilder zur Verfügung standen, so wurde sie für die Untersuchung nicht benutzt. Im allgemeinen kamen nur veröffentlichte Koronabilder zur Verwendung. Nur für die Finsternisse von 1923, 1926 und 1927 wurden einige nicht veröffentlichte Bilder in Gestalt von Papierkopien der Originalaufnahmen herangezogen, und zwar für 1923 Aufnahmen von R. Schorr und von A. Kohlschütter, für 1926 eine Aufnahme von E. Freundlich und H. v. Klüber, für 1927 solche von R. Schorr und anderen Mitgliedern der Hamburger Finsternis-Expedition

sowie solche von H. Rosenberg. Für die Überlassung der Kopien bin ich den genannten Herren zu Dank verpflichtet. Die für einige Finsternisse veröffentlichten Isophoten wurden in genau derselben Weise ausgewertet wie die von mir auf Grund der Koronabilder gezeichneten.

In Tabelle I gebe ich zunächst eine Zusammenstellung derjenigen totalen Sonnenfinsternisse, für die das Material an Koronabildern ausreichend zu der weiteren Untersuchung ist. In der ersten Kolumne steht das Datum der Finsternis, in der zweiten der Positionswinkel p der Sonnenachse gegen die Richtung nach dem Nordpol des Himmels, positiv von Nord nach Ost gezählt. (Dieser Winkel wird in manchen Fällen bei der Auswertung der Koronabilder gebraucht.) In der dritten Kolumne werden die Zeiten der Finsternisse in Jahresbruchteilen gegeben, in der letzten die Zeiten der vorangehenden und der folgenden Hauptphase der Sonnenfleckenperiode (M = Maximum, m = Minimum) nach R. Wolf und A. Wolfer. Das letzte Maximum ist noch nicht festgelegt.

Tabelle I.

Datum	p	T	Benachbarte Hauptphasen	
1893 April 16	−25°.9	1893.3	m 1889.6	M 1894.1
1896 August 8	+14.2	1896.6	M 1894.1	m 1901.7
1898 Januar 21	− 8.0	1898.1	»	»
1900 Mai 28	−16.7	1900.4	»	»
1901 Mai 17	−20.2	1901.4	»	»
1905 August 30	+20.6	1905.7	m 1901.7	M 1906.4
1908 Januar 3	+ 1.4	1908.0	M 1906.4	m 1913.6
1914 August 21	+18.0	1914.6	m 1913.6	M 1917.6
1918 Juni 8	−12.6	1918.4	M 1917.6	m 1923.6
1923 September 10...	+23.1	1923.7	m 1923.6	M ?
1925 Januar 24	− 9.0	1925.1	»	»
1926 Januar 14	− 4.1	1926.0	»	»
1927 Juni 29	− 5.4	1927.5	»	»

In Tabelle II sind weiter die Ergebnisse der Ausmessung der einzelnen Koronabilder, nach den Finsternissen geordnet, wiedergegeben. Für jede Finsternis sind die Bilder willkürlich beziffert, jedoch so, daß die Nummern von Bildern aus derselben Quelle aufeinander folgen. Am Kopf der für jedes Bild gültigen Messungsresultate steht diese Nummer, daneben der Durchmesser d des Mondbildes in Millimetern. Darunter stehen die in der Einheit d ausgedrückten Längen der Durchmesser I bis VIII des Koronabildes (genauer gesagt der Isophote). Unter diesen Zahlen finden sich dann die aus ihnen berechneten Werte

$$R = {}^1/_3\,(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{VIII})$$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{VIII}}{\mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI}} - \mathrm{I} = \frac{R}{{}^1/_3\,(\mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI})} - \mathrm{I}\,.$$

ε ist nach Definition die »Abplattung« der Isophote, R ist das in Monddurchmessern ausgedrückte Mittel aus dem äquatorialen Durchmesser und den beiden gegen diesen um 22°5 geneigten Durchmessern der Isophote. Wir denken uns nun die wirkliche Korona durch eine schematische ersetzt, deren Durchmesser I, II, . . . mit denen der wirklichen der Länge nach übereinstimmen, aber stets durch den Sonnenmittelpunkt halbiert werden; dann ist R offenbar gleich dem in Mondradien ausgedrückten Mittel der drei den Durchmessern I, II und VIII entsprechenden Radien der schematischen Korona. Wir definieren ε als die zu R gehörige Abplattung.

Der Mondmittelpunkt wird auf den Koronaaufnahmen in der Regel nicht genau mit dem Sonnenmittelpunkt zusammenfallen; indessen können wir hier diesen Umstand als die Quelle eines zufälligen Fehlers betrachten.

Auf die Zahlenangaben für jede Finsternis folgen in Tabelle II die nach den Nummern der Koronabilder geordneten Nachweise, wo das betreffende Bild zu finden ist. Sofern von den einzelnen Autoren abgeleitete Isophoten benutzt sind, ist dies in den Nachweisen erwähnt.

Bei der weiteren Diskussion ausgeschlossene Wertepaare von R und ε sind eingeklammert.

Tabelle II.

Finsternis 1893.

	1. $d = 118$	**2.** $d = 39$	**3.** $d = 60$	**4.** $d = 26$	**5.** $d = 26$
I	1.08	1.21	1.15	2.23	2.15
II	1.06	1.28	1.13	2.35	2.15
III	1.07	1.21	1.13	2.31	2.08
IV	1.07	1.18	1.10	2.42	2.12
V	1.04	1.21	1.12	2.40	2.08
VI	1.04	1.26	1.15	2.40	2.15
VII	1.05	1.24	1.15	2.35	2.19
VIII	1.11	1.26	1.13	2.35	2.15
R	1.08	1.25	1.14	2.31	2.15
ε	0.03	0.03	0.01	−0.04	0.02

	6. $d = 26$	**7.** $d = 27$	**8.** $d = 18$	**9.** $d = 18$	**10.** $d = 18$
I	1.81	2.07	1.78	1.44	1.22
II	1.88	2.07	1.94	1.56	1.28
III	1.88	2.07	1.72	1.50	1.28
IV	1.85	2.15	1.89	1.56	1.28
V	1.77	2.11	1.67	1.44	1.22
VI	1.81	2.15	1.72	1.44	1.22
VII	1.81	2.04	1.78	1.56	1.22
VIII	1.81	2.17	1.89	1.47	1.28
R	1.83	2.10	1.87	1.49	1.26
ε	0.01	−0.02	0.06	0.01	0.02

1. J. M. Schaeberle, Astronomy and Astrophysics 12 (1893), Plate 39.
2. J. M. Schaeberle, Report on the Total Eclipse of the Sun, observed at Mina Bronces, Chile, on April 16, 1893 (Contributions from the Lick Observatory No. 4, 1895). Plate 1, Fig. 5.
3. Ebenda, Plate 6.
4. Ebenda, Plate 8, Fig. 1, äußerste Isophote. (Die inneren Isophoten durchschneiden sich und wurden daher nicht benutzt.)
5. Ebenda, Plate 8, Fig. 2, äußerste Isophote.
6. Ebenda, zweite Isophote von außen. (Die weiter nach innen gelegenen Isophoten durchschneiden sich und wurden daher nicht benutzt.)
7. H. Deslandres, Observations de l'éclipse totale du Soleil du 16 avril 1893 (Annales du Bureau des Longitudes. Tome cinquième, Paris 1897). Planche 3.
8. Ebenda, pag. C 29. Isophote I. **9.** Ebenda, Isophote II.
10. Ebenda, Isophote III.

Finsternis 1896.

	1. $d = 37$	**2.** $d = 37$	**3.** $d = 37$	**4.** $d = 9$	**5.** $d = 9$
I	1.11	1.35	1.43	1.56	1.33
II	1.11	1.32	1.38	1.56	1.33
III	1.08	1.32	1.46	1.61	1.33
IV	1.05	1.24	1.27	1.39	1.22
V	1.03	1.16	1.27	1.33	1.11
VI	1.03	1.22	1.30	1.44	1.22
VII	1.07	1.35	1.38	1.56	1.28
VIII	1.09	1.32	1.35	1.61	1.28
R	1.10	1.33	1.39	1.58	1.31
ε	0.06	0.10	0.08	0.14	0.11

	6. $d = 12$	**7.** $d = 40$	**8.** $d = 39$	**9.** $d = 24$
I	1.67	1.22	1.64	1.29
II	1.67	1.22	1.54	1.29
III	1.58	1.22	1.62	1.33
IV	1.36	1.10	1.41	1.21
V	1.32	1.10	1.33	1.17
VI	1.50	1.15	1.38	1.21
VII	1.58	1.16	1.69	1.25
VIII	1.67	1.18	1.62	1.29
R	1.67	1.21	1.60	1.29
ε	0.20	0.08	0.17	0.08

1. G. Baden-Powell, Total Eclipse of the Sun, 1896. The Novaja Zemlja Observations. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. Vol. 190. 1897.) Plate 1, Fig. 1.
2. Ebenda, Plate 1, Fig. 2. **3.** Ebenda, Plate 1, Fig. 3.
4. N. V. E. Nordenmark, Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar. Bd. 22, Afd. 1, No. 6 (1897). Fig. 2.
5. Ebenda, Fig. 3. **6.** Ebenda, Fig. 5.
7. S. Kostinsky et A. Hansky, L'éclipse totale de soleil du 27 juillet (8 août) 1896. (Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St-Pétersbourg. 5e Série, Vol. VI, 1897, pag. 9.) Planche 1 (obere Figur).
8. Ebenda, untere Figur. **9.** A. Rydzewski, Publ. ASP 8, pag. 297 (1896).

Finsternis 1898.

	1. $d = 112$	**2.** $d = 29$	**3.** $d = 28$	**4.** $d = 28$	**5.** $d = 28.5$	**6.** $d = 29$	**7.** $d = 20$
I	1.13	1.45	2.14	1.86	2.04	1.45	1.80
II	1.24	1.48	2.21	1.89	2.04	1.47	1.90
III	1.19	1.45	2.12	1.82	1.93	1.48	1.75
IV	1.10	1.38	2.00	1.57	1.75	1.38	1.55
V	1.04	1.40	1.96	1.64	1.79	1.38	1.58
VI	1.06	1.40	1.96	1.61	1.82	1.38	1.65
VII	1.12	1.69	2.25	1.96	2.07	1.62	1.80
VIII	1.12	1.55	2.36	1.93	2.11	1.62	1.85
R	1.16	1.49	[2.24]	1.89	[2.06]	1.51	1.85
ε	0.09	0.07	[0.13]	0.18	[0.15]	0.10	0.16

	8. $d = 20$	**9.** $d = 20$	**10.** $d = 70$	**11.** $d = 72$	**12.** $d = 31$	**13.** $d = 29$	**14.** $d = 113$
I	1.30	1.90	1.10	1.26	1.29	2.34	1.12
II	1.32	2.00	1.10	1.25	1.29	2.47	1.21
III	1.30	1.90	1.10	1.25	1.29	2.41	1.21
IV	1.20	1.70	1.06	1.15	1.16	2.07	1.11
V	1.15	1.65	1.04	1.12	1.13	2.03	1.05
VI	1.20	1.70	1.09	1.18	1.23	2.14	1.10
VII	1.28	1.98	1.13	1.28	1.39	2.41	1.14
VIII	1.30	1.98	1.19	1.31	1.39	2.59	1.14
R	1.31	1.96	1.13	1.27	1.32	[2.47]	1.16
ε	0.10	0.16	0.06	0.11	0.13	[0.19]	0.06

	15. $d = 38$	**16.** $d = 50$	**17.** $d = 17$	**18.** $d = 25$	**19.** $d = 24.5$
I	1.68	1.40	1.59	2.36	1.71
II	1.68	1.40	1.59	2.32	1.67
III	1.63	1.40	1.47	2.16	1.63
IV	1.50	1.28	1.38	2.16	1.47
V	1.53	1.34	1.35	2.12	1.51
VI	1.55	1.32	1.41	2.20	1.55
VII	1.68	1.50	1.56	2.48	1.80
VIII	1.87	1.50	1.65	2.52	1.80
R	1.74	1.43	1.61	[2.40]	1.73
ε	0.14	0.09	0.17	[0.11]	0.14

1. H. Terao and S. Hirayama, Report on the Total Eclipse of the Sun observed at Jeur, in Western India, on January 22, 1898. (Annales de l'Observatoire astronomique de Tokyo, Tome III, 1er fascicule. Tokio 1910.) Negative No. 1. **2.** Ebenda, Negative No. 2.

3. Ebenda, Negative No. 3. **4.** Ebenda, Negative No. 6.

5. Ebenda, Negative No. 7. **6.** Ebenda, Negative No. 8.

7. N. Lockyer, Chisholm-Batten and A. Pedler, Total Eclipse of the Sun, January 22, 1898. — Observations at Viziadrug. (Mem. RAS, Vol. 54, App. I, 1904.) Plate 2, No. 1.

8. Ebenda, Plate 2, No. 2. **9.** Ebenda, Plate 2, No. 4.

10. V. de Campigneulles S. J., Observations taken at Dumraon, Behar, India, during the Eclipse of the 22nd January 1898 by a Party of Jesuit Fathers of the Western Bengal Mission (London 1899). Plate 7. **11.** Ebenda, Plate 8. **12.** Ebenda, Plate 9. **13.** Ebenda, Plate 10.

14. K. D. NAEGAMVALA, Report on the Total Eclipse of January 21—22, 1898, as observed at Jeur in Western India. (Publications of the Observatory, Poona, Vol. I. Bombay 1902.) Plate 13 (Aufnahme von R. COPELAND). **15.** E. H. HILLS, M.N. 58, Plate 8 (1898).
16. W. W. CAMPBELL, Pop. Astr. 6, Plate 4 (1898).
17. W. W. CAMPBELL, Publ. ASP 10, pag. 97 (1898).
18. E. W. MAUNDER, The Indian Eclipse 1898. Report of the Expeditions organized by the British Astronomical Association (London 1899). Pag. 108.
19. C. STRAHAN, The Total Solar Eclipse, January 22nd, 1898 (Dehra Dun, 1898). Titelbild.

Finsternis 1900.

	1. $d = 33$	**2.** $d = 33$	**3.** $d = 33$	**4.** $d = 34$	**5.** $d = 55$	**6.** $d = 54$	**7.** $d = 103$	**8.** $d = 101$
I	1.09	1.58	1.79	1.38	1.24	1.22	1.36	1.08
II	1.09	1.48	1.71	1.32	1.20	1.24	1.36	1.07
III	1.09	1.45	1.64	1.35	1.18	1.24	1.31	1.06
IV	1.09	1.30	1.45	1.21	1.13	1.15	1.17	1.04
V	1.03	1.27	1.36	1.21	1.09	1.12	1.15	1.02
VI	1.09	1.30	1.39	1.24	1.13	1.15	1.17	1.03
VII	1.09	1.45	1.48	1.32	1.20	1.23	1.30	1.06
VIII	1.09	1.55	1.73	1.38	1.22	1.22	1.31	1.07
R	1.09	1.54	1.74	1.36	1.22	1.23	1.34	1.07
ε	0.02	0.19	0.25	0.11	0.09	0.08	0.15	0.04

	9. $d = 67$	**10.** $d = 52$	**11.** $d = 16$	**12.** $d = 17$	**13.** $d = 16$	**14.** $d = 100$	**15.** $d = 43$	**16.** $d = 69$
I	1.57	1.35	2.56	1.24	1.88	1.41	1.47	1.57
II	1.60	1.33	2.44	1.21	1.88	1.36	1.45	1.61
III	1.48	1.33	2.19	1.18	1.72	1.35	1.51	1.52
IV	1.28	1.17	2.06	1.12	1.53	1.24	1.30	1.36
V	1.33	1.15	2.12	1.06	1.50	1.23	1.35	1.33
VI	1.31	1.21	2.12	1.12	1.56	1.23	1.31	1.33
VII	1.58	1.35	2.09	1.18	1.78	1.35	1.51	1.52
VIII	1.72	1.35	2.31	1.24	1.88	1.40	1.53	1.52
R	1.63	1.34	[2.44]	1.23	1.88	1.39	1.48	1.57
ε	0.25	0.14	[0.16]	0.12	0.23	0.13	0.12	0.17

1. C. A. YOUNG, The Princeton Eclipse Expedition to Wadesboro', N. C., May 1900. (Princeton University Bulletin Vol. XI, Nos. 5 and 6. 1900.) Fig. 1. **2.** Ebenda, Fig. 2.
3. Ebenda, Fig. 3. **4.** Ebenda, Fig. 4.
5. The Total Solar Eclipse of 1900. Report of the Joint Committee appointed by the Councils of the Royal Dublin Society and Royal Irish Academy. (Scientific Transactions of the Royal Dublin Society Vol. VIII, Series II, No. V. Dublin 1903.) Plate 6. **6.** Ebenda, Plate 7.
7. N. LOCKYER, Total Eclipse of the Sun. Account of the Observations made by the Solar Physics Observatory Eclipse Expedition ... at Santa Pola, Spain. (Mem. R. A. S. Vol. 54, App. III. 1904.) Plate 9. **8.** Ebenda, Plate 10.
9. Publications of the United States Naval Observatory. Second Series, Vol. IV, Part IV, App. I. Total Solar Eclipses of May 28, 1900, and May 17, 1901. (Washington 1906.) Plate 33.
10. Ebenda, Plate 34.
11. E. W. MAUNDER, The Total Solar Eclipse 1900. Report of the Expeditions organized by the British Astronomical Association. (London 1901.) Plate K.
12. Ebenda, Plate K 2, obere Figur. **13.** Ebenda, Plate K 2, untere Figur.
14. S. P. LANGLEY and C. G. ABBOT, The 1900 Solar Eclipse Expedition of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution. (Washington 1904.) Plate 21.
15. C. BURCKHALTER, Pop. Astr. 8 (1900), Plate 13.
16. W. H. M. CHRISTIE, M. N. 60 (1900), Plate 21.

Finsternis 1901.

	1. $d = 102$	**2.** $d = 67$	**3.** $d = 36.5$	**4.** $d = 26.2$	**5.** $d = 26.2$
I	1.21	1.73	1.40	1.22	1.37
II	1.21	1.63	1.40	1.18	1.41
III	1.23	1.55	1.37	1.18	1.41
IV	1.12	1.43	1.23	1.15	1.30
V	1.09	1.39	1.21	1.11	1.18
VI	1.09	1.39	1.21	1.15	1.22
VII	1.23	1.55	1.37	1.22	1.34
VIII	1.23	1.75	1.37	1.22	1.41
R	1.22	1.70	1.39	1.21	1.40
ε	0.11	0.21	0.14	0.06	0.13

	6. $d = 26.2$	**7.** $d = 26.2$	**8.** $d = 26.2$	**9.** $d = 26.2$	**10.** $d = 24.5$
I	1.60	1.34	1.30	1.26	1.43
II	1.60	1.37	1.37	1.26	1.59
III	1.53	1.41	1.41	1.26	1.53
IV	1.45	1.26	1.26	1.18	1.29
V	1.34	1.18	1.22	1.15	1.24
VI	1.41	1.26	1.22	1.18	1.31
VII	1.45	1.37	1.26	1.30	1.43
VIII	1.64	1.41	1.37	1.30	1.45
R	1.61	1.37	1.35	1.27	1.49
ε	0.15	0.11	0.09	0.09	0.16

1. Publications of the United States Naval Observatory. Second Series. Vol. IV, Part IV, App. I. Total Solar Eclipses of May 28, 1900 and May 17, 1901. (Washington 1906.) Plate 51.
2. Ebenda, Plate 53. **3.** Ebenda, Plate 56.
4. S. Hirayama, K. Hirayama, K. Sotome, Report on the Total Eclipse of the Sun, observed at Padang, Sumatra, on May 18, 1901. (Annales de l'Observatoire astronomique de Tokyo, Tome III, 2e fascicule. Tokyo 1903.) Plate 2. **5.** Ebenda, Plate 5.
6. Ebenda, Plate 8. **7.** Ebenda, Plate 10. **8.** Ebenda, Plate 11.
9. Ebenda, Plate 12.
10. N. Donitch, Observations de l'éclipse totale du Soleil du 17—18 mai 1901 à Padang Sumatra) [Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St-Pétersbourg, T. XVII, No. 1 1902)], Fig. 2.

Finsternis 1905.

	1. $d = 21$	**2.** $d = 20.8$	**3.** $d = 47$	**4.** $d = 18$	**5.** $d = 18$	**6.** $d = 18$	**7.** $d = 18$
I	1.43	1.25	1.55	1.72	1.61	1.72	1.67
II	1.43	1.27	1.62	1.72	1.61	1.72	1.78
III	1.43	1.25	1.62	1.72	1.61	1.78	1.78
IV	1.43	1.23	1.57	1.72	1.61	1.72	1.67
V	1.38	1.23	1.63	1.78	1.61	1.78	1.78
VI	1.38	1.20	1.57	1.78	1.61	1.72	1.67
VII	1.38	1.20	1.57	1.72	1.67	1.72	1.72
VIII	1.38	1.27	1.62	1.78	1.67	1.78	1.72
R	1.41	1.26	1.60	1.74	1.63	1.74	1.72
ε	0.01	0.04	0.00	−0.01	0.01	0.00	0.01

	8. $d = 18$	**9.** $d = 18$	**10.** $d = 18$	**11.** $d = 50$	**12.** $d = 20$	**13.** $d = 74$	**14.** $d = 56$
I	1.44	1.33	1.19	1.48	2.95	1.50	1.45
II	1.44	1.33	1.17	1.48	2.95	1.42	1.46
III	1.44	1.33	1.17	1.52	3.05	1.45	1.41
IV	1.44	1.28	1.17	1.46	3.05	1.45	1.44
V	1.44	1.28	1.17	1.46	2.95	1.47	1.41
VI	1.50	1.33	1.17	1.46	3.00	1.50	1.46
VII	1.44	1.33	1.19	1.48	3.00	1.50	1.46
VIII	1.44	1.39	1.22	1.46	3.00	1.50	1.48
R	1.44	1.35	1.19	1.47	[2.97]	1.47	1.46
ε	−0.01	0.04	0.02	0.01	[−0.01]	0.00	0.02

	15. $d = 78$	**16.** $d = 80$	**17.** $d = 25$	**18.** $d = 24$	**19.** $d = 84$	**20.** $d = 67$	**21.** $d = 81.5$
I	1.27	1.48	1.26	1.67	1.69	1.28	1.21
II	1.30	1.49	1.24	1.62	1.73	1.28	1.21
III	1.29	1.49	1.24	1.58	1.74	1.25	1.21
IV	1.31	1.50	1.24	1.62	1.68	1.24	1.20
V	1.29	1.51	1.20	1.58	1.62	1.25	1.18
VI	1.27	1.42	1.24	1.67	1.65	1.28	1.20
VII	1.28	1.54	1.28	1.62	1.58	1.25	1.19
VIII	1.26	1.42	1.24	1.58	1.67	1.25	1.19
R	1.28	1.46	1.25	1.62	1.70	1.27	1.20
ε	−0.01	−0.01	0.02	0.00	0.03	0.01	0.01

	22. $d = 81$	**23.** $d = 21.5$	**24.** $d = 21.5$	**25.** $d = 21.5$	**26.** $d = 21.5$	**27.** $d = 88$	**28.** $d = 88$	**29.** $d = 88$
I	1.44	2.93	2.44	1.81	1.16	1.18	1.39	1.61
II	1.44	2.93	2.42	1.77	1.16	1.19	1.39	1.65
III	1.42	3.02	2.42	1.81	1.16	1.19	1.42	1.67
IV	1.38	3.11	2.37	1.81	1.16	1.16	1.35	1.60
V	1.37	3.02	2.33	1.77	1.21	1.15	1.33	1.58
VI	1.42	2.92	2.33	1.77	1.19	1.15	1.36	1.61
VII	1.36	2.92	2.33	1.77	1.16	1.12	1.33	1.60
VIII	1.42	2.92	2.33	1.77	1.16	1.17	1.40	1.65
R	1.43	[2.93]	2.40	1.78	1.16	1.18	1.39	1.64
ε	0.03	[−0.03]	0.02	0.00	−0.02	0.02	0.03	0.03

1. N. LOCKYER, Report of the Solar Eclipse Expedition to Palma, Majorca, August 30, 1905. Solar Physics Committee (London 1907). Plate 2, Fig. 1. **2.** Ebenda, Plate 2, Fig. 2.
3. Ebenda, Plate 2, Fig. 3.
4. T. ZONA, Sull'ecclisse solare totale del 30 agosto 1905 osservata a Sfax dalla Commissione di Palermo. (Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Palermo. N. 22. Palermo 1908.) Tavola 2. Fot. 5. **5.** Ebenda, Tavola 2, Fot. 6. **6.** Ebenda, Tavola 2, Fot. 8.
7. Ebenda. Tavola 2, Fot. 11. **8.** Ebenda, Tavola 3, Fot. 5.
9. Ebenda, Tavola 3, Fot. 8. **10.** Ebenda, Tavola 3, Fot. 11.
11. Publications of the United States Naval Observatory. Second Series. Vol. X, Part II, App. Total Solar Eclipses of August 30, 1905 and June 8, 1918 (Washington 1924). Plate 18.
12. Ebenda, Plate 20. **13.** Ebenda, Plate 22. **14.** Ebenda, Plate 24.

15. Ebenda, Plate 27. **16.** Ebenda, Plate 28.

17. N. Donitch, Observations de l'éclipse totale du Soleil du 29—30 août 1905. (Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St-Pétersbourg, VI. Série, Vol. I, pag. 661, 1907.) Planche IV, obere Figur. **18.** Ebenda, Planche IV, untere Figur.

19. A. Hansky, Étude des photographies de la couronne solaire faites avec la lunette de 13.28 m pendant l'éclipse du 30 août 1905 à Alcocèbre en Espagne. (Mitteilungen der Nikolai-Hauptsternwarte zu Pulkowo, Bd. II, Nr. 19, 1907.) Planche 2.

20. A. Wolfer, Astronomische Mitteilungen Nr. 97, Tafel 2.

21. Annales du Bureau des Longitudes. Tome 8. (Paris 1911.) Observations de l'éclipse de Soleil du 30 août 1905. Rapport de la Mission d'Alger par M. J. Renaux. Planche 2.

22. Ebenda, Planche 3.

23 bis **26.** L. Becker, The Distribution of Blue-Violet Light in the Solar Corona on August 30, 1905. (Mem. R.A.S. 57, App. II.) Isophoten pag. 314, Fig. 5.

27 bis **29.** R. Schorr, Die Hamburgische Sonnenfinsternis-Expedition nach Souk-Ahras (Algerien) im August 1905. (Astronomische Abhandlungen der Hamburger Sternwarte in Bergedorf. Bd. III, Nr. 1. Hamburg 1913.) Tafel 13. Isophoten nach Graff, und zwar, von innen gezählt, die 3^{te}, 6^{te} und 9^{te}.

Finsternis 1908.

	1. $d = 20.8$	**2.** $d = 22$	**3.** $d = 14$	**4.** $d = 14$	**5.** $d = 15$	**6.** $d = 14$	**7.** $d = 17$	**8.** $d = 54$
I	1.49	2.36	1.93	1.86	1.13	1.36	1.53	1.24
II	1.49	2.41	1.93	1.93	1.07	1.29	1.53	1.24
III	1.49	2.36	1.86	1.93	1.07	1.21	1.59	1.17
IV	1.35	2.23	1.75	1.82	1.07	1.14	1.47	1.15
V	1.39	2.05	1.86	1.64	1.13	1.18	1.35	1.11
VI	1.54	2.36	2.00	1.79	1.13	1.21	1.44	1.15
VII	1.54	2.41	2.04	1.86	1.17	1.29	1.44	1.17
VIII	1.49	2.39	2.04	1.93	1.13	1.32	1.53	1.22
R	1.49	2.39	1.97	1.91	1.11	1.32	1.53	1.23
ε	0.04	0.08	0.05	0.09	0.00	0.12	0.08	0.09

1. F. K. McClean, Report of the Solar Eclipse Expedition to Flint Island, January 3, 1908. (London, ohne Jahr.) Plate 8.

2. Ebenda, Plate 9. **3.** Ebenda, Plate 12, Fig. 1. **4.** Ebenda, Plate 12, Fig. 2.

5. Ebenda, Plate 12, Fig. 3. **6.** Ebenda, Plate 13, Fig. 2.

7. W. W. Campbell, Publ. ASP 20 pag. 63 (1908). Erste Tafel.

8. Ebenda, zweite Tafel.

Finsternis 1914.

	1. $d = 28.5$	**2.** $d = 28.5$	**3.** $d = 40$	**4.** $d = 37.5$	**5.** $d = 37.5$	**6.** $d = 34$	**7.** $d = 34$	**8.** $d = 38.5$
I	1.30	1.44	1.70	1.53	1.15	1.15	1.44	1.19
II	1.26	1.44	1.70	1.52	1.17	1.15	1.41	1.19
III	1.26	1.40	1.65	1.52	1.12	1.12	1.41	1.17
IV	1.16	1.30	1.45	1.39	1.07	1.09	1.32	1.12
V	1.12	1.26	1.45	1.31	1.07	1.09	1.24	1.09
VI	1.19	1.37	1.48	1.28	1.09	1.12	1.29	1.12
VII	1.33	1.47	1.60	1.44	1.12	1.15	1.38	1.17
VIII	1.33	1.51	1.62	1.52	1.12	1.15	1.41	1.18
R	1.30	1.46	1.67	1.52	1.15	1.15	1.42	1.19
ε	0.12	0.12	0.15	0.15	0.07	0.05	0.11	0.07

	9. $d = 38.5$	**10.** $d = 38.5$	**11.** $d = 38.5$	**12.** $d = 38.5$	**13.** $d = 38.5$	**14.** $d = 38.5$	**15.** $d = 38.5$	**16.** $d = 38.5$
I	1.29	1.48	1.64	1.77	1.96	2.47	3.30	4.42
II	1.25	1.43	1.61	1.74	1.90	2.42	3.19	4.29
III	1.27	1.40	1.55	1.64	1.82	2.23	2.99	3.97
IV	1.19	1.29	1.39	1.48	1.64	2.21	2.91	4.00
V	1.16	1.29	1.40	1.51	1.66	2.21	2.91	3.92
VI	1.21	1.35	1.48	1.53	1.66	2.23	2.91	3.95
VII	1.25	1.43	1.56	1.69	1.79	2.29	3.06	4.03
VIII	1.25	1.43	1.61	1.74	1.92	2.42	3.25	4.23
R	1.26	1.45	1.62	1.75	1.93	[2.44]	[3.25]	[4.31]
ε	0.06	0.10	0.14	0.16	0.17	[0.10]	[0.12]	[0.09]

1. K. BOHLIN, Die totale Sonnenfinsternis am 21. August 1914. [Astron. Iakttagelser och Undersökningar å Stockholms Observatorium. Bd. 10, Nr. 4. Stockholm 1916.] Fig. 1.

2. Ebenda, Fig. 2.

3. A. MIETHE, B. SEEGERT, F. WEIDERT, Die totale Sonnenfinsternis am 21. August 1914 beobachtet in Sandnessjöen auf Alsten (Norwegen) (Braunschweig 1916). Tafel 3.

4. A. L. CORTIE, M. N. 75 (1915) Plate 10. **5.** Ebenda, Plate 11.

6. N. JEWDOKIMOFF, Pop. Astr. 32, pag. 513 (1924), Fig. 4. **7.** Ebenda, Fig. 5.

8 bis **16.** Ö. BERGSTRAND, Études sur la distribution de la lumière dans la couronne solaire (Stockholm 1919). Isophoten auf Planche III, und zwar, von innen gezählt, der Reihe nach die 1ste, 3te, 5te, 7te, 8te, 9te, 10te, 11te, 12te.

Finsternis 1918.

	1. $d = 101$	**2.** $d = 73$	**3.** $d = 31$	**4.** $d = 29.5$	**5.** $d = 11.5$
I	1.24	1.30	1.65	1.73	2.09
II	1.19	1.25	1.58	1.69	2.09
III	1.13	1.10	1.48	1.63	1.96
IV	1.03	1.05	1.35	1.36	1.74
V	1.01	1.05	1.35	1.29	1.65
VI	1.03	1.08	1.39	1.42	1.74
VII	1.08	1.14	1.48	1.63	1.91
VIII	1.17	1.22	1.58	1.69	2.00
R	1.20	1.26	1.60	1.70	2.06
ε	0.17	0.19	0.18	0.26	0.20

	6. $d = 26$	**7.** $d = 38.5$	**8.** $d = 38.5$	**9.** $d = 70$	**10.** $d = 86$
I	1.92	1.71	1.92	1.19	1.14
II	1.85	1.71	1.78	1.19	1.10
III	1.69	1.66	1.74	1.13	1.05
IV	1.50	1.51	1.56	1.06	1.02
V	1.46	1.38	1.53	1.04	1.01
VI	1.52	1.48	1.61	1.07	1.05
VII	1.65	1.71	1.82	1.13	1.07
VIII	1.81	1.82	1.92	1.20	1.13
R	1.86	1.75	1.87	1.19	1.12
ε	0.25	0.20	0.20	0.13	0.09

1. Publications of the United States Naval Observatory. Second Series, Vol. X, Part II, Appendix. Total Solar Eclipses of August 30, 1905, and June 8, 1918. (Washington 1924.) Plate 35.

2. S. A. Mitchell, The Total Solar Eclipse of 1918. (Publications of the Leander McCormick Observatory of the University of Virginia. Vol. 2, Part 6, pag. 260 (1919). (Aufnahme der Lowell-Expedition.)

3. L. B. Aldrich, The Smithsonian Eclipse Expedition of June 8, 1918. (Smithsonian Miscellaneous Collections, Vol. 69, No. 9. Washington 1919.) Plate 4.

4. F. Ellerman, Publ. ASP 30, pag. 250 (1918).

5. W. W. Campbell, Publ. ASP 30, pag. 230 (1918).

6. D. W. Morehouse, Pop. Astr. 26 (1918), Plate 17.

7. E. Pettit, Pop. Astr. 26 (1918), Plate 18. **8.** Ebenda, Plate 19.

9. S. A. Mitchell, Eclipses of the Sun (New York 1923), pag. 198. (Aufnahme der Lick-Expedition.) **10.** Ebenda, pag. 202. (Aufnahme der Lick-Expedition.)

Finsternis 1923.

	1. $d = 194$	**2.** $d = 193$	**3.** $d = 193$	**4.** $d = 193$	**5.** $d = 82$	**6.** $d = 44.5$	**7.** $d = 64$
I	1.09	1.24	1.49	1.46	1.85	1.55	1.39
II	1.11	1.30	1.54	1.54	1.91	1.62	1.48
III	1.11	1.30	1.38	1.43	1.70	1.44	1.38
IV	1.03	1.16	1.30	1.31	1.60	1.37	1.27
V	1.03	1.15	1.31	1.29	1.61	1.35	1.28
VI	1.05	1.14	1.31	1.28	1.61	1.35	1.30
VII	1.09	1.25	1.46	1.41	1.66	1.55	1.45
VIII	1.09	1.27	1.47	1.53	1.91	1.66	1.47
R	1.10	1.27	1.50	1.51	1.89	1.61	1.45
ε	0.06	0.10	0.15	0.17	0.18	0.19	0.13

	8. $d = 46$	**9.** $d = 38$	**10.** $d = 67$	**11.** $d = 84$	**12.** $d = 50$	**13.** $d = 58$
I	1.70	1.42	1.31	1.32	1.48	1.45
II	1.78	1.43	1.37	1.33	1.50	1.50
III	1.59	1.38	1.34	1.33	1.44	1.41
IV	1.48	1.29	1.22	1.23	1.34	1.28
V	1.48	1.26	1.18	1.18	1.28	1.26
VI	1.48	1.32	1.18	1.23	1.24	1.28
VII	1.61	1.51	1.25	1.35	1.42	1.36
VIII	1.80	1.53	1.34	1.35	1.58	1.44
R	1.76	1.46	1.34	1.33	1.52	1.46
ε	0.19	0.13	0.12	0.10	0.18	0.15

1 bis **4.** R. Schorr, unveröffentlichte Aufnahmen.

5. A. Kohlschütter, unveröffentlichte Aufnahme.

6. J. A. Miller and R. W. Marriott, Observations of the Total Solar Eclipse of September 10, 1923 (Sproul Observatory Publications, No. 7, 1925), Plate 2.

7. Ebenda, Plate 3. **8.** J. A. Miller, Pop. Astr. 31 (1923), Plate 32.

9. J. A. Miller, J. Can. R. A. S. 18 (1924), Plate 3.

10. J. Gallo, Pop. Astr. 31 (1923), Plate 36. **11.** Ebenda, Plate 37.

12. J. Gallo, Anuario de Tacubaya para 1925, vorletzte Tafel.

13. A. E. Douglass, Pop. Astr. 31 (1923), Plate 38.

Finsternis 1925.

	1. $d = 73$	**2.** $d = 32$	**3.** $d = 33$	**4.** $d = 49$	**5.** $d = 49$	**6.** $d = 12.5$	**7.** $d = 67$
I	1.40	1.27	1.35	1.43	1.20	1.84	1.49
II	1.38	1.28	1.35	1.43	1.20	1.84	1.43
III	1.34	1.28	1.33	1.41	1.12	1.80	1.40
IV	1.29	1.25	1.33	1.37	1.10	1.68	1.34
V	1.26	1.19	1.30	1.33	1.08	1.60	1.33
VI	1.29	1.19	1.30	1.35	1.10	1.68	1.34
VII	1.36	1.22	1.33	1.45	1.16	1.84	1.48
VIII	1.36	1.28	1.36	1.47	1.18	1.84	1.48
R	1.38	1.28	1.35	1.44	1.19	1.84	1.47
ε	0.08	0.06	0.03	0.07	0.09	0.11	0.10

	8. $d = 93$	**9.** $d = 24$	**10.** $d = 15$	**11.** $d = 15$	**12.** $d = 15$	**13.** $d = 15$
I	1.06	1.71	1.47	1.79	2.15	2.83
II	1.07	1.67	1.47	1.73	2.07	2.73
III	1.04	1.67	1.53	1.80	2.20	2.87
IV	1.02	1.50	1.33	1.53	1.93	2.67
V	1.00	1.46	1.25	1.53	1.87	2.50
VI	1.02	1.50	1.25	1.53	1.87	2.50
VII	1.05	1.62	1.37	1.63	2.13	2.77
VIII	1.06	1.67	1.33	1.67	2.20	2.87
R	1.06	1.68	1.42	1.73	[2.14]	[2.81]
ε	0.05	0.13	0.11	0.13	[0.13]	[0.10]

1. F. SLOCUM, Ap. J. 64 (1926), Plate 1 = Pop. Astr. 33 (1925), Plate 10.
2. F. SLOCUM, Ap. J. 64 (1926), Plate 3. **3.** Ebenda, Plate 4.
4. C. E. FURNESS, Pop. Astr. 33 (1925), Plate 13. **5.** Ebenda, Plate 14.
6. C. M. PENDLETON and C. L. BOOTHROYD, Pop. Astr. 33 (1925), Plate 15.
7. J. A. MILLER, Pop. Astr. 33 (1925), Plate 19. **8.** Ebenda, Plate 20.
9. E. S. KING, Harvard Circular No. 286 (1925), Fig. 1.
10 bis **13.** E. S. KING and M. HARWOOD, Harvard Circular 312 (1927), Fig. 4. Die vier innersten Isophoten.

Finsternis 1926.

	1. $d = 25$	**2.** $d = 25$	**3.** $d = 25$	**4.** $d = 25$	**5.** $d = 44$	**6.** $d = 89$	**7.** $d = 83$
I	2.08	2.16	1.58	2.04	2.09	1.25	2.05
II	2.08	1.96	1.58	2.04	2.09	1.22	1.99
III	2.04	1.96	1.60	2.04	2.09	1.18	2.05
IV	2.08	2.04	1.60	2.04	2.14	1.18	1.84
V	1.88	1.84	1.56	1.92	1.91	1.14	1.88
VI	1.96	1.80	1.52	1.84	2.00	1.16	1.98
VII	2.04	2.08	1.64	2.04	2.09	1.24	2.00
VIII	2.16	2.16	1.64	2.16	2.14	1.29	1.99
R	2.11	2.09	1.60	2.08	2.11	1.25	2.01
ε	0.07	0.11	0.03	0.08	0.04	0.08	0.06

1. G. Horn-d'Arturo, L'ecclisse solare totale del 14 Gennaio 1926. (Pubblicazioni dell'Osservatorio astronomico della R. Università di Bologna, Nr. 8. 1926.) Tavola 24.
2. Ebenda, Tavola 25. **3.** Ebenda, Tavola 26. **4.** Ebenda, Tavola 27.
5. J. A. Miller, Pop. Astr. 34 (1926), Plate 15. **6.** G. H. Peters, Pop. Astr. 34 (1926), Plate 20.
7. E. Freundlich und H. v. Klüber, unveröffentlichte Aufnahme.

Finsternis 1927.

	1. $d = 186$	**2.** $d = 102$	**3.** $d = 31$	**4.** $d = 23$	**5.** $d = 23$	**6.** $d = 22$
I	1.40	1.44	1.85	1.33	1.39	1.77
II	1.40	1.38	1.89	1.22	1.30	1.64
III	1.39	1.32	1.82	1.22	1.30	1.59
IV	1.29	1.41	1.68	1.26	1.35	1.77
V	1.30	1.35	1.71	1.22	1.30	1.67
VI	1.35	1.28	1.87	1.20	1.30	1.64
VII	1.34	1.41	1.68	1.24	1.35	1.82
VIII	1.30	1.44	1.77	1.30	1.35	1.77
R	1.37	1.42	1.84	1.28	1.35	1.73
ε	0.04	0.05	0.05	0.05	0.02	0.02

1 bis **3.** Unveröffentlichte Aufnahmen der Hamburger Sonnenfinsternis-Expedition (R. Schorr).
4 bis **6.** Unveröffentlichte Aufnahmen von H. Rosenberg.

In Tabelle III folgt eine nach R geordnete Zusammenstellung der Werte von R und ε für jede Finsternis. Die Größe Δ wird später erklärt werden.

Tabelle III.

Finsternis 1893.

R	ε	Δ
1.08	+0.03	0.00
1.14	+0.01	−0.02
1.25	+0.03	+0.01
1.26	+0.02	0.00
1.49	+0.01	−0.01
1.83	+0.01	0.00
1.87	+0.06	+0.05
2.10	−0.02	−0.02
2.15	+0.02	+0.02
2.31	−0.04	−0.03

Finsternis 1896.

R	ε	Δ
1.10	+0.06	+0.01
1.21	0.08	0.00
1.29	0.08	−0.01
1.31	0.11	+0.01
1.33	0.10	0.00
1.39	0.08	−0.04
1.58	0.14	−0.02
1.60	0.17	+0.01
1.67	0.20	+0.02

Finsternis 1898.

R	ε	Δ	R	ε	Δ
1.13	+0.06	−0.01	1.73	+0.14	0.00
1.16	0.06	−0.02	1.74	0.14	0.00
1.16	0.09	+0.01	1.85	0.16	0.00
1.27	0.11	+0.02	1.89	0.18	+0.02
1.31	0.10	+0.01	1.96	0.16	−0.01
1.32	0.13	+0.04	[2.06]	[0.15]	[−0.03]
1.43	0.09	−0.02	[2.24]	[0.13]	[−0.07]
1.49	0.07	−0.04	[2.40]	[0.11]	[−0.11]
1.51	0.10	−0.02	[2.47]	[0.19]	[−0.04]
1.61	0.17	+0.04			

Finsternis 1900.

R	ε	Δ	R	ε	Δ
1.07	+0.04	0.00	1.39	+0.13	−0.01
1.09	0.02	−0.03	1.48	0.12	−0.04
1.22	0.09	0.00	1.54	0.19	+0.01
1.23	0.08	−0.01	1.57	0.17	−0.02
1.23	0.12	+0.03	1.63	0.25	+0.05
1.34	0.14	+0.02	1.74	0.25	+0.02
1.34	0.15	+0.03	1.88	0.23	−0.04
1.36	0.11	−0.02	[2.44]	[0.16]	[−0.27]

Finsternis 1901.

R	ε	Δ
1.21	+0.06	−0.02
1.22	0.11	+0.03
1.27	0.09	0.00
1.35	0.09	−0.02
1.37	0.11	−0.01
1.39	0.14	+0.02
1.40	0.13	0.00
1.49	0.16	+0.01
1.61	0.15	−0.03
1.70	0.21	+0.01

Finsternis 1905.

R	ε	Δ	R	ε	Δ	R	ε	Δ
1.16	−0.02	−0.03	1.41	+0.01	0.00	1.64	+0.03	+0.02
1.18	+0.02	+0.01	1.43	+0.03	+0.02	1.70	+0.03	+0.02
1.19	+0.02	+0.01	1.44	−0.01	−0.02	1.72	+0.01	0.00
1.20	+0.01	0.00	1.46	+0.02	+0.01	1.74	0.00	−0.01
1.25	+0.02	+0.01	1.46	−0.01	−0.02	1.74	−0.01	−0.02
1.26	+0.04	+0.03	1.47	0.00	−0.01	1.78	0.00	−0.01
1.27	+0.01	0.00	1.47	+0.01	0.00	2.40	+0.02	+0.01
1.28	−0.01	−0.02	1.60	0.00	−0.01	[2.93]	[−0.03]	[−0.04]
1.35	+0.04	+0.03	1.62	0.00	−0.01	[2.97]	[−0.01]	[−0.02]
1.39	+0.03	+0.02	1.63	+0.01	0.00			

Finsternis 1908.

R	ε	Δ
1.11	0.00	−0.06
1.23	+0.09	+0.03
1.32	0.12	+0.06
1.49	0.04	−0.03
1.53	0.08	+0.01
1.91	0.09	+0.02
1.97	0.05	−0.02
2.39	0.08	0.00

Finsternis 1914.

R	ε	Δ	R	ε	Δ
1.15	+0.05	−0.02	1.52	+0.15	+0.02
1.15	0.07	0.00	1.62	0.14	0.00
1.19	0.07	0.00	1.67	0.15	0.00
1.26	0.06	−0.02	1.75	0.16	0.00
1.30	0.12	+0.03	1.93	0.17	−0.02
1.42	0.11	0.00	[2.44]	[0.10]	[−0.16]
1.45	0.10	−0.01	[3.25]	[0.12]	[−0.27]
1.46	0.12	0.00	[4.31]	[0.09]	[−0.46]

Finsternis 1918.

R	ε	Δ
1.12	+0.09	−0.05
1.19	0.13	−0.02
1.20	0.17	+0.02
1.26	0.19	+0.03
1.60	0.18	−0.01
1.70	0.26	+0.06
1.75	0.20	−0.01
1.86	0.25	+0.03
1.87	0.20	−0.02
2.06	0.20	−0.04

Finsternis 1923.

R	ε	Δ	R	ε	Δ
1.10	+0.06	−0.02	1.50	+0.15	0.00
1.27	0.10	−0.01	1.51	0.17	+0.02
1.33	0.10	−0.02	1.52	0.18	+0.03
1.34	0.12	0.00	1.61	0.19	+0.02
1.45	0.13	−0.01	1.76	0.19	0.00
1.46	0.13	−0.01	1.89	0.18	−0.04
1.46	0.15	+0.01			

Finsternis 1925.

R	ε	Δ
1.06	+0.05	0.00
1.19	0.09	+0.03
1.28	0.06	−0.01
1.35	0.03	−0.05
1.38	0.08	0.00
1.42	0.11	+0.03
1.44	0.07	−0.02
1.47	0.10	+0.01
1.68	0.13	+0.02
1.73	0.13	+0.02
1.84	0.11	−0.01
[2.14]	[0.13]	[−0.02]
[2.81]	[0.10]	[−0.11]

Finsternis 1926.

R	ε	Δ
1.25	+0.08	+0.02
1.60	0.03	−0.03
2.01	0.06	−0.01
2.08	0.08	+0.01
2.09	0.11	+0.04
2.11	0.04	−0.03
2.11	0.07	0.00

Finsternis 1927.

R	ε	Δ
1.28	+0.05	+0.01
1.35	0.02	−0.02
1.37	0.04	0.00
1.42	0.05	+0.01
1.73	0.02	−0.02
1.84	0.05	+0.01

Wenn man nun für jede Finsternis die R als Abszissen, die ε als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einträgt, so zeigt sich, daß die ε genähert lineare Funktionen von R sind, und zwar für manche Finsternisse mit erstaunlicher Genauigkeit. Erst von etwa $R = 2.0$ an scheint bei manchen Finsternissen, und zwar wenn die Korona vom Minimumstypus ist, der lineare Zusammenhang zwischen R und ε aufzuhören, und daher sind in diesen Fällen die wenigen Werte ε, die Werten von $R > 2.0$ zugehören, ausgeschlossen und in den Tabellen II und III (ebenso wie die zugehörigen R und Δ) eingeklammert worden. Ist die Korona vom Maximumstypus, so sind erst die Werte ε, die $R > 2.40$ entsprechen, ausgeschlossen.

Als Beispiele für den linearen Zusammenhang zwischen R und ε geben wir in Fig. 1 die graphische Darstellung für die Korona von 1905 (typische

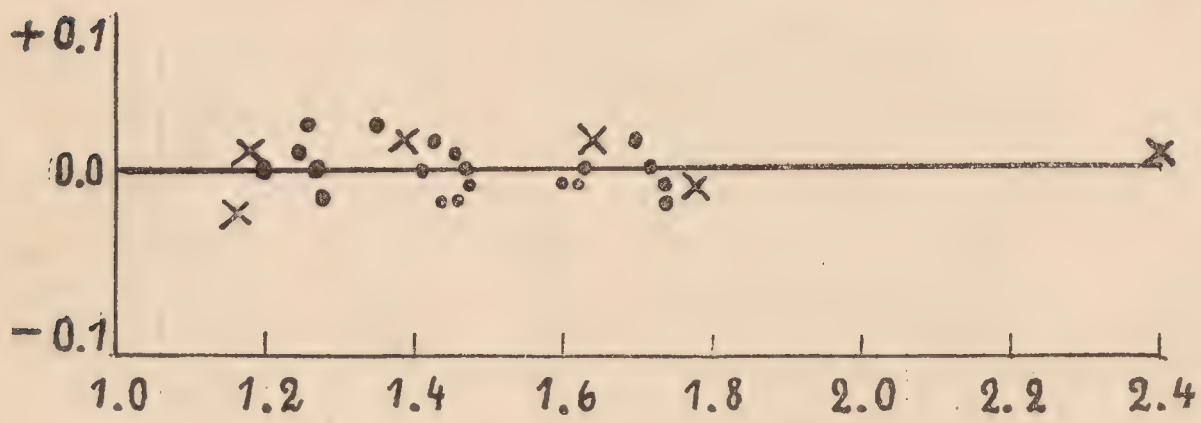


Fig. 1. Finsternis 1905.

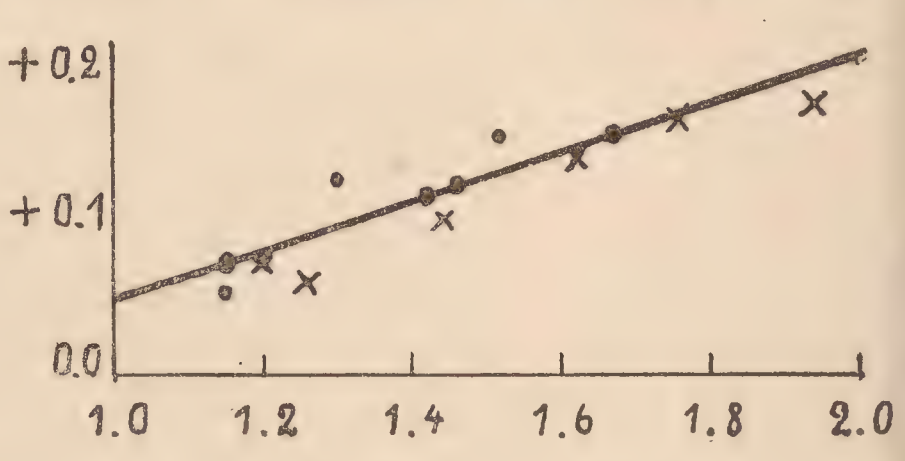


Fig. 2. Finsternis 1914.

Maximumskorona) und in Fig. 2 die für die Korona von 1914 (typische Minimumskorona). Diejenigen Punkte in den beiden Figuren, die auf der Auswertung von durch die verschiedenen Autoren abgeleiteten Isophoten beruhen, sind durch Kreuze gekennzeichnet. Wie schon erwähnt, zeigt sich kein merklicher systematischer Unterschied zwischen ihnen und den Punkten, die auf solchen Isophoten beruhen, welche von mir aus den Koronabildern ermittelt wurden.

In Anbetracht des angenähert linearen Zusammenhanges zwischen R und ε kann man schreiben:

$$\varepsilon = a_0 + b_0 (R - 1).$$

Es ist dann a_0 die rechnungsmäßige Abplattung der Korona in unmittelbarer Nähe des Mondrandes und $a_0 + b_0$ diejenige im Abstande $R = 2$ von der Mitte oder $R = 1$ vom Rande des Mondes.

Die Konstanten a_0 und b_0 wurden nun für jede Finsternis nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die so erhaltenen Werte sind, zusammen mit ihren mittleren Fehlern, in Tabelle IV wiedergegeben; in derselben bedeutet n die Zahl der bei Berechnung von a_0 und b_0 zur Verwendung gekommenen Isophoten.

Tabelle IV.

Finsternis	a_0	b_0	m. F. von a_0	m. F. von b_0	n
1893 April 16	+0.031	−0.028	± 0.014	± 0.018	10
1896 August 8	0.028	+0.226	0.016	0.037	9
1898 Januar 21	0.057	+0.117	0.013	0.022	15
1900 Mai 28	0.024	+0.284	0.015	0.032	15
1901 Mai 17	0.027	+0.245	0.018	0.042	10
1905 August 30	0.012	−0.002	0.007	0.012	27
1908 Januar 3	0.058	+0.017	0.018	0.035	8
1914 August 21	0.045	+0.153	0.009	0.018	13
1918 Juni 8	0.129	+0.103	0.007	0.036	10
1923 September 10 ...	0.059	+0.176	0.015	0.029	13
1925 Januar 24	0.045	+0.094	0.017	0.034	11
1926 Januar 14	0.058	+0.011	0.032	0.034	7
1927 Juni 29	0.041	−0.005	0.018	0.033	6

In der früheren Tabelle III sind unter Δ die Differenzen zwischen den gemessenen und den nach obiger Formel berechneten Werten von ε gegeben im Sinne Beobachtung minus Rechnung. Das nähere Studium der Δ zeigt, daß die Darstellung für die verschiedenen Finsternisse von verschiedener Güte ist; häufig treten Zeichenfolgen auf, aber im großen ganzen ist die Darstellung doch recht befriedigend, und angesichts der Ungenauigkeit der Messungen kann die lineare Beziehung zwischen R und ε als eine sehr bemerkenswerte Annäherung an die wirklichen Verhältnisse betrachtet werden. Für große R scheinen negative Δ etwas vorzuherrschen, und das gilt namentlich für die $R > 2.0$, die bei der Rechnung nicht mitbenutzt wurden. Bei diesen treten durchweg negative Δ auf. Die Abplattung der Korona scheint also in größeren Distanzen vom Mondrande wieder abzunehmen, doch reicht das zur Verfügung stehende Material nicht aus, um diese Frage näher zu untersuchen. Die weiteren Betrachtungen gelten jedenfalls nur für $R \leqq 2.0$.

Ein Schönheitsfehler der bisherigen Rechnungen besteht darin, daß wir überall (außer in einigen Fällen, wo bereits vorliegende Isophoten benutzt sind) den scheinbaren Monddurchmesser bzw. -radius als Einheit für die Durchmesser bzw. Radien der Isophoten verwandt haben, während es sinngemäß ist, den scheinbaren Sonnendurchmesser bzw. -radius als Einheit zu benutzen. Der scheinbare Mondradius $r_{\mathbb{C}}$ ist nun bei den einzelnen Finsternissen von

verschiedener Größe, und dabei ist er stets größer als der scheinbare Radius $r_\odot$ der Sonne. Setzen wir

$$r_\mathbb{C} = \gamma r_\odot$$

und bezeichnen die in der Einheit $r_\odot$ ausgedrückten Radien der Korona mit $R_\odot$, so ist offenbar

$$R = \gamma R_\odot,$$

also

$$\varepsilon = a_\circ + b_\circ(\gamma R_\odot - 1).$$

Wenn wir nun

$$a = a_\circ + b_\circ(\gamma - 1)$$
$$b = b_\circ \gamma$$

setzen, so wird

$$\varepsilon = a + b(R_\odot - 1).$$

Die geozentrischen Mond- und Sonnenradien wurden den im Nautical Almanac gegebenen Elementen der Finsternisse entnommen. Damit ergaben sich folgende Werte von γ:

Finsternis	γ	Finsternis	γ
1893.....	1.038	1914.....	1.021
1896.....	1.027	1918.....	1.013
1898.....	1.009	1923.....	1.027
1900.....	1.009	1925.....	1.021
1901.....	1.051	1926.....	1.025
1905.....	1.032	1927.....	1.003
1908.....	1.025		

Die Differenzen $a - a_\circ = b - b_\circ = b_\circ(\gamma - 1)$ sind sehr klein. Nur bei der Finsternis von 1901 erreichen sie den Betrag 0.012, sonst bleiben sie unter einer Einheit der zweiten Dezimale. Sie sind also durchgehends kleiner als die mittleren Fehler von $a_\circ$ und $b_\circ$. Trotzdem habe ich sie, da es keine Mühe machte, berücksichtigt, also aus $a_\circ$, $b_\circ$ und γ die a und b abgeleitet. Die mittleren Fehler erleiden durch den Übergang auf die neue Einheit so geringe Änderungen, daß ich darauf verzichte, sie von neuem anzugeben.

Streng genommen müßte auch noch der Unterschied zwischen dem geozentrischen Mondradius und dem für den Beobachtungsort gültigen berücksichtigt werden. Die dazu nötigen Rechnungen würden etwas umständlich sein; da der Mond rund 60 Erdradien von uns entfernt ist, so erkennt man leicht, daß die an a und b anzubringenden Korrektionen kaum jemals eine halbe Einheit der zweiten Dezimale betragen würden. Sie können also ruhig vernachlässigt werden.

In der folgenden Tabelle V sind nunmehr die endgültigen a und b zusammengestellt, und zwar, angesichts der Größe ihrer mittleren Fehler (vgl. Tabelle IV), auf zwei Dezimalen abgerundet.

Tabelle V.

Finsternis	a	b	Finsternis	a	b
1893 April 16	+0.03	−0.03	1914 August 21	+0.05	+0.16
1896 August 8	+0.03	+0.23	1918 Juni 8	+0.13	+0.10
1898 Januar 21	+0.06	+0.12	1923 September 10 ...	+0.06	+0.18
1900 Mai 28	+0.03	+0.29	1925 Januar 24	+0.05	+0.10
1901 Mai 17	+0.04	+0.26	1926 Januar 14	+0.06	+0.01
1905 August 30	+0.01	0.00	1927 Juni 29	+0.04	0.00
1908 Januar 3	+0.06	+0.02			

Diese Tabelle ist das Ergebnis der ganzen bisherigen Rechnungen und bildet den Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen. Die Größen a und b charakterisieren in gewissem Umfange den Verlauf der Isophoten der Korona bei den verschiedenen Finsternissen und in verschiedenem Abstande vom Sonnenrande; die Kenntnis ihrer numerischen Werte ermöglicht es uns, den Zusammenhang zwischen der Form der Korona und der Sonnenfleckenhäufigkeit näher zu untersuchen.

Der Vollständigkeit wegen möge hier erwähnt werden, daß die kleine, rund 7° betragende Neigung der Sonnenachse gegen die Senkrechte zur Ekliptik die Form der Korona nicht in nachweisbarem Maße zu beeinflussen vermag. Der Einfluß dieser Neigung auf den Positionswinkel der Sonnenachse ist natürlich berücksichtigt worden.

Es ist nun die wichtige Frage zu erörtern, ob die jeweilige Form der Korona in engerem Zusammenhange mit der Phase in der elfjährigen Sonnenfleckenperiode oder aber mit dem augenblicklichen Stande der Sonnenfleckenhäufigkeit steht; letztere ist ja sowohl in verschiedenen Perioden bei gleicher Phase sehr verschieden, als auch kürzeren regellosen Schwankungen von erheblichem Umfange unterworfen.

Die Phase ϕ in der elfjährigen Periode für eine bestimmte Zeit T muß zunächst angesichts der Veränderlichkeit der Periode wie auch der Form der Sonnenfleckenkurve in bestimmter Weise definiert werden. Es sei M_1 die Zeit des der Zeit T vorangehenden, M_2 die Zeit des ihr folgenden Fleckenmaximums, m die Zeit des zwischen M_1 und M_2 liegenden Minimums. Liegt T zwischen M_1 und m, so setzen wir

$$\phi = \frac{T - m}{m - M_1}.$$

Liegt dagegen T zwischen m und M_2, so setzen wir

$$\phi = \frac{T - m}{M_2 - m}.$$

ϕ ist also in ersterem Falle negativ, im zweiten positiv. Allgemein ist, vom Vorzeichen abgesehen, ϕ die Zeitdifferenz zwischen T und dem Minimum, wobei als Zeiteinheit das Intervall zwischen den einschließenden Hauptphasen der

Fleckenkurve dient. ϕ ist negativ auf dem absteigenden, positiv auf dem aufsteigenden Teile dieser Kurve.

Als Maß für die Sonnenfleckenhäufigkeit wählen wir, wie es allgemein üblich ist, die Wolfschen Relativzahlen, welche in den von der Sternwarte Zürich herausgegebenen »Astronomischen Mitteilungen« fortlaufend für jeden Tag veröffentlicht werden. Es ist nun von vornherein klar, daß man für die vorliegende Untersuchung nicht etwa einfach die für den Tag der Finsternis gültigen Relativzahlen benutzen darf, denn auch die Flecke, die sich auf der von uns abgekehrten Seite der Sonne befinden, können ja die Form der Korona beeinflussen. Über diese Flecke haben wir aber nur insoweit Kenntnis, als sie uns infolge der Rotation der Sonne vorher sichtbar gewesen sind oder später sichtbar werden.

Auf Grund dieser Überlegung schien mir das folgende Verfahren am wenigsten willkürlich zu sein: Da die synodische Rotationsdauer der Sonne rund 27^d beträgt, so bildete ich das Mittel aus den Relativzahlen, die für die 13 dem Finsternistage vorausgehenden Tage, den Finsternistag selbst und die 13 ihm folgenden Tage gelten. So erhielt ich die mittlere Relativzahl r_0 für diejenige Rotationsperiode, in deren Mitte die Finsternis liegt. r_0 kann als die augenblickliche Fleckenhäufigkeit definierend angesehen werden. Der Wert von r_0 kann sehr erheblich von demjenigen Werte verschieden sein, den man nach der jeweiligen Phase in der elfjährigen Periode erwarten sollte; wie wir sehen werden, trifft das namentlich für die Finsternis von 1896 zu.

Tabelle VI.

Finsternis	ϕ	r_1	r_2	r_3	r_0
1893 April 16	+0.82	75	87	100	88
1896 August 8	−0.67	16	0	30	22
1898 Januar 21	−0.47	31	48	22	27
1900 Mai 28	−0.17	9	25	8	9
1901 Mai 17	−0.04	0	0	24	11
1905 August 30	+0.85	55	35	65	59
1908 Januar 3	−0.78	37	48	53	45
1914 August 21	+0.25	10	17	7	9
1918 Juni 8	−0.87	111	74	26	69
1923 September 10...	+0.02	13	23	7	11
1925 Januar 24	+0.34	11	8	5	8
1926 Januar 14	+0.55	67	55	88	77
1927 Juni 29	+0.89	55	114	76	67

In der vorstehenden Tabelle VI sind nun folgende Größen gegeben:

1. die Zeit der Finsternis,
2. die Phase ϕ, berechnet nach den oben angegebenen Formeln mit Hilfe der in Tabelle I angegebenen Zeiten der Maxima und Minima. (Für das letzte Maximum wurde rund 1928.0 angesetzt. Diese Zeit kann noch ganz erheblich ungenau sein),

3. die mittlere Relativzahl r_1 für die 13 der Finsternis vorausgehenden Tage,
4. die Relativzahl r_2 für den Tag der Finsternis,
5. die mittlere Relativzahl r_3 für die 13 der Finsternis folgenden Tage,
6. die mittlere Relativzahl r_0, wie oben definiert

$$\left(r_0 = \frac{13 r_1 + r_2 + 13 r_3}{27}\right).$$

Die gesonderte Kenntnis von r_1 und r_3 wird uns bei den weiteren Betrachtungen nützlich sein.

Ordnen wir nun die Finsternisse einmal nach der Phase ϕ und ein anderes Mal nach r_0, so erhalten wir die Tabelle VII, die uns demnach eine Übersicht darüber gibt, in welcher Weise die Form der Korona von der Phase in der elfjährigen Fleckenperiode und von der jeweiligen Fleckenrelativzahl abhängt.

Tabelle VII.

Finsternis	ϕ	a	b	r_0	a	b	Finsternis
1918	−0.87	[+0.13]	[+0.10]	88	+0.03	−0.03	1893
1908	−0.78	+0.06	+0.02	77	+0.06	+0.01	1926
1896	−0.67	+0.03	+0.23	69	[+0.13]	[+0.10]	1918
1898	−0.47	+0.06	+0.12	67	+0.04	0.00	1927
1900	−0.17	+0.03	+0.29	59	+0.01	0.00	1905
1901	−0.04	+0.04	+0.26	45	+0.06	+0.02	1908
1923	+0.02	+0.06	+0.18	27	+0.06	+0.12	1898
1914	+0.25	+0.05	+0.16	22	+0.03	+0.23	1896
1925	+0.34	+0.05	+0.10	11	+0.04	+0.26	1901
1926	+0.55	+0.06	+0.01	11	+0.06	+0.18	1923
1893	+0.82	+0.03	−0.03	9	+0.03	+0.29	1900
1905	+0.85	+0.01	0.00	9	+0.05	+0.16	1914
1927	+0.89	+0.04	0.00	8	+0.05	+0.10	1925

Was zunächst die Größe a (die rechnungsmäßige Abplattung der Korona an der Sonnenoberfläche) angeht, so zeigt sich weder eine Abhängigkeit von ϕ noch von r_0. Nur für die Finsternis von 1918 ($\phi = -0.87$, $r_0 = 69$) hat a den abnorm großen Wert $+0.13$, alle anderen Werte von a liegen zwischen $+0.01$ und $+0.06$. Nehmen wir an, daß a für alle Finsternisse (außer für die von 1918) denselben Wert gehabt hat, so daß also die Verschiedenheiten von a nur durch die Unsicherheiten der Berechnung dieser Größe hervorgerufen sind, so findet sich im Mittel aus 12 Werten (1918 ausgeschlossen)

$$a = +0.04, \text{ m. F. des einzelnen Wertes } = \pm 0.017.$$

Der Einfachheit wegen sind hier gleiche Gewichte für die einzelnen a angenommen worden. Der mittlere Fehler der einzelnen a ist nach Tabelle IV im Mittel ± 0.016; die Verschiedenheiten von a können also in der Tat durch die Unsicherheit der Bestimmung dieser Größe erklärt werden, wenn man von der Finsternis 1918 absieht.

Die Größe b zeigt eine deutliche Abhängigkeit von der Phase ϕ in dem Sinne, daß b nahe dem Maximum der Fleckenhäufigkeit (also für große absolute Werte von ϕ) klein, für kleine Werte von ϕ (also nahe dem Sonnenfleckenminimum) dagegen groß ist. Im ersteren Falle ist die Korona also nahezu kreisrund, im zweiten Falle abgeplattet, wie es ja längst bekannt ist. Aber diese Regel ist nicht ohne Ausnahmen: Bei der Finsternis von 1896 ($\phi = -0.67$) ist $b = +0.23$, die Korona also von ausgesprochenem Minimumstypus. Auch die Korona von 1918 ($\phi = -0.87$) weist einen ziemlich großen Wert von b ($+0.10$) auf, sie ist also nicht nur hinsichtlich des Wertes von a, sondern auch hinsichtlich desjenigen von b abnorm. Nach dem Gesagten ist also der Zusammenhang zwischen b und ϕ nicht sehr befriedigend.

Betrachten wir nun die rechte Hälfte der Tabelle VII, woselbst die Finsternisse nach der Relativzahl r_0 geordnet sind. Die Finsternis von 1918 behält auch hier ihre Ausnahmestellung, denn sowohl a als auch b sind zu groß. Andererseits aber nimmt die Finsternis von 1896 hier keine Ausnahmestellung mehr ein; es zeigt sich nämlich, daß, obwohl diese Finsternis nicht allzu lange nach einem Fleckenmaximum stattfand, doch die Relativzahl r_0 damals sehr klein war, nämlich nur 22 betrug. Wenn wir also annehmen, daß die Form der Korona weniger von der Phase in der elfjährigen Periode als von der augenblicklichen Fleckenhäufigkeit abhängt, so dürfen wir uns nicht wundern, daß die Korona von 1896 den Minimumstypus aufwies. Der Zusammenhang zwischen b und r_0 ist also enger als der zwischen b und ϕ. Allerdings ist zu bemerken, daß der Wert von b für kleine r_0 zwar stets beträchtlich ist, aber dabei doch stark hin und her schwankt, von $+0.10$ bis $+0.29$.

Zu wirklich befriedigenden Ergebnissen kommen wir erst, wenn wir die Finsternisse zwar nach r_0 ordnen, wie in der rechten Hälfte von Tabelle VII, dabei aber noch unterscheiden zwischen solchen Finsternissen, die zeitlich auf den absteigenden Ast (zwischen Maximum und Minimum) der elfjährigen Fleckenkurve fallen, und solchen, die dem aufsteigenden Ast (zwischen Minimum und Maximum) angehören. In dieser Weise sind die Finsternisse in der ohne weiteres verständlichen Tabelle VIII angeordnet.

Tabelle VIII.

Abstieg					Aufstieg				
Finsternis	r_0	a	b	ϕ	r_0	a	b	ϕ	Finsternis
					88	+0.03	−0.03	+0.82	1893
					77	+0.06	+0.01	+0.55	1926
1918	69	[+0.13]	[+0.10]	−0.87					
					67	+0.04	0.00	+0.89	1927
					59	+0.01	0.00	+0.85	1905
1908	45	+0.06	+0.02	−0.78					
1898	27	+0.06	+0.12	−0.47					
1896	22	+0.03	+0.23	−0.67					
1901	11	+0.04	+0.26	−0.04	11	+0.06	+0.18	+0.02	1923
1900	9	+0.03	+0.29	−0.17	9	+0.05	+0.16	+0.25	1914
					8	+0.05	+0.10	+0.34	1925

Hier zeigt sich ganz deutlich, daß für eine Korona vom Minimumstypus *b* größer ist bei den Finsternissen, die dem Abstieg, kleiner bei denjenigen, die dem Aufstieg der Fleckenkurve angehören. Diese zunächst etwas überraschende Erscheinung erklärt sich mit größter Wahrscheinlichkeit dadurch, daß nach dem Minimum die Flecke, wie bekannt, zunächst in ziemlich hohen heliographischen Breiten auftreten; dieser Umstand wird auf eine Verringerung der Abplattung der Korona hinwirken, wenn wir auf Grund unserer schon oben gewonnenen Erfahrungen einen engen Zusammenhang zwischen dem jeweiligen Fleckenstande und der Form der Korona annehmen.

In Tabelle VIII sind nur noch zwei Schönheitsfehler vorhanden. Der eine ist nur leichter Natur und besteht darin, daß die Koronen von 1898 und 1896 trotz nahezu gleicher Relativzahl $r_\circ$ (27 und 22) doch recht verschiedene Abplattungen ($b = 0.12$ und 0.23) besitzen. Wir dürfen aber nicht vergessen, daß die Berechnung der jeweiligen Relativzahl doch etwas willkürlich ist, und daß auch die *b* mit nicht unerheblichen mittleren Fehlern (0.02 und 0.04 im vorliegenden Falle) behaftet sind. Überhaupt kann man ja einen mathematisch exakten Zusammenhang zwischen *b* und $r_\circ$ schon aus dem Grunde nicht erwarten, daß augenscheinlich auch die Verteilung der Flecke auf der Sonnenoberfläche eine Rolle spielt.

Der zweite Schönheitsfehler betrifft wiederum die Korona von 1918, die abnorme Werte von *a* und *b* aufweist. Wir werden sehen, daß diese Abnormität eine befriedigende Erklärung zuläßt.

Soweit man nun aus dem in Tabelle VIII zusammengefaßten knappen Material schon weitere Schlüsse ziehen darf, erkennt man, daß der Maximumstypus der Korona auftritt, wenn $r_\circ$ größer als etwa 40 ist. Bei kleinerem $r_\circ$ scheint sich dann ziemlich rasch der Minimumstypus zu entwickeln. *a* ist immer positiv, d. h. auch bei einer Maximumskorona ist eine, wenn auch sehr kleine Abplattung vorhanden. *b* ist stets $\geqq 0$, außer bei der Korona von 1893 ($b = -0.03$, m. F. ± 0.02). In letzterem Falle würde *b* aber auch positiv werden, wenn wir, wie es für die Koronen vom Minimumstypus stets geschehen ist, die zu $R > 2.0$ gehörigen ε ausschließen würden (vgl. Tabelle II und III). Wir haben schon früher darauf hingewiesen, daß für $R > 2.0$ die Abplattung wieder abzunehmen scheint, wenigstens für den Minimumstypus. Allgemein können wir sagen: Innerhalb eines Abstandes von einem Sonnenradius vom Rande der Sonne ist die Abplattung entweder konstant und in diesem Falle sehr klein (Maximumstypus) oder aber sie nimmt sehr nahe proportional dem Abstande vom Sonnenrande zu.

Wir wenden uns nun dem näheren Studium der abnormen Korona zu, die bei der Finsternis 1918 Juni 8 beobachtet wurde. Schon der Anblick der Aufnahmen der Finsternis zeigt die ungewöhnliche Beschaffenheit der Korona. Auf der Westseite der Sonne war sie stärker entwickelt als auf der Ostseite, und namentlich auf den stärker belichteten Aufnahmen läuft sie auf der Ostseite in der Äquatorgegend ziemlich spitz zu, während sie auf der Westseite abgerundet erscheint, so daß die Gesamtform eiförmig ist. E. Pettit und H. B. Steele haben direkt ausgesprochen, daß die Korona auf der Westseite der Sonne vom Maximumstypus, auf der Ostseite vom Minimumstypus

war[1]. Eine Erklärung für diese merkwürdige Erscheinung liegt auf der Hand, sobald wir auf die früher gewonnene Folgerung zurückgreifen, daß die Form der Korona durch den augenblicklichen Sonnenfleckenstand bestimmt wird. Betrachten wir (s. Tabelle VI) die mittleren Relativzahlen r_1 und r_3 für die 13 den Finsternissen vorangehenden bzw. die 13 ihnen folgenden Tage, so sehen wir, daß r_1 und r_3 in der Regel nur mäßig voneinander verschieden sind. Das Mittel der absoluten Beträge von $r_1 - r_3$ bei Ausschluß der Finsternis von 1918 ist 13, und diese Differenz ist nie größer als 25. Bei der Finsternis von 1918 aber ist $r_1 - r_3 = 111 - 26 = 85$! Die Verteilung der Flecke war also damals viel ungleichmäßiger als gewöhnlich. Noch deutlicher wird dies, wenn wir die Relativzahlen für die einzelnen Tage von 1918 Mai 26 bis Juni 21 betrachten. Sie sind in Tabelle IX zusammengestellt. δ bedeutet die Zeitdifferenz gegen den Tag der Finsternis.

Tabelle IX.

	δ	r		δ	r
1918 Mai 26	-13^d	64	1918 Juni 9	$+1^d$	44
27	−12	59	10	+ 2	49
28	−11	59	11	+ 3	19
29	−10	62	12	+ 4	19
30	− 9	106	13	+ 5	17
31	− 8	139	14	+ 6	14
Juni 1	− 7	164	15	+ 7	13
2	− 6	151	16	+ 8	14
3	− 5	173	17	+ 9	15
4	− 4	151	18	+10	14
5	− 3	122	19	+11	33
6	− 2	121	20	+12	47
7	− 1	76	21	+13	46
8	0	74			

Da die synodische Rotationsdauer der Sonne rund 27^d beträgt, und da die Flecke scheinbar von Ost nach West über die Sonnenscheibe wandern, so wird, wenn wir von den wirklichen Änderungen der Sonnenflecke absehen, für die der Westseite der Korona zugekehrte Sonnenhemisphäre derjenige Wert von r gelten, der $6^d.5$ vor der Finsternis für einen Beobachter auf der Erde galt, d. h. auf der der Westhälfte der Korona zugekehrten Sonnenhemisphäre war bei der Finsternis eine Relativzahl von etwa 160 zu verzeichnen. Entsprechend war die Relativzahl auf der der Osthälfte der Korona zugewandten Sonnenhemisphäre etwa 14. Die erste Zahl entspricht einem hohen Maximum, die zweite fast einem Minimum der Fleckenhäufigkeit. Wir haben also westlich der Sonne eine Korona vom Maximumstypus, östlich eine solche vom Minimumstypus zu erwarten, ganz so, wie sie — wenigstens mit einiger Annäherung — auch beobachtet worden ist.

[1] Popular Astronomy 1918, S. 479.

Um nun diese Erscheinung auch zahlenmäßig darzustellen, habe ich die früher (vgl. Tabelle II) für die Finsternis von 1918 zur Verwendung gekommenen Isophoten nochmals vermessen, jedoch nicht, wie früher, ihre Durchmesser I bis VIII, sondern ihre diesen Durchmessern entsprechenden Radien vom Mittelpunkte der Mondscheibe aus nach beiden Richtungen. Die Ergebnisse dieser neuen Messungen sind in Tabelle X gegeben, die ganz entsprechend wie Tabelle II angelegt ist. $^1/_2 d$ ist der in Millimetern ausgedrückte Radius des Mondes auf dem benutzten Bilde. Die mit W überschriebenen Kolumnen beziehen sich auf die Westhälfte, die mit O überschriebenen auf die Osthälfte der Korona. Von den beiden, dem Polardurchmesser V entsprechenden Polarradien steht unter W der nördliche, unter O der südliche zuerst. Einheit der Länge ist der Mondradius. Es ist

$$R = {}^1/_3\,(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{VIII})$$
$$\varepsilon = [R : {}^1/_4\,(\mathrm{IV} + \mathrm{V_I} + \mathrm{V_I} + \mathrm{VI})] - 1\,.$$

Tabelle XI enthält eine Zusammenstellung der nach R geordneten ε, getrennt für die West- und die Osthälfte der Korona.

Tabelle X.

Finsternis 1918.

	1. $^1/_2 d = 50.5$		**2.** $^1/_2 d = 36.5$		**3.** $^1/_2 d = 15.5$		**4.** $^1/_2 d = 14.8$		**5.** $^1/_2 d = 5.8$	
	W	O	W	O	W	O	W	O	W	O
I	1.28	1.19	1.36	1.21	1.61	1.61	1.62	1.76	2.07	2.07
II	1.19	1.19	1.32	1.15	1.61	1.48	1.62	1.69	2.16	1.98
III	1.12	1.13	1.11	1.04	1.55	1.35	1.76	1.42	2.07	1.72
IV	1.03	1.03	1.03	1.04	1.42	1.23	1.39	1.22	1.90	1.72
V_1	1.00	1.03	1.03	1.05	1.35	1.32	1.28	1.32	1.59	1.72
V_2	1.03	1.00	1.05	1.03	1.32	1.35	1.32	1.28	1.72	1.59
VI	1.04	1.01	1.15	1.04	1.48	1.26	1.66	1.35	1.72	1.64
VII	1.17	1.01	1.22	1.07	1.58	1.42	1.82	1.45	1.98	1.72
VIII	1.29	1.06	1.32	1.15	1.61	1.55	1.69	1.62	2.07	1.90
R	1.25	1.15	1.33	1.17	1.61	1.55	1.64	1.69	2.10	1.98
ε	0.22	0.13	0.25	0.12	0.16	0.20	0.16	0.31	0.21	0.19

	6. $^1/_2 d = 13.0$		**7.** $^1/_2 d = 19.2$		**8.** $^1/_2 d = 19.2$		**9.** $^1/_2 d = 35.0$		**10.** $^1/_2 d = 43.0$	
	W	O	W	O	W	O	W	O	W	O
I	1.85	1.92	1.69	1.72	1.93	2.01	1.23	1.14	1.14	1.14
II	1.92	1.69	1.82	1.64	1.93	1.67	1.24	1.09	1.09	1.15
III	1.85	1.54	1.88	1.46	1.93	1.56	1.19	1.06	1.03	1.05
IV	1.62	1.38	1.46	1.51	1.77	1.46	1.09	1.01	1.01	1.02
V_1	1.42	1.42	1.35	1.41	1.51	1.51	1.06	1.03	1.00	1.02
V_2	1.42	1.42	1.41	1.35	1.51	1.51	1.03	1.06	1.02	1.00
VI	1.54	1.46	1.64	1.30	1.69	1.46	1.06	1.09	1.07	1.01
VII	1.73	1.62	1.82	1.61	1.87	1.67	1.14	1.11	1.09	1.02
VIII	1.77	1.85	1.88	1.77	2.01	1.82	1.23	1.17	1.19	1.08
R	1.85	1.82	1.80	1.71	1.96	1.83	1.23	1.13	1.14	1.12
ε	0.23	0.28	0.23	0.23	0.21	0.23	0.16	0.08	0.11	0.11

Tabelle XI.

W			O		
R	ε	Δ	R	ε	Δ
1.14	+0.11	−0.06	1.12	+0.11	0.00
1.23	0.16	−0.01	1.13	0.08	−0.04
1.25	0.22	+0.04	1.15	0.13	+0.01
1.33	0.25	+0.07	1.17	0.12	−0.01
1.61	0.16	−0.03	1.55	0.20	+0.01
1.64	0.16	−0.04	1.69	0.31	+0.09
1.80	0.23	+0.02	1.71	0.23	+0.01
1.85	0.23	+0.02	1.82	0.28	+0.04
1.96	0.21	0.00	1.83	0.23	−0.01
2.10	0.21	−0.01	1.98	0.19	−0.08

Ermitteln wir auf Grund von Tabelle XI nach der Methode der kleinsten Quadrate die Koeffizienten der Gleichung

$$\varepsilon = a + b(R - 1)$$

und ihre mittleren Fehler, so erhalten wir folgende Resultate:

	a	b	m. F. von a	m. F. von b
Westhälfte der Korona	+0.162	+0.054	±0.027	±0.041
Osthälfte » »	+0.095	+0.180	±0.029	±0.047

Die Δ in Tabelle XI geben die Differenzen Beobachtung minus Rechnung. Wie zu erwarten war, ist die Darstellung ungenauer als bei den früheren Messungen der Durchmesser der Korona.

Die Werte a und b lehren folgendes: Die Westhälfte der Korona ist nahezu vom Maximumstypus, insofern als die Zunahme der Abplattung mit wachsender Entfernung vom Sonnenrande nur gering ist ($b = +0.05$). Abweichend vom gewöhnlichen Maximumstypus ist aber a sehr groß (+0.16). Die Korona auf der Ostseite der Sonne ist von ausgesprochenem Minimumstypus, insofern als die Abplattung nach außen hin stark zunimmt ($b = +0.18$); aber auch hier ist a ungewöhnlich groß (+0.10). Die beiden Hälften der Korona sind aber natürlich nicht unabhängig voneinander, da sie die Polarachse gemeinsam haben. Wenn wir annehmen, daß die Minimumskorona auf der Ostseite der Sonne den Polarradius verkleinert, so wird es klar, warum die Maximumskorona auf der Westseite eine ungewöhnlich starke Abplattung hat. Nicht ersichtlich ist dagegen der Grund dafür, daß a auch auf der Ostseite so groß ist. Es ist aber hervorzuheben, daß der mittlere Fehler dieser Zahl ziemlich groß ist (±0.03), so daß vielleicht in Wirklichkeit der Wert von a nicht sehr ungewöhnlich gewesen ist.

Im großen ganzen ist jedenfalls die abnorme Form der Korona von 1918 befriedigend erklärt. Sie liefert einen neuen Beweis für die Folgerung, daß die Form der Korona von dem jeweiligen Sonnenfleckenstande abhängt. Damit braucht keineswegs gesagt zu sein, daß die Sonnenflecke selbst direkt

auf die Form der Korona einwirken; es kann vielmehr sehr wohl sein, daß die Zustände der Sonne, die auf die Bildung der Flecke einwirken, zugleich auch für die Form der Korona maßgebend sind. Die Anschauung eines nur indirekten Zusammenhanges zwischen Korona und Flecken ist um so plausibler, als ja in hohen heliographischen Breiten Flecke überhaupt kaum vorkommen, während die Korona dort zeitweise stark entwickelt ist.

Es ist bekannt, daß gewisse Details der Korona in engem Zusammenhange mit den Protuberanzen stehen. Indessen liegt es nicht im Plane dieser Arbeit, auf die Beziehungen zwischen Korona und Protuberanzen näher einzugehen.

Schließlich wollen wir für die einzelnen Finsternisse schematische Isophoten der Korona in verschiedenem Abstande vom Sonnenrande ableiten. Wir sehen die Verschiedenheiten des Verlaufs der Isophoten der Korona in den vier Quadranten zwischen Polarachse und Äquator der Sonne als zufällig an und schreiben aus Tabelle II für die einzelnen Isophoten die Werte I, $^1/_2$(II + VIII), $^1/_2$(III + VII), $^1/_2$(IV + VI) und V heraus. Die so erhaltenen

Tabelle XII.

Schematische Isophoten.

		ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5			ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
1893	I, 3	I.12	I.10	I.10	I.09	I.08	1905	8, 11, 13, 14, 16	I.47	I.46	I.48	I.46	I.46
	2, 9, 10	I.29	I.36	I.33	I.32	I.29		3, 5, 18, 29	I.61	I.63	I.62	I.60	I.60
	6, 8	I.80	I.88	I.80	I.82	I.72		4, 6, 7, 19, 25	I.72	I.74	I.73	I.72	I.75
	4, 5, 7	2.15	2.21	2.18	2.23	2.20							
							1908	5, 6, 8	I.24	I.21	I.18	I.14	I.14
1896	I, 7, 9	I.21	I.20	I.19	I.12	I.10		I, 7	I.51	I.51	I.52	I.45	I.37
	2, 3, 5	I.37	I.33	I.35	I.24	I.18		3, 4	I.90	I.96	I.92	I.84	I.75
	4, 6, 8	I.62	I.61	I.61	I.42	I.33							
							1914	I, 5, 6, 8, 9	I.22	I.20	I.20	I.14	I.11
1898	I, 10, 14	I.12	I.17	I.15	I.09	I.04		2, 4, 7, 10	I.47	I.46	I.44	I.32	I.28
	8, 11, 12	I.28	I.31	I.30	I.19	I.13		3, 11	I.67	I.64	I.59	I.45	I.42
	2, 6, 16	I.43	I.50	I.52	I.36	I.37		12, 13	I.86	I.82	I.73	I.58	I.58
	15, 17, 19	I.66	I.71	I.63	I.48	I.46							
	4, 5, 7, 9	I.90	I.96	I.90	I.67	I.66	1923	I, 2, 10, 11	I.24	I.27	I.26	I.16	I.14
	3, 13, 18	2.28	2.41	2.30	2.09	2.04		3, 4, 7, 9, 12, 13	I.45	I.50	I.42	I.29	I.28
								5, 6, 8	I.70	I.78	I.59	I.48	I.48
1900	I, 5, 6, 8, 12	I.17	I.16	I.15	I.11	I.06							
	4, 7, 10, 14	I.38	I.35	I.33	I.20	I.18	1925	2, 5, 8	I.18	I.18	I.14	I.11	I.09
	2, 15, 16	I.54	I.52	I.49	I.31	I.32		I, 3, 4, 7, 10	I.43	I.41	I.40	I.32	I.29
	3, 9, 13	I.75	I.75	I.61	I.42	I.40		6, 9, 11	I.78	I.74	I.73	I.57	I.53
1901	I, 4, 9	I.23	I.23	I.24	I.14	I.12							
	3, 5, 7, 8	I.35	I.39	I.37	I.24	I.20							
	2, 6, 10	I.59	I.61	I.51	I.38	I.32	1926	3, 6	I.42	I.43	I.42	I.36	I.35
								I, 2, 4, 5, 7	2.08	2.08	2.04	I.97	I.89
1905	10, 21, 26, 27	I.18	I.18	I.18	I.18	I.18							
	2, 15, 17, 20	I.26	I.26	I.25	I.25	I.24	1927	I, 2, 4, 5	I.39	I.34	I.32	I.30	I.29
	I, 9, 22, 28	I.40	I.40	I.38	I.36	I.34		3, 6	I.81	I.76	I.73	I.74	I.69

Zahlen werden alsdann noch für einander naheliegende Isophoten gemittelt. (Einige isoliert liegende Isophoten wurden ausgeschlossen.) Die Resultate dieser Rechnungen sind in Tabelle XII gegeben. In der ersten Kolumne steht das Jahr der Finsternis, in der zweiten stehen die Nummern der in Tabelle II gegebenen Isophoten, die hier zu Mitteln vereinigt sind. Dann folgen die Radien ρ_1 bis ρ_5 der schematischen Isophoten. ρ_1 ist der Radius im Äquator, ρ_2 bis ρ_5 sind die gegen diesen um $22^\circ5$, 45°, $67^\circ5$, 90° geneigten Radien. Der Unterschied zwischen dem Radius des Mondes und dem der Sonne braucht hier nicht berücksichtigt zu werden. Die Korona von 1918 ist wegen ihrer stark unsymmetrischen Form fortgelassen. Auf eine figürliche Darstellung der in Tabelle XII zahlenmäßig gegebenen Isophoten kann verzichtet werden, da man sie im Bedarfsfalle leicht zeichnen kann. Die nähere Betrachtung der Zahlen in Tabelle XII lehrt, daß ρ_1 und ρ_2 in der Regel nicht sehr verschieden sind, und ebenso meist auch ρ_4 und ρ_5.

Zum Schluß wollen wir die wichtigsten Resultate der vorliegenden Arbeit kurz zusammenfassen:

1. Während bisher sicher nur bekannt war, daß zur Zeit der Sonnenfleckenmaxima die Korona ungefähr kreisrund, zur Zeit der Minima dagegen stark abgeplattet ist, ist es nunmehr gelungen, die Abhängigkeit der durch den Verlauf der Isophoten definierten Form der Korona vom Fleckenstande zahlenmäßig darzustellen.
2. Die Form der Korona hängt von der jeweiligen Relativzahl der Sonnenflecke ab, dagegen von der Phase in der elfjährigen Fleckenperiode nur insofern, als diese Phase die Häufigkeit, Größe und Verteilung der Flecke bestimmt.
3. Die Korona hat stets eine Abplattung an den Polen, die aber bei großer Relativzahl der Flecke sehr klein ist.
4. Bei großer Relativzahl der Flecke (etwa > 40) nimmt die sehr geringe Abplattung der Korona mit wachsender Entfernung vom Sonnenrande gar nicht oder nur sehr wenig zu. (Maximumstypus der Korona.)
5. Bei kleiner Relativzahl (etwa < 30) nimmt die in der Nähe des Sonnenrandes kleine Abplattung der Korona nach außen hin stark zu, und zwar innerhalb eines Abstandes von einen Sonnenradius nahezu proportional diesem Abstande. (Minimumstypus der Korona.) Weiter nach außen nimmt die Abplattung augenscheinlich wieder ab.
6. Eine stark ungleichmäßige Verteilung der Flecke auf der Sonnenoberfläche beeinflußt die Form der Korona in hohem Maße. (Finsternis von 1918.)

Diese neu gewonnenen Erkenntnisse über die Korona werden vertieft werden können, wenn die vorhandenen Aufnahmen mikrophotometrisch vermessen werden, wobei eine große Genauigkeit nicht einmal nötig ist. Es werden dann auch noch mehrere Finsternisse für die Untersuchung herangezogen werden können, die hier wegen einer zu geringen Zahl von veröffentlichten Aufnahmen beiseitegelassen werden mußten.

Ausgegeben am 18. Juni.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XVII—XIX

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 7. Juni. (S. 215)

Einstein: Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus. (S. 217)

Dem Royal College of Physicians in London zur dreihundertjährigen Gedenkfeier für William Harvey am 14. Mai 1928. (S. 222)

Klassensitzung am 14. Juni. (S. 223)

Einstein: Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. (S. 224)

G. Pólya: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (Mitteilung vom 3. Mai.) (S. 228)

E. Hopf: Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern. (Mitteilung vom 3. Mai.) (S. 233)

Gesamtsitzung am 21. Juni. (S. 246)

Adresse an Hrn. Albrecht Penck zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 17. Juni 1928. (S. 247)

Library of Congress
JAN 11 1929
Smithsonian Deposit

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

1. Hr. Meinecke sprach über die Kühlmannsche Politik in der päpstlichen Friedensaktion 1917.

Er erörterte die päpstliche Friedensaktion von 1917 und ihre Behandlung durch den Kronrat, die Reichsregierung und die Oberste Heeresleitung.

2. Hr. Planck überreichte im Namen des Hrn. Einstein dessen Abhandlung über Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus.

Es wird die Theorie eines n-dimensionalen Kontinuums entwickelt, das neben einer Riemann-Metrik auch eine eindeutige Richtungsbeziehung der Vektoren im Endlichen aufweist. An die Stelle der $\frac{1}{2} n (n+1)$ Feldvariabeln $g_{\mu\nu}$ der Riemannschen Theorie treten hier die n^2 Komponenten eines n-Bein-Feldes. Die Frage, ob der Theorie eine physikalische Bedeutung zukomme, ist offen gelassen.

3. Hr. Burdach überreichte die 2. Auflage seines Buches »Reinmar der Alte und Walther von der Vogelweide« (Halle a. S. 1928).

4. Hr. Sachau übersandte »Indices« Teil II zu Ibn Saad (Bd. IX) (Leiden 1928).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Gerard de Geer in Stockholm übersandte Sonderabdrucke seiner Abhandlungen: »Om de geografiska huvudproblemen i nordpolsområdet« (1926), »On the solar curve as dating the ice age, the New York moraine and Niagara Falls through the Swedish time-scale« (1926), »Late glacial clay varves in Argentinia« (1927), »Late glacial clay varves in Himalaya connected with the Swedish time scale« (1927), »Schwankungen der Sonnenstrahlung seit 18000 Jahren« (1927) und »Geochronology as raised on solar radiation« (1927).

6. Vorgelegt wurde die 1. Lieferung des mit Unterstützung der Akademie erschienenen Werkes »Corpus inscriptionum Chaldicarum«, in Verbindung mit F. Bagel und F. Schachermeyr herausgegeben von C. F. Lehmann-Haupt (Berlin und Leipzig 1928).

7. Das Royal College of Physicians in London feierte am 14. Mai 1928 die dreihundertjährige Gedenkfeier für William Harvey. Die Akademie hat dem College bei diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

8. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt:

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse:

3000 *RM* für die Fortführung des Nomenclator animalium generum et subgenerum,

1500 *RM* für eine Forschungsreise des Hrn. Dr. B. Rensch in Berlin nach Java;

durch ihre philosophisch-historische Klasse:

1000 *RM* für die Herausgabe der mittelalterlichen Bibliothekskataloge.

Die Akademie hat den Professor an der Universität Cambridge (England) Sir Ernest Rutherford zum korrespondierenden Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus.

Von A. Einstein.

Die Riemannsche Geometrie hat in der allgemeinen Relativitätstheorie zu einer physikalischen Beschreibung des Gravitationsfeldes geführt, sie liefert aber keine Begriffe, die dem elektromagnetischen Felde zugeordnet werden können. Deshalb ist das Bestreben der Theoretiker darauf gerichtet, natürliche Verallgemeinerungen oder Ergänzungen der Riemannschen Geometrie aufzufinden, welche begriffsreicher sind als diese, in der Hoffnung, zu einem logischen Gebäude zu gelangen, das alle physikalischen Feldbegriffe unter einem einzigen Gesichtspunkte vereinigt. Solche Bestrebungen haben mich zu einer Theorie geführt, welche ohne jeden Versuch einer physikalischen Deutung mitgeteilt werden möge, weil sie schon wegen der Natürlichkeit der eingeführten Begriffe ein gewisses Interesse beanspruchen kann.

Die Riemannsche Geometrie ist dadurch charakterisiert, daß die infinitesimale Umgebung jedes Punktes P eine euklidische Metrik aufweist, sowie dadurch, daß die Beträge zweier Linienelemente, welche den infinitesimalen Umgebungen zweier endlich voneinander entfernter Punkte P und Q angehören, miteinander vergleichbar sind. Dagegen fehlt der Begriff der Parallelität solcher zwei Linienelemente; der Richtungsbegriff existiert nicht für das Endliche. Die im folgenden dargelegte Theorie ist dadurch charakterisiert, daß sie neben der Riemannschen Metrik den der »Richtung« bzw. Richtungsgleichheit oder des »Parallelismus« für das Endliche einführt. Dem entspricht es, daß neben den Invarianten und Tensoren der Riemannschen Geometrie neue Invarianten und Tensoren auftreten.

§ 1. n-Bein-Feld und Metrik.

Wir denken uns in dem beliebigen Punkte P des n-dimensionalen Kontinuums ein orthogonales n-Bein aus n Einheitsvektoren errichtet, welches ein lokales Koordinatensystem repräsentiert. A_a seien die Komponenten eines Linienelementes oder eines sonstigen Vektors, bezogen auf dies lokale System (n-Bein). Für die Beschreibung eines endlichen Bereiches sei außerdem das Gausssche Koordinatensystem der x^ν eingeführt. A^ν seien die ν-Komponenten des Vektors (A), bezogen auf letzteres, ferner h_a^ν die ν-Komponenten der das n-Bein bildenden Einheitsvektoren, dann ist[1]

$$A^\nu = h_a^\nu A_a \quad \cdots . \qquad (1)$$

---

[1] Wir bezeichnen die Koordinaten-Indizes mit griechischen, die Bein-Indizes mit lateinischen Buchstaben.

Durch Umkehrung von (1) erhält man, wenn man mit $h_{\nu a}$ die normierten Unterdeterminanten der h_a^ν bezeichnet,

$$A_a = h_{\mu a} A^\mu \cdots, \tag{1a}$$

Für den Betrag A des Vektors (A) gilt dann wegen der Euklidizität der infinitesimalen Gebiete die Formel

$$A^2 = \Sigma A_a^2 = h_{\mu a} h_{\nu a} A^\mu A^\nu \cdots, \tag{2}$$

Die Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ stellen sich also in der Form dar

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu a} h_{\nu a}, \cdots \tag{3}$$

wobei natürlich über a zu summieren ist. Bei festem a sind die h_a^μ die Komponenten eines kontravarianten Vektors. Es gelten ferner die Relationen

$$h_{\mu a} h_a^\nu = \delta_\mu^\nu \cdots \tag{4}$$

$$h_{\mu a} h_b^\mu = \delta_{ab}, \cdots \tag{5}$$

wobei $\delta = 1$ bzw. $\delta = 0$ ist, je nachdem die beiden Indizes gleich oder verschieden sind. Die Richtigkeit von (4) und (5) folgt aus obiger Definition der $h_{\mu a}$ als normierte Unterdeterminanten zu den h_a^μ. Der Vektorcharakter der $h_{\mu a}$ folgt am bequemsten daraus, daß die linke, also auch die rechte Seite von (1a) bezüglich beliebiger Koordinaten-Transformationen für jede Wahl des Vektors (A) invariant ist.

Das n-Bein-Feld wird durch n^2 Funktionen h_a^μ bestimmt, während die Riemann-Metrik durch die nur $\frac{n(n+1)}{2}$ Größen $g_{\mu\nu}$ bestimmt wird. Die Metrik ist gemäß (3) durch das n-Bein-Feld, aber nicht umgekehrt letzteres durch erstere bestimmt.

§ 2. Fernparallelismus und Drehungsinvarianz.

Durch die Setzung des n-Bein-Feldes wird gleichzeitig die Existenz einer Riemann-Metrik und des Fernparallelismus zum Ausdruck gebracht. Seien nämlich (A) und (B) zwei Vektoren in den Punkten P bzw. Q, welche, bezogen auf die entsprechenden lokalen n-Beine, gleiche entsprechende Lokalkoordinaten haben (d. h. $A_a = B_a$), so sind sie als gleich (wegen (2)) und als »parallel« zu betrachten.

Sehen wir als das Wesentliche, d. h. objektiv Bedeutungsvolle nur die Metrik und den Fernparallelismus an, so erkennen wir, daß das n-Bein-Feld durch diese Setzungen noch nicht völlig bestimmt ist. Metrik und Parallelismus bleiben nämlich intakt, wenn man die n-Beine aller Punkte des Kontinuums ersetzt durch solche, die aus den ursprünglichen n-Beinen durch die nämliche Drehung hervorgehen. Wir bezeichnen diese Ersetzbarkeit des n-Bein-Feldes als Drehungsinvarianz und bestimmen: Nur solche mathematische Relationen beanspruchen reale Bedeutung, welche drehungsinvariant sind.

Bei festgehaltenem Koordinatensystem sind also die h_a^μ bei gegebener Metrik und gegebenem Parallelzusammenhang noch nicht völlig bestimmt; es

ist noch die Substitution der h_a^μ möglich, welche der Drehungsinvarianz, d. h. der Gleichung

$$A_a^* = d_{am} A_m \cdots \tag{6}$$

entspricht, wobei d_{am} orthogonal und unabhängig von den Koordinaten gewählt ist. (A_a) ist ein beliebiger, auf das Lokalsystem bezogener Vektor (A_a^*), derselbe auf das gedrehte Lokalsystem bezogen. Gemäß (1a) folgt aus (6)

$$h_{\mu a}^* A^\mu = d_{am} h_{\mu m} A^\mu$$

oder

$$h_{\mu a}^* = d_{am} h_{\mu m}, \cdots \tag{6a}$$

wobei

$$d_{am} d_{bm} = d_{ma} d_{mb} = \delta_{ab}, \cdots \tag{6b}$$

$$\frac{\partial d_{am}}{\partial x^\nu} = 0. \cdots \tag{6c}$$

Das Postulat der Drehungsinvarianz besagt dann, daß nur solche Relationen, in welchen die Größen h auftreten, als sinnvoll anzusehen sind, welche in gleichgestaltete in den h^* übergehen, wenn man die h^* auf Grund der Gleichungen (6) usw. einführt. Oder: Durch örtlich gleichförmige Drehung auseinander hervorgehende n-Bein-Felder sind äquivalent.

Das Gesetz der infinitesimalen Parallelverschiebung eines Vektors bei Übergang von einem Punkt (x^ν) zu einem benachbarten $(x^\nu + dx^\nu)$ ist offenbar durch die Gleichung

$$dA_a = 0 \cdots \tag{7}$$

charakterisiert, d. h. durch die Gleichung

$$0 = d(h_{\mu a} A^\nu) = \frac{\partial h_{\mu a}}{\partial x^\tau} A^\mu dx^\tau + h_{\mu a} dA^\mu = 0.$$

Durch Multiplikation mit h_a^ν geht diese Gleichung mit Rücksicht auf (5) über in

wobei

$$\left.\begin{aligned} dA^\nu &= -\Delta^\nu_{\mu\tau} A^\mu dx^\tau \\ \Delta^\nu_{\mu\tau} &= h^{\nu a} \frac{\partial h_{\mu a}}{\partial x^\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Dies Parallelverschiebungsgesetz ist drehungsinvariant und ist unsymmetrisch mit Bezug auf die unteren Indizes der Größen $\Delta^\nu_{\mu\tau}$. Verschiebt man den Vektor (A) gemäß diesem Verschiebungsgesetz auf einem geschlossenen Wege, so geht er in sich selbst über; das bedeutet, daß der aus den Verschiebungskoeffizienten $\Delta^\nu_{\mu\tau}$ gebildete RIEMANN-Tensor

$$R^i_{k,lm} = -\frac{\partial \Delta^i_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Delta^i_{km}}{\partial x^l} + \Delta^i_{\alpha l} \Delta^\alpha_{km} - \Delta^i_{\alpha m} \Delta_{kl}$$

vermöge (7a) identisch verschwindet, was man auch leicht verifiziert.

Außer diesem Parallelverschiebungsgesetz existiert aber auch noch jenes (nicht integrable) symmetrische Verschiebungsgesetz, das zu der RIEMANNschen

Metrik gemäß (2) und (3) gehört. Es ist bekanntlich durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} \bar{d}A^\nu &= -\Gamma^\nu_{\mu\tau} A^\mu dx^\tau \\ \Gamma^\nu_{\mu\tau} &= \frac{1}{2} g^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\alpha}\right). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die $\Gamma^\nu_{\mu\tau}$ drücken sich vermöge (3) durch die Größen h des n-Bein-Feldes aus. Dabei ist zu beachten, daß

$$g^{\mu\nu} = h^\mu_a h^\nu_a . \cdots \quad (9)$$

Denn bei dieser Setzung sind wegen (4) und (5) die Gleichungen

$$g^{\mu\lambda} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\nu$$

erfüllt, welche die $g^{\mu\nu}$ aus den $g_{\mu\nu}$ definieren. Auch dies auf die Metrik allein gegründete Verschiebungsgesetz ist natürlich drehungsinvariant im obigen Sinne.

§ 3. Invarianten und Kovarianten.

In der von uns betrachteten Mannigfaltigkeit existieren außer den Tensoren und Invarianten der Riemann-Geometrie, welche die Größen h nur in der durch (3) gegebenen Kombination enthalten, noch weitere Tensoren und Invarianten, von welchen wir nur die einfachsten ins Auge fassen wollen.

Geht man aus von einem Vektor (A^ν) im Punkte (x^ν), so entstehen durch die beiden Verschiebungen d und $\bar{d}$ im Nachbarpunkte $(x^\nu + dx^\nu)$ die beiden Vektoren

$$A^\nu + dA^\nu$$

und

$$A^\nu + \bar{d}A^\nu .$$

Die Differenz

$$dA^\nu - \bar{d}A^\nu = (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \Delta^\nu_{\alpha\beta})\, A^\alpha dx^\beta$$

hat also ebenfalls Vektorcharakter. Also ist auch

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \Delta^\nu_{\alpha\beta}$$

ein Tensor, und ebenso dessen antisymmetrischer Bestandteil

$$\frac{1}{2}(\Delta^\nu_{\alpha\beta} - \Delta^\nu_{\beta\alpha}) = \Lambda^\nu_{\alpha\beta} . \cdots \quad (10)$$

Die fundamentale Bedeutung dieses Tensors in der hier entwickelten Theorie ergibt sich aus Folgendem: Wenn dieser Tensor verschwindet, ist das Kontinuum euklidisch. Wenn nämlich

$$0 = 2\,\Lambda^\nu_{\alpha\beta} = h^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial h_{\alpha a}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta a}}{\partial x^\alpha}\right),$$

so folgt durch Multiplikation mit $h_{\nu b}$

$$0 = \frac{\partial h_{\alpha b}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\beta b}}{\partial x^\alpha}$$

Es läßt sich daher setzen

$$h_{\alpha b} = \frac{\partial \Psi_b}{\partial x^\alpha}.$$

Das Feld ist also aus n Skalaren Ψ_b ableitbar. Wir wählen nun die Koordinaten gemäß der Gleichung

$$\Psi_b = x^b.$$

Dann verschwinden gemäß (7 a) sämtliche $\Delta^\nu_{\alpha\beta}$ und die $h_{\mu a}$ sowie die $g_{\mu\nu}$ sind konstant. —

Da dieser Tensor $\Lambda^\nu_{\alpha\beta}$ zudem offenbar der formal einfachste ist, welchen unsere Theorie zuläßt, so wird an ihn die einfachste Charakterisierung eines solchen Kontinuums anzuknüpfen haben, nicht aber an den komplizierteren Riemannschen Krümmungstensor. Die einfachsten hier in Betracht kommenden Bildungen sind der Vektor

$$\Lambda^\alpha_{\mu\alpha}$$

sowie die Invarianten

$$g^{\mu\nu}\Lambda^\alpha_{\mu\beta}\Lambda^\beta_{\nu\alpha} \text{ und } g_{\mu\nu}g^{\alpha\tau}g^{\beta\tau}\Lambda^\mu_{\alpha\beta}\Lambda^\nu_{\tau\tau}.$$

Aus einer der letzteren (bzw. aus einer aus ihnen gebildeten linearen Kombination) kann durch Multiplikation mit dem invarianten Volumelement

$$h d\tau,$$

wobei h die Determinante $|h_{\mu a}|$, $d\tau$ das Produkt $dx_1 \cdots dx_\mu$ bedeutet, ein invariantes Integral J gebildet werden. Die Setzung

$$\delta J = 0$$

liefert dann 16 Differentialgleichungen für die 16 Größen $h_{\mu a}$.

Ob man auf diese Weise Gesetze von physikalischer Bedeutung erhält, soll später untersucht werden. —

Es ist klärend, die Weylsche Modifikation der Riemannschen Theorie der hier entwickelten gegenüberzustellen:

Weyl: Fernvergleichung weder von Vektorbeträgen noch von Richtungen;
Riemann: Fernvergleichung von Vektorbeträgen, aber nicht von Richtungen;
Vorstehende Theorie: Fernvergleichung von Vektorbeträgen und von Richtungen.

Dem Royal College of Physicians in London zur dreihundertjährigen Gedenkfeier für William Harvey am 14. Mai 1928.

Das Royal College of Physicians feiert an diesem Tage das dreihundertjährige Gedenken an William Harvey. Geboren in Folkestone 1578, studierte Harvey Medizin in Cambridge und übersiedelte mit zwanzig Jahren nach Padua: die Anatomie erlebte damals den ungeheuren Aufschwung, den wir heute kurz als Zeitalter der großen Anatomen zu bezeichnen pflegen. In Padua promovierte William Harvey 1602 als Doktor der Medizin, worauf er nach England zurückkehrte. In der Zeit seines Aufenthalts zu Padua hatte Harvey gewiß Gelegenheit, sich mit den großen Problemen der damaligen Forschung bekannt zu machen, vor allem mit den noch immer ungelöst gebliebenen Fragen des Blutkreislaufs. Jahrzehnte vergingen, ehe Harvey mit den eigenen Arbeiten hervortrat. Erst als Fünfzigjähriger veröffentlichte er die Ergebnisse langjähriger Studien, die mit einem Schlage das Kreislaufproblem des ganzen Körpers lösten. Streng experimentell und auf physiologischer Grundlage entwickelte er die Rolle des Herzens und der Gefäße. Vom Herzen strömt das Blut durch den ganzen Organismus durch die Arterien und gelangt von da durch noch zu erforschende Verbindungen nach den Venen und zum Herzen zurück. Niemand hat Harvey den Lorbeer dieser epochemachenden Entdeckung streitig machen können. Die von ihm erwiesenen Übergänge des Blutes von den Arterien zu den Venen hat man freilich erst vier Jahre nach seinem Tode durch Anwendung des Mikroskops aufgefunden und so die Entdeckung Harveys nochmals bekräftigt.

Auch auf einem völlig anderen Gebiet, auf dem Gebiet der vergleichenden Physiologie, hat Harvey Großes geleistet. In stiller, jahrzehntelanger Arbeit untersuchte Harvey den Vorgang der Fortpflanzung der Tiere. Die Veröffentlichung dieses seines zweiten epochemachenden Werkes mußte dem Dreiundsiebzigjährigen gewissermaßen abgerungen werden. In wenig Worten, in dem bekannten Omne vivum ex ovo, ließ sich die Frucht der mühsamen Forscherarbeit zusammenfassen. Es ist wunderbar, daß ein Mann, der als Arzt im Leben stand, noch Kraft und Muße zur hochbedeutenden Forschung fand.

Nicht der ärztlichen Wissenschaft allein hat Harvey durch seine Entdeckungen gedient, sondern der gesamten Biologie.

Die Akademie der Wissenschaften zu Berlin huldigt dem großen Toten, dessen Werke unvergeßlich bleiben werden.

Berlin, den 14. Mai 1928.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 10. Juli.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XVIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 14. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Fick berichtete über neue Befunde am Kehlsack eines Orang. (Ersch. später.)

Er fand ihn ähnlich wie an dem von ihm 1895 untersuchten »zweiten« Riesenorang ganz ungleich entwickelt. Links war er nur fingerlang, rechts faßte er 6 Liter. Im Kehlkopfinnern fanden sich mächtig vorspringende Keilknorpel. Fick hält den Kehlsack bzw. seine Blähung auf Grund aller von ihm bisher in den zoologischen Gärten von Leipzig, Berlin, Frankfurt und Dresden beobachteten Orangs für ein Schreckmittel gegenüber Feinden, nicht für einen Stimmverstärker.

2. Hr. Planck legte im Namen von Hrn. Einstein dessen Arbeit über Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität vor.

Es wird gezeigt, daß die auf Riemann-Metrik und Fernparallelismus gegründete Feldtheorie, angewandt auf eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, in erster Näherung die bekannten Feldgesetze der Gravitation und des Elektromagnetismus liefern.

Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.

Von A. Einstein.

Vor einigen Tagen habe ich in einer kurzen Abhandlung in diesen Berichten dargelegt, wie sich unter Verwendung eines n-Bein-Feldes eine geometrische Theorie aufstellen läßt, welche auf den Grundbegriffen Riemann-Metrik und Fernparallelismus ruht. Ich ließ zunächst die Frage offen, ob diese Theorie zur Darstellung physikalischer Zusammenhänge dienen könne. Seitdem entdeckte ich, daß diese Theorie — wenigstens in erster Näherung — die Feldgesetze der Gravitation und des Elektromagnetismus ganz einfach und natürlich ergibt. Es ist daher denkbar, daß diese Theorie die ursprüngliche Fassung der allgemeinen Relativitätstheorie verdrängen wird.

Die Einführung des Fernparallelismus bringt es mit sich, daß es gemäß dieser Theorie etwas wie eine gerade Linie gibt, d. h. eine Linie, deren Elemente alle einander parallel sind; eine solche Linie ist natürlich mit einer geodätischen keineswegs identisch. Ferner gibt es im Gegensatz zur bisherigen allgemeinen Relativitätstheorie den Begriff der relativen Ruhe zweier Massenpunkte (Parallelismus zweier Linienelemente, welche zu zwei verschiedenen Weltlinien gehören).

Damit die allgemeine Theorie in der benutzten Form unmittelbar auf die Feldtheorie anwendbar sei, hat man nur folgendes festzusetzen:

1. Die Dimensionszahl ist 4 ($n = 4$).
2. Die vierte Lokalkomponente A_a ($a = 4$) eines Vektors ist rein imaginär, ebenso infolgedessen die Komponenten des vierten Beines des Vier-Beins, also die Größen h_4^ν und $h_{\nu 4}$[1]. Die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ ($= h_{\mu a} h_{\nu a}$) werden dann natürlich alle reell. Das Quadrat des Betrages eines zeitartigen Vektors wählen wir also negativ.

[1] Statt dessen könnte man auch als Quadrat des Betrages des Lokalvektors $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_4^2$ definieren und statt Drehungen des lokalen n-Beins Lorentz-Transformationen einführen. Dann würden die h alle reell, aber es ginge der unmittelbare Anschluß an die Formulierung der allgemeinen Theorie verloren.

§ 1. Das zugrunde gelegte Feldgesetz.

Für aus der Begrenzung eines Gebietes verschwindende Variationen der Feldpotentiale $h_{\mu a}$ (bzw. h^{μ}_{α}) verschwinde die Variation eines HAMILTON-Integrals:

$$\delta\{\int \mathfrak{H} d\tau\} = 0 \ldots \quad (1)$$

$$\mathfrak{H} = h g^{\mu\nu}, \mathbf{\Lambda}_{\mu\beta}^{\alpha}, \mathbf{\Lambda}_{\nu\alpha}^{\beta}, \ldots \quad (1a)$$

wobei die Größen $h\,(=|h_{\mu a}|)$, $g^{\mu\nu}$, $\mathbf{\Lambda}^{\alpha}_{\mu\nu}$ durch die Gleichungen (9), (10) loc cit definiert seien.

Das h-Feld möge gleichzeitig elektrisches und Gravitationsfeld beschreiben. Ein »reines Gravitationsfeld« liege dann vor, wenn außer der Erfüllung der Gleichung (1) auch die Größen

$$\phi_{\mu} = \mathbf{\Lambda}_{\mu\alpha}^{\alpha} \ldots \quad (2)$$

verschwinden, was eine kovariante und drehungsinvariante Einschränkung bedeutet[1].

§ 2. Das Feldgesetz in erster Näherung.

Ist die Mannigfaltigkeit die MINKOWSKI-Welt der speziellen Relativitätstheorie, so kann man das Koordinatsystem so wählen, daß $h_{11} = h_{22} = h_{33} = 1$, $h_{44} = j\ (= \sqrt{-1})$, und daß die übrigen $h_{\mu a}$ verschwinden. Dieses Wertsystem der $h_{\mu a}$ ist für die Rechnung etwas unbequem. Deshalb ziehen wir es vor, bei den Rechnungen dieses § die x_4-Koordinate rein imaginär zu wählen; dann kann nämlich die MINKOWSKI-Welt (Fehlen jeglichen Feldes bei passender Koordinatenwahl) durch

$$h_{\mu a} = \delta_{\mu a} \ldots \quad (3)$$

beschrieben werden. Der Fall unendlich schwacher Felder kann zweckmäßig durch

$$h_{\mu a} = \delta_{\mu a} + k_{\mu a} \ldots \quad (4)$$

dargestellt werden, wobei die $k_{\mu\alpha}$ kleine Größen erster Ordnung sind. Bei Vernachlässigung von Größen dritter und höherer Ordnung hat man dann (1a) mit Rücksicht auf (10) und (7a) loc cit zu ersetzen durch

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial k_{\mu\alpha}}{\partial x_{\beta}} - \frac{\partial k_{\beta\alpha}}{\partial x_{\mu}}\right)\left(\frac{\partial k_{\mu\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial k_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}\right) \ldots \quad (1b)$$

Durch Ausführung der Variation erhält man die in erster Näherung gültigen Feldgleichungen

$$\frac{\partial^2 k_{\beta\alpha}}{\partial x_{\mu}^2} - \frac{\partial^2 k_{\mu\alpha}}{\partial x_{\mu}\partial x_{\beta}} + \frac{\partial^2 k_{\alpha\mu}}{\partial x_{\mu}\partial x_{\beta}} - \frac{\partial^2 k_{\beta\mu}}{\partial x_{\mu}\partial x_{\alpha}} = 0 \ldots \quad (5)$$

---

[1] Hier liegt noch eine gewisse Unbestimmtheit der Deutung vor, da man das reine Gravitationsfeld auch durch das Verschwinden der $\frac{\partial \phi_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \phi_{\nu}}{\partial x_{\mu}}$ charakterisieren könnte.

Es sind dies 16 Gleichungen[1] für die 16 Größen $k_{\alpha\beta}$. Unsere Aufgabe ist nun nachzusehen, ob dies Gleichungssystem die bekannten Gesetze des Gravitationsfeldes und des elektromagnetischen Feldes enthält. Zu diesem Zweck müssen wir in (5) statt der $k_{\alpha\beta}$ die $g_{\alpha\beta}$ und ϕ_α einführen. Wir haben zu setzen

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha a} h_{\beta a} = (\delta_{\alpha a} + k_{\alpha a})\,(\delta_{\beta a} + k_{\beta a})$$

oder in Größen erster Ordnung genau

$$g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \overline{g_{\alpha\beta}} = k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha} \cdots \tag{6}$$

Aus (2) erhält man ferner die Größen erster Ordnung genau

$$2\,\phi_\alpha = \frac{\partial k_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial k_{\mu\mu}}{\partial x_\alpha} \cdots \tag{2a}$$

Durch Vertauschen von α und β in (5) und addieren der so erhaltenen Gliederung zu (5) erhält man nun zunächst

$$\frac{\partial^2 \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2 k_{\mu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 k_{\mu\beta}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} = 0\,.$$

Addiert man zu dieser Gleichung die beiden aus (2a) folgenden Gleichungen

$$-\frac{\partial^2 k_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 k_{\mu\mu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -2\,\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\beta}$$

$$-\frac{\partial^2 k_{\beta\mu}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 k_{\mu\mu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -2\,\frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha},$$

so erhält man mit Rücksicht auf (6)

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial x_\mu^2} + \frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\alpha}}}{\partial x_\mu \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\beta}}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 \overline{g_{\mu\mu}}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha} \cdots \tag{7}$$

Der Fall des Fehlens eines elektromagnetischen Feldes sei durch das Verschwinden der ϕ_μ charakterisiert. In diesem Falle stimmt (7) mit der in der allgemeinen Relativitätstheorie bisher gesetzten Gleichung

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

in den Größen erster Ordnung überein ($R_{\alpha\beta}$ = einmal verjüngter Riemann-Tensor). Dadurch ist bewiesen, daß unsere neue Theorie das Gesetz des reinen Gravitationsfeldes in erster Näherung richtig ergibt.

Durch Differenzieren von (2a) nach x_α erhält man mit Rücksicht auf die durch Verjüngen nach α und β aus (5) resultierende Gleichung

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \cdots \tag{8}$$

[1] Zwischen den Feldgleichungen bestehen natürlich wegen der allgemeinen Kovarianz vier Identitäten. In der hier betrachteten ersten Näherung drückt sich dies dadurch aus, daß die nach dem Index α genommene Divergenz der linken Seite von (5) identisch verschwindet.

Mit Rücksicht darauf, daß die linke Seite $L_{\alpha\beta}$ von (7) die Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(L_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta} L_{\tau\tau}\right) = 0$$

erfüllt, folgt aus (7)

$$\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x_\beta^2} + \frac{\partial^2 \phi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \phi_\tau}{\partial x_\tau}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x_\beta^2} = 0 \ldots \tag{9}$$

Die Gleichungen (8) und (9) zusammen sind bekanntlich den MAXWELLschen Gleichungen für den leeren Raum äquivalent. Die neue Theorie liefert also in erster Näherung auch die MAXWELLschen Gleichungen.

Die Trennung des Gravitationsfeldes und des elektromagnetischen Feldes erscheint aber nach dieser Theorie als künstlich. Auch ist klar, daß die Gleichungen (5) mehr aussagen als die Gleichungen (7), (8) und (9) zusammen. Bemerkenswert ist ferner, daß nach dieser Theorie das elektrische Feld nicht quadratisch in die Feldgleichungen eingeht.

Anmerkung zur Korrektur. Ganz ähnliche Ergebnisse erhält man, wenn man von der HAMILTON-Funktion

$$\mathfrak{H} = h g_{\mu\nu} g^{\alpha\tau} g^{\beta\tau} \Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}_{\sigma\tau}$$

ausgeht. Es besteht also bezüglich der Wahl von $\mathfrak{H}$ einstweilen eine gewisse Unsicherheit.

Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete.

Von Prof. Dr. G. Pólya
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 3. Mai 1928 [s. oben S. 148].)

Ich betrachte in der Ebene der komplexen Zahlen $z = x + iy$ eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{A}$, deren Komplementärmenge $\mathfrak{G}$ ein zusammenhängendes Gebiet ist. Der Punkt $z = \infty$ wird als ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}$ betrachtet.

Es sei zunächst angenommen, daß $\mathfrak{A}$ aus dem abgeschlossenen Innern von endlich vielen punktfremden Jordankurven besteht, die genügend »regulär« sind, um die Lösung folgender Aufgabe zu gestatten: Man bestimme eine harmonische Funktion $u(x, y)$, die in $\mathfrak{G}$, abgesehen vom Punkte $z = \infty$, regulär ist, am Rand von $\mathfrak{A}$ den Wert 0 annimmt und im Unendlichen sich so verhält, daß

$$\lim_{|z| \to \infty} (\log|z| - u(x, y)) = \log \tau$$

endlich ist. Es sei τ die *Robinsche Konstante* von $\mathfrak{A}$ genannt[1]. Ist $\mathfrak{A}$ zusammenhängend (die Begrenzung von $\mathfrak{A}$ *eine* Jordankurve), also $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend, so ist τ bekanntlich der Abbildungsradius von $\mathfrak{G}$, das heißt der Radius desjenigen Kreises, auf dessen Äußere sich $\mathfrak{G}$ eineindeutig und konform, unter Festhaltung des Linienelementes in $z = \infty$, abbilden läßt. Auf diesen Fall bezieht sich der wohlbekannte wichtige Koebe-Bieberbachsche Satz, der besagt, daß *der Abstand irgend zweier Punkte von* $\mathfrak{A}$ 4τ *nicht übertreffen kann.* Ich beweise im folgenden, daß auch in dem Fall, in welchem $\mathfrak{A}$ nicht zusammenhängend, also $\mathfrak{G}$ mehrfach zusammenhängend ist, *die Gesamtlänge des Schattens, den* $\mathfrak{A}$ *auf irgendeine senkrecht beleuchtete Gerade wirft,* 4τ *nicht übertreffen kann.*

Auf Grund der Arbeiten von Faber, Fekete und Szegö[2] kann die Robinsche Konstante für beliebige beschränkte und abgeschlossene Punktmengen folgendermaßen erklärt werden: Es sei $T_n(z) = z^n + \cdots$ das zur Punktmenge

[1] Es wird τ auch als der »transfinite Durchmesser« von $\mathfrak{A}$ bezeichnet, vgl. unter [2]). Es wäre einfacher τ als die *Kapazitätskonstante* von $\mathfrak{A}$ zu bezeichnen, da die Kapazität von $\mathfrak{A}$ gegenüber einem sehr großen Kreis vom Radius r angenähert $= (2(\log r - \log \tau))^{-1}$ ist.

[2] Vgl. insbesondere G. Faber, Münchener Sitzungsberichte, 1920, S. 49—64, M. Fekete, Math. Zeitschrift, 17 (1923) S. 228—249, G. Szegö, Math. Zeitschrift 21 (1924), S. 203—208.

$\mathfrak{A}$ gehörige Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades, das heißt dasjenige Polynom n-ten Grades mit höchstem Koeffizienten 1, dessen Maximalbetrag auf $\mathfrak{A}$ (im folgenden τ_n genannt) von dem Maximalbetrag keines anderen Polynoms von demselben Grad und demselben höchsten Koeffizienten auf derselben Punktmenge unterboten wird. Es existiert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tau_n} = \tau$$

und wird die Robinsche Konstante von $\mathfrak{A}$ genannt. Diese Definition kann mit der vorher gegebenen als gleichbedeutend in dem vorher betrachteten Fall nachgewiesen werden; ferner ist die Robinsche Konstante einer abgeschlossenen Menge, deren $z = \infty$ enthaltende Komplementärmenge einfach zusammenhängend ist, mit dem Abbildungsradius dieser Komplementärmenge identisch. Es besteht nun der Satz:

I. *Das äußere Jordansche Maß der orthogonalen Projektion einer beschränkten und abgeschlossenen ebenen Punktmenge $\mathfrak{A}$ auf eine beliebige Gerade der Ebene kann das Vierfache der Robinschen Konstante von $\mathfrak{A}$ nicht übertreffen.*

Satz I wird sich unmittelbar aus folgendem Satz ergeben[1]:

II. *Es sei $T(z) = z^n + \cdots$ ein Polynom vom Grade $n \geqq 1$ und vom höchsten Koeffizienten 1. Man bezeichne mit $\mathfrak{T}$ die Menge derjenigen komplexen Zahlen z, für welche die Ungleichung*

$$|T(z)| \leqq 2 \tag{1}$$

gilt. Die Gesamtlänge der senkrechten Projektion von $\mathfrak{T}$ auf die reelle Achse ist $\leqq 4$.

Satz II ist leicht auf einen wohlbekannten Satz von Tschebyscheff[2] zurückzuführen.

Es sei nämlich

$$T(z) = (z-c_1)\,(z-c_2)\cdots(z-c_n)$$

$z = x+iy$, $c_\nu = a_\nu + ib_\nu$, x, y, a_ν, b_ν reell, und

$$P(z) = (z-a_1)\,(z-a_2)\cdots\quad(z-a_n).$$

Offenbar ist

$$|P(x)| \leqq |T(x+iy)|;$$

folglich ist

$$|P(x)| \leqq 2 \tag{2}$$

in jedem Punkte x der reellen Achse, der eine senkrechte Projektion eines Punktes $x+iy$ von $\mathfrak{T}$ ist. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$ die Menge derjenigen Punkte x der reellen Achse, für welche die Ungleichung (2) stattfindet; $\mathfrak{P}$ umfaßt nach dem Gesagten die senkrechte Projektion von $\mathfrak{T}$ als Teilmenge.

---

[1]) Aus einem, in anderer Richtung weiter tragenden, kürzlich publizierten Satz von H. Cartan, Comptes Rendus 186 (1928) S. 624 würde sich Satz II mit $4c+\varepsilon$ für großes n (anstatt mit 4 für beliebiges n) ergeben.

[2] Tschebyscheff, Oeuvres, Bd. 1, S. 302.

$\mathfrak{P}$ besteht aus einer endlichen Anzahl von abgeschlossenen, voneinander isolierten Intervallen, in deren Endpunkten

$$P(x) = 2 \quad \text{oder} \quad P(x) = -2$$

ist. Ich behaupte, daß *in jedem isolierten Teilintervall von* $\mathfrak{P}$ *mindestens eine Nullstelle von* $P(x)$ *sich befindet.* Dies ist klar, wenn $P(x)$ an den beiden Endpunkten entgegengesetztes Vorzeichen hat. Wenn aber in beiden Endpunkten des besagten Teilintervalles $P(x) = 2$ ist, so besitzt darin $P(x)$ ein Minimum für $x = \xi$; es ist somit

$$P'(\xi) = 0 \tag{3}$$

und $P''(\xi) \geqq 0$.

a) Wenn $P''(\xi) = 0$ ist, so ist ξ eine mehrfache Wurzel von $P'(x)$ und, da $P(x)$ nur reelle Nullstellen hat, auch von $P(x)$; also ist $P(\xi) = 0$.

b) Wenn

$$P''(\xi) > 0 \tag{4}$$

ist, so ist zu beachten, daß, da $P(x)$ nur reelle Nullstellen hat,

$$P'(x)^2 - P(x)\, P''(x) \geqq 0 \tag{5}$$

für reelles x ist. Es ergibt sich aus (3), (4), (5)

$$P(\xi) \leq 0 .$$

Das heißt, entweder hat $P(x)$ im Punkt ξ eine Nullstelle oder nimmt daselbst ein Vorzeichen an, das dem in den beiden Endpunkten angenommenen Vorzeichen entgegengesetzt ist. Also auf alle Fälle verschwindet $P(x)$ im betrachteten Intervall, und dasselbe können wir auf ähnliche Weise auch dann nachweisen, wenn an beiden Enden des Intervalles $P(x) = -2$ ausfällt.

Das rechtsäußerste, von den übrigen Teilen von $\mathfrak{P}$ isolierte Teilintervall von $\mathfrak{P}$ sei $\mathfrak{J}$ genannt. $\mathfrak{J}$ enthalte m Nullstellen von $P(x)$; mehrfache Nullstellen sind mit richtiger Vielfachheit zu rechnen. Nach dem eben bewiesenen ist $m \geqq 1$, ferner ist dann, und nur dann $m = n$, wenn $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{P}$ identisch ist. Ich betrachte im folgenden neben $P(x)$ noch andere Polynome $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\cdots$, die alle den Grad n, den höchsten Koeffizienten 1 und nur reelle Nullstellen haben; es sollen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{J}_1$, m_1 zu $P_1(x)$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{J}_2$, m_2 zu $P_2(x)$, $\cdots$ ebenso zugeordnet sein wie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{J}$, m zu $P(x)$.

Wenn $m < n$ *ist, gibt es ein Polynom* $P_1(x)$, *so beschaffen, daß* $m_1 > m$ *und zugleich die Gesamtlänge von* $\mathfrak{P}_1$ *größer als die von* $\mathfrak{P}$ *ist.* In der Tat sei

$$P(x) = Q(x)\, R(x),$$

und zwar soll das Polynom $Q(x) = x^m + \cdots$ die in $\mathfrak{J}$ gelegenen, das Polynom $R(x) = x^{n-m} + \cdots$ die übrigen Nullstellen von $P(x)$ aufnehmen. Der Abstand zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{P} - \mathfrak{J}$ sei d; nach Voraussetzung ist $d > 0$. Ich setze

$$P_1(x) = Q(x + d)\, R(x).$$

Wenn x in $\mathfrak{P}-\mathfrak{J}$ liegt, ist

$$|Q(x+d)|<|Q(x)|$$

(Verkleinerung aller Linearfaktoren um d), also

$$|P_1(x)| = |Q(x+d)\ R(x)| \leqq |P(x)| \leqq 2\,, \tag{6}$$

so daß $\mathfrak{P}-\mathfrak{J}$ als Teilmenge zu $\mathfrak{P}_1$ gehört. In der ersten Ungleichung unter (6) gilt das Zeichen $<$, wenn x keine Nullstelle von $R(x)$ ist, also insbesondere im linken Endpunkt von $\mathfrak{P}-\mathfrak{J}$, so daß $\mathfrak{P}_1$ über $\mathfrak{P}-\mathfrak{J}$ links hinausragt. Wenn x in $\mathfrak{J}$ liegt, findet man ähnlicherweise, daß

$$|P_1(x-d)| = |Q(x)\ R(x-d)| \leqq |P(x)| \leqq 2\,,$$

und hieraus folgt, daß dasjenige Intervall $\mathfrak{J}'$, das aus $\mathfrak{J}$ durch Verschiebung um d nach links entsteht, zu $\mathfrak{P}_1$ gehört. $\mathfrak{J}_1$ umfaßt also neben $\mathfrak{J}'$ das links daran anstoßende Teilintervall von $\mathfrak{P}-\mathfrak{J}$, folglich mindestens eine Nullstelle von $R(x)$, und somit mehr als m Nullstellen von $P_1(x)$; $\mathfrak{P}_1$ umfaßt $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{P}-\mathfrak{J}$, ragt über letzteres nach links hinaus, hat also eine größere Gesamtlänge als $\mathfrak{P}$.

Durch l-malige Wiederholung dieses Schlusses ($l \leqq n-1$) können wir ein Polynom $P_l(x)$ konstruieren, so beschaffen, daß $\mathfrak{J}_l$ alle Nullstellen von $P_l(x)$ enthält, also daß $\mathfrak{J}_l = \mathfrak{P}_l$ ist, und daß die Länge des Intervalles $\mathfrak{P}_l$ nicht kleiner als die Gesamtlänge von $\mathfrak{P}$ ist. Nun ist aber nach dem Satz von Tschebyscheff a. a. O.[1] die Länge von $\mathfrak{P}_l$ nicht größer als 4. Woraus Satz II folgt.

Aus Satz II folgt Satz I auf demselben Weg, den G. Faber[2] zur Herleitung des Koebe-Bieberbachschen Satzes aus dem Tschebyscheffschen angegeben hat: Es sei, wie vorher, $T_n(z)$ das zu $\mathfrak{A}$ gehörige Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades, und die Robinsche Konstante von $\mathfrak{A}$ sei τ. Dann ist, für genügend großes n,

$$|T_n(z)| < (\tau+\varepsilon)^n,$$

wenn z in $\mathfrak{A}$ liegt, also, wenn wir

$$T_n\big(z\,(\tau+\varepsilon)\big)\ (\tau+\varepsilon)^{-n} = z^n + \cdots = T(z)$$

setzen,

$$|T(z)| < 1 < 2 \tag{7}$$

in einer Punktmenge $\mathfrak{A}^*$, die aus $\mathfrak{A}$ durch Ähnlichkeitstransformation entsteht, wobei die linearen Abmessungen von $\mathfrak{A}^*$ zu denen von $\mathfrak{A}$ sich wie 1 zu $\tau+\varepsilon$ verhalten. Das Gebiet, worin (7) stattfindet, besteht aus höchstens n getrennten Stücken, deren orthogonale Projektion auf die reelle Achse höchstens aus

---

[1] Tschebyscheff, Oeuvres, Bd. 1, S. 302.

[2] A. a. O.[2] vgl. S. 57—58.

n Geradenstücken besteht und gemäß Satz II eine Gesamtlänge ≤ 4 hat. Also ist die Projektion von $\mathfrak{A}$ auf die reelle Achse in endlich viele Intervalle von Gesamtlänge $< 4(\tau + \varepsilon)$ eingeschlossen, wobei ε beliebig klein. W. z. b. w.

Die in Satz II angegebene Grenze 4 kann für jeden Grad n erreicht werden, und zwar, abgesehen von Bewegungen der Ebene, nur für ein Polynom, wie man aus dem zitierten Tschebyscheffschen Satz und aus dem hier gegebenen Beweis leicht erkennt. Wie bekannt, ist die in Satz I gegebene Grenze 4 erreicht, wenn $\mathfrak{A}$ aus einer geradlinigen Strecke besteht.

Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern.

Von Dr. Eberhard Hopf
in Berlin-Dahlem.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 3. Mai 1928 [s. oben S. 148].)

Der Zweck dieser Arbeit ist die systematische Ausnutzung einer einfachen, bei linearen Integraloperatoren mit positivem Kern gültigen Schlußweise. Die Anwendung auf nichtsinguläre Integralgleichungen mit positivem Kern ergibt in § 1 einen neuen Beweis eines Satzes von R. Jentzsch. § 2 enthält unter anderem eine Bemerkung (Satz 4), die in manchen Fällen Lösungen singulärer Integralgleichungen mit positivem Kern aufzufinden gestattet. Wir machen von dieser Bemerkung in § 3 eine spezielle Anwendung auf singuläre Integralgleichungen der Form

$$u(x) = \lambda \int_0^\infty H(|x-t|)\, u(t)\, dt\,, \quad H > 0.$$

Unter gewissen Voraussetzungen über das Verhalten von $H(\xi)$ für große ξ ergibt sich die Existenz von Eigenwerten.

Wir haben, um Wesentliches mehr hervortreten zu lassen, eine abstrakte Form der Darstellung gewählt. Es sei etwa I ein Intervall auf der Geraden (endlich oder unendlich, abgeschlossen oder nicht abgeschlossen), $\mathfrak{M}$ eine lineare Mannigfaltigkeit von Funktionen $u(x)$, die in allen Punkten von I stetig sind. $\mathfrak{M}$ enthalte wenigstens eine auf I ständig positive Funktion $\hat{u}(x)$; mit jeder positiven Funktion $\hat{u}(x)$ aus $\mathfrak{M}$ gehöre auch jede in I stetige und der Bedingung $|u| \leqq \hat{u}$ genügende Funktion $u(x)$ zu $\mathfrak{M}$. $L(u)$ sei ein Funktionaloperator, der jeder Funktion $u(x)$ aus $\mathfrak{M}$ eindeutig eine in I stetige Funktion $v(x) = L(u)$ zuordnet, und der folgende Eigenschaften besitzt:

1. Linearität. Sind c_1 und c_2 Konstanten, so ist stets

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2).$$

2. Positivität. Es ist überall auf I

$$L(u) > 0, \text{ wenn } u(x) \geqq 0,\ u(x) \not\equiv 0 \text{ ist.}$$

Eine einfache Folge von 1. und 2., die im folgenden durchgehends benutzt wird, ist:

$$L(u) \leqq L(U) \text{ in } I, \text{ wenn } u \leqq U \text{ in } I \text{ ist;}$$

Das Gleichheitszeichen kann nur dann irgendwo gelten, wenn $u \equiv U$ ist.

Eine weitere Folge ist die Ungleichung

$$|L(u)| \leqq L(|u|),$$

denn es ist $L(|u|) \geqq L(u)$ und $L(|u|) \geqq -L(u) = L(-u)$; das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann an einer Stelle, wenn entweder $|u| \equiv u$ oder $|u| \equiv -u$, u also von einerlei Vorzeichen ist. Ein ähnlicher Sachverhalt besteht, wenn man komplexe Werte für u zuläßt, $u = u_1 + iu_2$, $L(u_1 + iu_2) = L(u_1) + i\,L(u_2)$ gesetzt. Die obige Ungleichung, der man hier die Form $L^2\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right) \geqq L^2(|u_1|) + L^2(|u_2|)$ geben kann, folgt dann durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung $L^2(fg) \leqq L(f^2) \cdot L(g^2)$ auf die Funktionen $f = \sqrt{|u| + |u_1|}$, $g = \sqrt{|u| - |u_1|}$. Das Gleichheitszeichen kann nur dann irgendwo gelten, wenn $g \equiv$ const. f, also $u \equiv$ const. $\cdot\,|u|$ ist.

§ 1. Nichtsinguläre Integralgleichungen mit positivem Kern.

Das Intervall I wird in diesem Paragraphen als endlich und abgeschlossen vorausgesetzt. In diesem Falle gehört mit einer in I positiven Funktion $\hat{u}$ auch die (positive) Konstante Min $(\hat{u})$ zu $\mathfrak{M}$. Also gehört jede Konstante zu $\mathfrak{M}$, somit überhaupt jede auf I stetige Funktion (wegen ihrer Beschränktheit).

Die Stetigkeit des Operators $L(u)$ ist dann eine Folge der Eigenschaften 1. und 2. Ist nämlich $u_\nu(x) \to u(x)$ eine in I gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, so ist $|L(u_\nu) - L(u)| = |L(u_\nu - u)| \leqq L(|u_\nu - u|) \leqq \text{Max}\,|u_\nu - u| \cdot L(1)$, woraus folgt, daß gleichmäßig auf I $L(u_\nu) \to L(u)$ ist.

Schließlich ist zu verlangen:

3. Ist u_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von auf I stetigen und gleichmäßig beschränkten Funktionen, so enthält die Folge der Funktionen $L(u_\nu)$ stets eine in I gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Die Eigenschaften 1. und 3. kommen bekanntlich den nichtsingulären Integraloperatoren $L(u) = \int_I K(x, y)\, u(y)\, dy$ zu[1]. 2. ist stets erfüllt, wenn der Kern K positiv ist.

Von der linearen Funktionalgleichung

$$(\mathfrak{L}) \qquad u = \lambda L(u)$$

gilt unter den Voraussetzungen 1.—3. der

Satz von Jentzsch[2]. Der absolut kleinste Eigenwert der Gleichung $(\mathfrak{L})$ ist stets positiv und einfach. Die zugehörige Eigenfunktion ist überall von Null verschieden.

---

[1] Ist $M > 0$ eine feste Schranke, so sind unter der Bedingung $|u| \leqq M$ in I die Funktionen $v(x) = \int_I K(x, y)\, u(y)\, dy$ gleichgradig stetig in I, woraus sich die Eigenschaft 3. mit Hilfe eines bekannten Auswahlsatzes ergibt.

[2] R. Jentzsch, Über Integralgleichungen mit positivem Kern. Crelles Journal, Bd. 141, p. 235—244.

Beweis: Wir zeigen in gleicher Reihenfolge wie Jentzsch zunächst, daß es überhaupt einen positiven Eigenwert $\bar{\lambda}$ und eine ständig positive, zu ihm gehörige Eigenfunktion $\bar{u}(x)$ gibt, sodann, daß $\bar{\lambda}$ der absolut kleinste Eigenwert ist, und daß $\bar{u}$ im wesentlichen die einzige Eigenfunktion mit $\bar{\lambda}$ als Eigenwert ist.

Beim Existenzbeweise machen wir Gebrauch von der Ungleichung

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Max}\frac{u}{L(u)} > \operatorname{Max}\frac{L(u)}{L(L(u))},$$

wenn $u \geqq 0$ und $\dfrac{u}{L(u)}$ nicht konstant ist.

In der Tat ist $L(u) = L\left(\dfrac{u}{L(u)} \cdot L(u)\right) \leqq L(L(u)) \cdot \operatorname{Max}\dfrac{u}{L(u)}$ nach 1. und 2.;

das Gleichheitszeichen kann nur dann irgendwo stehen, wenn im Intervalle I $u = \text{const.}\, L(u)$ ist. Wir betrachten nun die Folge der auf I positiven, stetigen Funktionen

$$\text{(2)} \qquad u_n = \lambda_n L(u_{n-1}); \quad u_0 > 0 \text{ in } I, \quad \lambda_n = \frac{1}{\operatorname{Max} L(u_{n-1})}.$$

Die Anwendung von (1) ergibt leicht

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Max}\frac{u_n}{L(u_n)} \geqq \operatorname{Max}\frac{L(u_n)}{L(L(u_n))} = \operatorname{Max}\frac{u_{n+1}}{L(u_{n+1})}.$$

Die Folge der positiven Zahlen $M_n = \operatorname{Max}\dfrac{u_n}{L(u_n)}$ ist daher monoton fallend. Somit ist

$$\text{(4)} \qquad M_n = \operatorname{Max}\frac{u_n}{L(u_n)} \to M, \; n \to \infty.$$

Weiter ist nach (2) $\operatorname{Max}(u_\nu) = 1$ und daher

$$\lambda_n = \frac{\operatorname{Max} u_{n-1}}{\operatorname{Max} L(u_{n-1})} \leqq \operatorname{Max}\frac{u_{n-1}}{L(u_{n-1})} = M_{n-1} \leqq M_0.$$

d. h. die Zahlen λ_n bilden eine beschränkte Folge. Mit Rücksicht auf die Eigenschaft 3. können wir eine Folge von Indizes n' derart wählen, daß $\lim \lambda_{n'} = \bar{\lambda}$ existiert, und daß die Funktionen $L(u_{n'-1})$ gleichmäßig in I konvergieren. Nach (2) ist $\lim\limits_{n'=\infty} u_{n'} = \bar{u}$ vorhanden mit gleichmäßiger Konvergenz; es ist $\bar{u} \geqq 0$ und $\operatorname{Max}\bar{u} = \lim \operatorname{Max} u_{n'} = 1$, $\bar{u}$ verschwindet also nicht identisch. Betrachten wir nun die Ungleichung (3) für die speziellen Indizes n', so liefert der Grenzübergang $n' \to \infty$ mit Rücksicht auf (4) die Gleichung

$$\operatorname{Max}\frac{\bar{u}}{L(\bar{u})} = \operatorname{Max}\frac{L(\bar{u})}{L(L(\bar{u}))} = M,$$

aus der sich nach (1) eine Gleichung

$$\text{(5)} \qquad \bar{u} = \bar{\lambda} \cdot L(\bar{u})$$

ergibt. Wegen $\bar{u} \geqq 0$ und der Positivität des Operators L ist nach (5) sogar $\bar{u} > 0$ in I. $\bar{\lambda}$ ist somit ein positiver Eigenwert der Gleichung (Ω) und $\bar{u}$ eine zugehörige positive Eigenfunktion.

Es sei nun λ irgendein der Bedingung $|\lambda| \leqq \bar{\lambda}$ genügender Eigenwert der Gleichung (Ω). Dann folgt aus $u = \lambda L(u)$ zunächst

$$|u| \leqq \bar{\lambda} L(|u|); \tag{6}$$

an einer Stelle, wo hier das Gleichheitszeichen gilt, muß auch $|L(u)| = L(|u|)$ sein, also, wie aus dem in der Einleitung Gesagten folgt, $u \equiv \text{const.} |u|$ sein. Nun folgt aber aus (5) und (6)

$$|u| \leqq \bar{\lambda} L\left(\frac{|u|}{\bar{u}} \cdot \bar{u}\right) \leqq \bar{\lambda} \cdot L(\bar{u}) \cdot \operatorname{Max} \frac{|u|}{\bar{u}} = \bar{u} \operatorname{Max} \frac{|u|}{\bar{u}}.$$

Nun muß hier an derjenigen Stelle, wo $\frac{|u|}{\bar{u}} = \operatorname{Max} \frac{|u|}{\bar{u}}$ ist, überall das Gleichheitszeichen stehen. Aus der Gleichheit der beiden mittleren Glieder folgt notwendig, daß $|u| \equiv \bar{u} \cdot \operatorname{Max} \frac{|u|}{\bar{u}}$ sein muß. Da ferner auch in (6) das Gleichheitszeichen stehen muß, ist notwendigerweise $u \equiv \text{const.} \cdot \bar{u}$, somit $\lambda = \bar{\lambda}$. Damit ist gezeigt, daß ein der Bedingung $|\lambda| \leqq \bar{\lambda}$ genügender Eigenwert λ der Gleichung (Ω) nicht verschieden von $\bar{\lambda}$ sein kann, und daß $u = \text{const.} \cdot \bar{u}$ die einzigen Lösungen der Gleichung $u = \bar{\lambda} L(u)$ sind, was zu beweisen war.

Korollar. Ist $L(u)$ ein nichtsingulärer Integraloperator

$$L(u) = \int_I K(x, y)\, u(y)\, dy,$$

mit etwa stetigem und positivem Kern, so gilt nach Jentzsch noch folgendes: Der absolut kleinste Eigenwert $\lambda = \bar{\lambda}$ der Integralgleichung $u = \lambda L(u)$ ist eine einfache Nullstelle der zugehörigen Fredholmschen Determinante $D(\lambda)$. Wäre nämlich $\lambda = \bar{\lambda}$ eine n-fache Wurzel von $D(\lambda) = 0$ $(n \geqq 2)$, so gäbe es ein System von genau n linear unabhängigen, zum Eigenwert $\bar{\lambda}$ gehörigen Hauptfuntionen[1]. Die kanonische Darstellung[1] dieses Systems von Hauptfunktionen $u_{11}, u_{12}, \cdots u_{1\alpha}; u_{21}, \cdots, u_{2\beta}; \cdots$ $(\alpha + \beta + \cdots = n)$ lautet:

$$\begin{aligned}
u_{11} &= \bar{\lambda} L(u_{11}) \\
u_{11} + u_{12} &= \bar{\lambda} L(u_{12}) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
u_{1\alpha-1} + u_{1\alpha} &= \bar{\lambda} L(u_{1\alpha}); \\
u_{21} &= \bar{\lambda} L(u_{21}) \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

[1] Vgl. l. c. Jentzsch p. 236—237.

Da $\bar{\lambda}$ ein einfacher Eigenwert ist, muß hier $n = \alpha \geqq 2$ sein. Der zweiten Gleichung könnte man dann wegen $u_{11} > 0$ die Form

$$1 + \frac{u_{12}}{u_{11}} = \bar{\lambda} L\left(u_{11} \frac{u_{12}}{u_{11}}\right) \cdot \frac{1}{u_{11}}$$

geben. Setzen wir $\mu = \operatorname{Max} \frac{u_{12}}{u_{11}}$, so würde hieraus $1 + \mu \leqq \mu$ folgen. Also ist die Annahme $n \geqq 2$ falsch, somit ist $n = 1$, w. z. b. w.

Die obigen Überlegungen beruhen lediglich auf den Eigenschaften 1. und 2. des Operators L (abgesehen von dem Existenzbeweise, der wesentlich die Eigenschaft 3. voraussetzt).

§ 2. Bemerkungen über singuläre Integralgleichungen mit positivem Kern.

Lassen wir die Forderung der Abgeschlossenheit von I fallen, so gelten im allgemeinen die obigen Schlüsse nicht mehr, da dann der Operator $L(u)$ ein singulärer Operator sein kann. Einige einfache Bemerkungen, die auch in diesem Falle gültig sind, und die im wesentlichen auf der Linearität und Positivität des Operators L beruhen, mögen hier Platz finden. Eine der Voraussetzung 3. von § 1 analoge Voraussetzung machen wir hier nicht. Als Intervall I legen wir etwa das Intervall

$$I: 0 \leqq x < \infty$$

zugrunde. Von allen im Wortlaut der folgenden Sätze auftretenden Funktionen setzen wir die Zugehörigkeit zu einer eingangs beschriebenen Funktionenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ voraus. Alle übrigen in diesem Paragraphen vorkommenden Funktionen sind dann stets in $\mathfrak{M}$ enthalten.

Satz 1. Ist in I überall $f > 0$, $f \geqq L(f)$, ist ferner $g \leqq L(g)$ in I, so kann nur dann $\lim\limits_{x=\infty} \sup \frac{g}{f} \leqq 0$ sein, wenn entweder $g \equiv 0$, oder ständig $g < 0$ in I ist.

Beweis: Wäre irgendwo $g > 0$, so müßte die Funktion $\frac{g}{f}$ wegen $\lim\limits_{x=\infty} \sup \frac{g}{f} \leqq 0$ ihr (positives) Maximum irgendwo im Endlichen annehmen. Dann wäre

$$g \leqq L\left(f \cdot \frac{g}{f}\right) \leqq L(f) \cdot \operatorname{Max} \frac{g}{f} \leqq f \cdot \operatorname{Max} \frac{g}{f}.$$

An der Stelle, wo $\frac{g}{f}$ sein Maximum erreichte, müßte hier durchweg das Gleichheitszeichen stehen. Aus der Gleichheit der beiden mittleren Glieder würde aber $g \equiv f \cdot \operatorname{Max} \frac{g}{f}$ folgen, was wegen $\operatorname{Max} \frac{g}{f} > 0$ einen Widerspruch mit der

Voraussetzung $\lim_{x=\infty} \sup \frac{g}{f} \leqq 0$ ergäbe. Also ist $g \leqq 0$ überall in I. Es genügt dann die Funktion $g^* = -g$ den Ungleichungen $g^* \geqq 0$, $g^* \geqq L(g^*)$. Wäre irgendwo $g^* = 0$, so wäre dort auch $L(g^*) = 0$, was nur sein kann, wenn $g^* \equiv 0$ ist. Ist dies nicht der Fall, so ist notwendig überall $g^* > 0$, also $g < 0$.

Eine Folge von Satz 1. ist

Satz 2. Gibt es eine in I positive und der Ungleichung $L(f) \leqq f$ genügende Funktion f, so ist eine Lösung $u(x)$ $(u \not\equiv 0)$ der Gleichung

$$u = L(u)$$

entweder immer von gleichem Zeichen und niemals Null, oder sie nimmt für beliebig große x Werte beiderlei Vorzeichens an.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß eine nicht identisch verschwindende Lösung $u(x)$ von $u = L(u)$ ständig positiv sein muß, wenn $u(x) \geqq 0$ für $x \geqq x_0$ ist. Dies folgt unmittelbar durch Anwendung von Satz 1. auf die Funktion $g = -u$.

Eine weitere Folge von Satz 1. ist

Satz 3. Ist $u(x)$ eine in I positive Lösung der Funktionalgleichung

$$u = L(u),$$

so gibt es keine der Bedingung $\lim_{x=\infty} \frac{v}{u} = 0$ genügende weitere Lösung $v(x)$ dieser Gleichung außer $v(x) \equiv 0$.

Beweis: Aus $v = L(v)$ folgt $|v| \leqq L(|v|)$. Satz 3. ergibt sich sofort durch Anwendung des Satzes 1. auf die Funktionen $f = u$, $g = |v| \geqq 0$.

Dem Satz 4. und seinem Beweise schicken wir das folgende Lemma voraus:

Lemma. Ist überall in I $f > L(f) > 0$, $g \geqq L(g) > 0$ und $\lim_{x=\infty} \frac{g}{f} = 0$, so ist gleichmäßig in jedem endlichen x-Intervalle $L_n(g) \to 0$ für $n \to \infty$. (Unter L_n den n-ten iterierten Operator von L verstanden[1]).

Beweis: Wegen $L(g) \leqq g$ und wegen den Voraussetzungen 1. und 2. bilden die Funktionen $L_n(g)$ eine monoton absteigende Folge stetiger positiver Funktionen, $L_{n+1}(g) \leqq L_n(g)$. Die Maxima M_n der Funktionen $\frac{L_n(g)}{f}$ bilden demnach eine monoton fallende Zahlenfolge. Wir haben zu beweisen, daß $\lim_{n=\infty} M_n = 0$ ist. Die Funktion $\frac{L_n(g)}{f}$ nimmt, da $\frac{L_n(g)}{f} \leqq \frac{g}{f} \to 0$ für $x \to \infty$ ist, ihr Maximum M_n an einer endlichen Stelle x_n an. Es ist dann

$$M_n = \operatorname{Max} \frac{L_n(g)}{f} = \frac{L_n(g)}{f}\Big|_{x=x_n} \leqq \frac{g(x_n)}{f(x_n)}.$$

[1] Es ist $L_0(g) = g$, $L_1(g) = L(g)$, $\cdots$, $L_n(g) = L(L_{n-1}(g))$, $\cdots$.

Ist nun die Folge der x_n nicht beschränkt, so gibt es hiernach wegen $\lim_{x=\infty} \frac{g}{f} = 0$ beliebig kleine M_n, woraus $\lim_{n=\infty} M_n = 0$ folgt. Es bleibt also noch der Fall zu behandeln, daß alle x_n in einem festen Intervalle $0 \leqq x_n \leqq \bar{x}$ gelegen sind. Dann ist zunächst

$$M_{n+1} = \frac{1}{f} \cdot L\left(f \cdot \frac{L_n(g)}{f}\right)\Bigg|_{x=x_{n+1}} \leqq M_n \cdot \frac{L(f)}{f}\Bigg|_{x=x_{n+1}}.$$

Wegen $L(f) < f$ ist der größte Wert ϑ, den die stetige Funktion $\frac{L(f)}{f}$ im Intervalle $\langle 0, \bar{x}\rangle$ annimmt, kleiner als Eins. Daraus folgt aber $M_{n+1} \leqq \vartheta M_n$, somit $M_n \leqq \vartheta^n M_0$ und speziell $M_n \to 0$ für $n \to \infty$, womit das Lemma bewiesen ist.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit dem

Satz 4. Ist in I $\phi \leqq L(\phi)$, $\Phi \geqq L(\Phi)$, $0 \leqq \phi < \Phi$, und ist die Bedingung $\lim_{x=\infty} \frac{\phi}{\Phi} = 1$ erfüllt, so liegt zwischen ϕ und Φ genau eine Lösung u der Gleichung

$$u = L(u).$$

u ist die gemeinsame Grenzfunktion der beiden Funktionenfolgen $L_n(\phi)$ und $L_n(\Phi)$, $n = 0, 1, \cdots$.

Beweis: Die Funktionen $L_n(\phi)$ bilden wegen $\phi \leqq L(\phi)$ eine monoton aufsteigende, die Funktionen $L_n(\Phi)$ wegen $\Phi \geqq L(\Phi)$ eine absteigende Folge stetiger Funktionen. Überdies ist stets

$$L_n(\Phi) - L_n(\phi) = L_n(\Phi - \phi) > 0 \text{ in } I. \tag{7}$$

Zunächst sei noch folgendes bemerkt: ϕ und Φ können nicht beide zugleich Lösungen von $u = L(u)$ sein, da sonst $v = \Phi - \phi$ eine (positive) Lösung mit der Eigenschaft $\lim_{x=\infty} \frac{v}{\Phi} = 0$ wäre, im Widerspruch zu Satz 3. Es ist also, $g = \Phi - \phi$ gesetzt, $L(g) \leqq g$, aber nicht $\equiv g$; wegen der Positivität des Operators L ist dann, $g_1 = L(g)$ gesetzt, $L(g_1) < g_1$. Setzen wir $f = \Phi + g_1$, so ist auch ständig $L(f) < f$ in I. Nun ist $(g = \Phi - \phi)$ $\lim_{x=\infty} \frac{g}{\Phi} = 0$ wegen der Voraussetzung, also auch wegen $f > \Phi$

$$\lim_{x=\infty} \frac{g}{f} = 0, \quad L(g) \leqq g, \quad 0 < L(f) < f.$$

Nach dem obigen Lemma ist dann notwendig $L_n(g) = L_n(\Phi) - L_n(\phi) \to 0$ für $n \to \infty$, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen x-Intervalle. Wegen der Monotoneität der Funktionenfolgen $L_n(\phi)$ und $L_n(\Phi)$ und wegen (7) konvergieren daher die $L_n(\phi)$ von unten, die $L_n(\Phi)$ von oben gegen eine gemeinsame Grenzfunktion $u(x)$, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle; $u(x)$ ist somit stetig in I.

Daß $u(x)$ der Gleichung $u = L(u)$ genügt, sieht man so ein. Offenbar ist

$$L_{n+1}(\phi) = L\big(L_n(\phi)\big) \leqq L(u) \leqq L\big(L_n(\Phi)\big) = L_{n+1}(\Phi),$$

und daher wegen $\lim L_{n+1}(\phi) = \lim L_{n+1}(\Phi) = u$ auch $u \equiv L(u)$.

Ist v irgendeine stetige Funktion mit $\phi \leqq v \leqq \Phi$, so ist für alle $n = 1, 2, \cdots$ wegen der Positivität des Operators L

$$L_n(\phi) \leqq L_n(v) \leqq L_n(\Phi).$$

Daher ist auch

$$\lim_{n=\infty} L_n(v) = u$$

gleichmäßig in jedem endlichen x-Intervalle.

Korollar. Mit der in Satz 4. angegebenen Methode zur Auffindung positiver Lösungen von $u = L(u)$ wird man übrigens nur bei singulären Integralgleichungen Erfolg haben können. Im nichtsingulären Fall führt sie auf Trivialitäten. Ist nämlich I ein abgeschlossenes endliches Intervall und gibt es zwei in I stetige Funktionen ϕ und Φ, die den Ungleichungen

$$\phi \leqq L(\phi), \quad \Phi \geqq L(\Phi), \quad \phi < \Phi \text{ in } I$$

genügen, so können nur die folgenden zwei Fälle eintreten:

1. Die Gleichung $u = L(u)$ besitzt nur die triviale Lösung $u \equiv 0$.

2. ϕ und Φ sind beide bereits Lösungen von $u = L(u)$.

Offenbar genügt $g = \Phi - \phi$ in I den Ungleichungen $g > 0$, $g \geqq L(g)$. 1. Ist nun nicht $g \equiv L(g)$, so besitzt die Gleichung $u = L(u)$ nur die triviale Lösung $u \equiv 0$; denn wäre u eine Lösung, die z. B. auch positive Werte annimmt, so wäre $u = L\left(g \cdot \frac{u}{g}\right) \leqq \operatorname{Max}\left(\frac{u}{g}\right) \cdot L(g) \leqq g \cdot \operatorname{Max}\frac{u}{g}$. Hieraus würde, da hier an der Stelle, wo $\frac{u}{g} = \operatorname{Max}\frac{u}{g}$ ist, das Gleichheitszeichen stehen muß, in geläufiger Weise $u = \text{const.} \cdot g$ folgen. Dann wäre aber $g \equiv L(g)$ im Gegensatze zur Annahme $g \not\equiv L(g)$. 2. Ist $g \equiv L(g)$, so ist

$$0 = g - L(g) = \big[\Phi - L(\Phi)\big] + \big[L(\phi) - \phi\big].$$

Also sind, da beide Summanden $\geqq 0$ sind, ϕ und Φ Lösungen der Gleichung $u = L(u)$.

§ 3. Anwendungen auf singuläre Integralgleichungen der Form

$$u(x) = \lambda \int_0^\infty H(|x-t|)\, u(t)\, dt.$$

Ehe wir zu Anwendungen der Sätze von § 2 übergehen, seien noch einige Bemerkungen über die singuläre Integralgleichung

$$u(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} H(|x-t|)\, u(t)\, dt \tag{8}$$

vorausgeschickt. Unter ihren Eigenfunktionen treten bekanntlich Exponentialfunktionen auf. $u(x) = e^{\alpha x}$ ist eine Lösung von (8), wenn zwischen α und λ die Relation

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(\alpha)} = \int_0^\infty H(t)\,(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})\,dt \tag{9}$$

besteht, die Existenz des rechtsstehenden Integrals vorausgesetzt. Mit $e^{\alpha x}$ ist dann auch $e^{-\alpha x}$ Lösung von (8).

Wir machen nun über den Kern die

Voraussetzung. $H(t)$ ist eine für $t \geqq 0$, abgesehen von etwa endlich vielen Stellen, positive und stetige Funktion. Es gibt eine Konstante A mit $0 < A \leqq +\infty$ derart, daß das Integral auf der rechten Seite von (9) für alle positiven $\alpha < A$ konvergiert, für $\alpha = A$ divergiert.

Wegen (9) ist dann $\lambda(\alpha)$ eine im Intervalle $0 \leqq \alpha < A$ monoton abnehmende stetige Funktion mit $\lambda(A) = 0$, $\lambda(0) = \dfrac{1}{2\int_0^\infty H\,dt}$. Zu vorgegebenem λ mit $0 < \lambda \leqq \lambda(0)$ gibt es daher genau ein der Beziehung (9) genügendes $\alpha = \alpha(\lambda) \geqq 0$. Die zugehörigen Lösungen von (8) kann man auch in der Form $e^{\alpha x}$, $\dfrac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2\alpha}$ schreiben. Für $\lambda = \dfrac{1}{2\int_0^\infty H dt}$ ergibt das die Lösungen 1 und x. Für $\lambda > \dfrac{1}{2\int_0^\infty H dt}$ kommen nur imaginäre Werte von α in Frage.

Im folgenden studieren wir nicht die Gleichung (8), sondern die analoge Integralgleichung

$$u(x) = \lambda \int_0^\infty H(|x-t|)\,u(t)\,dt. \tag{10}$$

Sie besitzt nicht wie (8) unmittelbar angebbare Eigenfunktionen. Jedoch werden sich hier für das Parameterintervall

$$0 < \lambda < \lambda(0) = \frac{1}{2\int_0^\infty H\,dt} \tag{11}$$

und auch für $\lambda = \lambda(0)$ ähnliche Verhältnisse ergeben wie bei der Gleichung (8). Als Funktionenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ nehmen wir hier etwa die Menge aller für $x \geqq 0$ stetigen Funktionen $u(x)$, die einer Bedingung $u(x) = O(e^{\beta x})$ mit beliebigem $\beta \leqq A$ genügen. Mit $u(x)$ ist dann auch

$$L(u) = \lambda \int_0^\infty H(|x-t|)\,u(t)\,dt = \lambda \int_{-x}^\infty H(|t|)\,u(x+t)\,dt$$

eine stetige Funktion für $x \geqq 0$. Wir beweisen dann den Satz:

Jeder der Bedingung (11) genügende Wert von λ ist ein Eigenwert der Integralgleichung (10). Es gibt eine zum Eigenwert λ gehörige Eigenfunktion $u(x)$ mit der Eigenschaft

$$e^{\alpha x} - 1 \leqq u(x) \leqq e^{\alpha x} \text{ für } x \geqq 0 .$$

Hierbei ist $\alpha = \alpha(\lambda) > 0$ durch (9) bestimmt.

Ist (11) erfüllt, dann gibt es genau ein $\alpha > 0$, welches der Gleichung (9 genügt. Für die Funktion $\Phi(x) = e^{ax}$ ist dann $\Phi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} H(|x-t|)\ \Phi(t)\,dt$, also

$$\Phi \geqq L(\Phi) \text{ für } x \geqq 0; \quad L(\Phi) = \lambda \int_{0}^{\infty} H(|x-t|)\ \Phi(t)\,dt .$$

Wir zeigen nun noch, daß die Funktion $\phi(x) = e^{\alpha x} - 1$ der Ungleichung

$$\phi \leqq L(\phi) \text{ für } x \geqq 0$$

genügt. Nach Satz 4. gibt es dann eine Lösung $u(x)$ von (10) mit

$$e^{\alpha x} - 1 \leqq u(x) \leqq e^{\alpha x}, \quad x \geqq 0 . \tag{12}$$

Wir haben also zu zeigen, daß

$$\frac{e^{\alpha x} - 1}{\lambda} \leqq \int_{0}^{\infty} H(|x-t|)\ (e^{\alpha t} - 1)\,dt, \quad x \geqq 0 \tag{13}$$

ist. Nun genügt $e^{\alpha x}$ der Integralgleichung (8). Infolgedessen ist mit Rücksicht auf (9)

$$\frac{e^{\alpha x} - 1}{\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(|x-t|)\ e^{\alpha t}\,dt - \int_{0}^{\infty} H(t)\ (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} H(|x-t|)\ (e^{\alpha t} - 1)\,dt + \int_{-\infty}^{0} H(|x-t|)\ e^{\alpha t}\,dt + \int_{0}^{\infty} H(|x-t|)\,dt - \int_{0}^{\infty} H(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})\,dt$$

$$\leqq \int_{0}^{\infty} H(|x-t|)\ (e^{\alpha t} - 1)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} H(|x-t|)\,dt - 2\int_{0}^{\infty} H(t)\,dt ,$$

woraus wegen $\int_{-\infty}^{+\infty} H(|x-t|)\,dt = 2\int_{0}^{\infty} H\,dt$ die Ungleichung (13) folgt.

Korollar. Die gefundene Lösung $u(x)$ der Integralgleichung (10) hat nach (12) die Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} u(x)\,e^{-\alpha x} = 1, \quad \alpha = \alpha(\lambda) .$$

Sie ist offenbar die einzige Lösung mit dieser Eigenschaft. Ist $u'(x)$ eine weitere derartige Lösung, so wäre $v(x) = u'(x) - u(x)$ eine Lösung mit $\lim_{x=\infty} \frac{v(x)}{u(x)} = 0$. Nach Satz 3. muß dann $v(x) \equiv 0$, also $u' \equiv u$ sein.

Schließlich bemerken wir:

Die Integralgleichung (10) besitzt keine der Bedingung

$$\lim_{x=\infty} \bar{u}(x)\, e^{-\alpha x} = +\infty$$

und außer der Null keine der Bedingung $\lim_{x=\infty} \bar{u}(x)\, e^{-\alpha x} = 0$ genügende Lösung $\bar{u}(x)$, $\alpha = \alpha(\lambda)$.

Wäre etwa $\bar{u}(x)\, e^{-\alpha x} \to +\infty$ für $x \to \infty$, so wäre wegen (12) auch $\lim_{x=\infty} \frac{\bar{u}}{u} = \infty$, unter u die oben angegebene Lösung verstanden. Nach Satz 2. wäre dann ständig $\bar{u} > 0$ und $\lim_{x=\infty} \frac{u}{\bar{u}} = 0$, im Widerspruch zu Satz 3.

Zum Schluß unterziehen wir noch den Fall

$$\lambda = \lambda(0) = \frac{1}{2 \cdot \int_0^\infty H\,dt} \tag{14}$$

einer näheren Betrachtung. Gibt es eine Konstante $c > 0$, so daß

$$\int_x^\infty H(t)\,dt \leqq c \cdot H(x) \quad \text{für} \quad x \geqq 0 \tag{15}$$

ist, so gilt folgendes:

Die Integralgleichung (10) besitzt für $\lambda = \frac{1}{2\int_0^\infty H\,dt}$ eine Lösung $u(x)$ mit der Eigenschaft

$$x \leqq u(x) \leqq x + c \quad \text{für} \quad x \geqq 0,$$

wobei $c > 0$ das c von (15) ist.

Es ist nur zu zeigen, daß die Funktionen $\phi = x$, $\Phi = x + c$ den Voraussetzungen von Satz 4. genügen. Von ϕ ist dies leicht zu sehen[1]. Betreffs Φ ist die Ungleichung

$$\frac{x+c}{\lambda} \geqq \int_0^\infty H(|x-t|)\,(t+c)\,dt, \quad \frac{1}{\lambda} = 2\int_0^\infty H\,dt, \quad x \geqq 0, \tag{16}$$

[1] Für $\lambda = \frac{1}{2\int_0^\infty H\,dt}$ ist $x = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} tH(|x-t|)\,dt < \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty tH(|x-t|)\,dt$, also $\phi < L(\phi)$.

zu beweisen. Aus (15) folgt offenbar durch Integration nach leichter Umformung (partielle Integration der linken Seite)

$$\int_x^\infty (\tau - x)\, H(\tau)\, d\tau \leqq c \cdot \int_x^\infty H(\tau)\, d\tau\,, \quad x \geqq 0\,, \tag{17}$$

und hieraus durch Hinzufügen von $\int_{-x}^{x} \tau H(|\tau|)\, d\tau = 0$

$$\int_{-x}^{\infty} \tau H(|\tau|)\, d\tau \leqq (c+x) \int_x^\infty H(\tau)\, d\tau = \frac{x+c}{\lambda} - (x+c) \int_{-x}^{\infty} H(|\tau|)\, d\tau$$

oder

$$\int_{-x}^{\infty} (\tau + x + c)\, H(|\tau|)\, d\tau \leqq \frac{x+c}{\lambda}\,, \quad x \geqq 0\,.$$

Hier geht die linke Seite durch die Substitution $t = \tau + x$ in die rechte Seite von (16) über. (16) und (17) sind äquivalente Ungleichungen.

Für den Fall (14) gilt wieder wie oben:

Für $\lambda = \frac{1}{2\int_0^\infty H\, dt}$ ist $u(x)$ die einzige Lösung der Integralgleichung (10) mit der Eigenschaft

$$\lim_{x=\infty} \frac{u(x)}{x} = 1\,.$$

Es gibt in diesem Falle keine der Bedingung $\lim_{x=\infty} \frac{u}{x} = \infty$ genügende, und außer $u \equiv 0$ keine der Bedingung $\lim_{x=\infty} \frac{u}{x} = 0$ genügende Lösung $u(x)$ von (11).

Das bekannteste Beispiel einer singulären Integralgleichung vom Typus (10) ist die Gleichung von Picard-Lalesco[1] mit $H(\xi) = e^{-\xi}$. Die Anwendung unserer Bemerkungen bringt hier allerdings keinerlei Gewinn, da die Eigenwerte und -funktionen in diesem Spezialfalle vollkommen bekannt sind.

Ein Beispiel aus der Astrophysik: die Gleichung von Milne[2]. Sie ist vom Typus (10) mit

$$H(\xi) = \mathrm{Li}\,(e^{-\xi}) = \int_\xi^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\xi\,.$$

---

[1] Vgl. Goursat, Cours d'Analyse III, 1927, p. 438.

[2] E. A. Milne, Radiative Equilibrium in the outer Layers of a Star, Monthly Not. 81, 1921. Vgl. auch die Arbeiten von U. Wegner und E. Hopf in Zeitschr. f. Physik 45, 1927 und 46, 1928.

Alle Voraussetzungen sind erfüllt $(A = 1)$. $\int_0^\infty H(t)e^{\alpha t}dt$ konvergiert für $\alpha < 1$ und divergiert für $\alpha = 1$. Die Relation (9) lautet hier, wie aus einer leichten Rechnung folgt, $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$. Jedes λ mit $0 < \lambda \leqq \frac{1}{2} = \frac{1}{2\int_0^\infty H dt}$ ist hier ein Eigenwert. Betrachten wir etwa den Fall $\lambda = \frac{1}{2}$. Die Funktion H genügt hier der Ungleichung $H(\xi) < \frac{e^{-\xi}}{\xi} = -H'(\xi)$, aus der durch Integration über ein Intervall $(x, +\infty)$ die Ungleichung $\int_x^\infty H(\xi)d\xi < H(x)$ folgt. (15) ist also erfüllt mit $c = 1$. Die Milnesche Gleichung besitzt also für $\lambda = \frac{1}{2}$ eine Lösung $u(x)$ mit der Eigenschaft

$$x \leqq u(x) \leqq x + 1, \quad x \geqq 0.$$

Nachtrag bei der Korrektur. Die in § 1 betrachteten nichtsingulären (endliches, abgeschlossenes Intervall I) Operatoren $L(u)$ ordnen sich leicht der von F. Riesz entwickelten Theorie der linearen Funktionalgleichungen (Acta math. 41 [1916], p. 71—98) unter, wenn man zeigt, daß $L(u)$ ein beschränkter Operator ist, d. h. daß es eine von der speziellen Wahl von $u(x)$ unabhängige Zahl $\gamma > 0$ gibt, so daß

$$|L(u)| \leqq \gamma \cdot \mathrm{Max}|u|$$

ist. Dies folgt aber leicht aus den Eigenschaften 1. und 2.; denn es ist $|L(u)| \leqq L(|u|) \leqq \gamma \cdot \mathrm{Max}|u|$ mit $\gamma = \mathrm{Max}\ L(1)$.

Ausgegeben am 10. Juli.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

1. Hr. Johnsen sprach über die Farbe von Mineralien, besonders von Edelsteinen. (Ersch. später.)

Durch chemische Analyse wurde die rosa Farbe von Rosenquarz sowie die grüne Farbe von Smaragd, Demantoïd und Alexandrit untersucht. Dabei ergab der Rosenquarz vom Bayerischen Wald 0.0004% Mn ± 0.00005, der Smaragd von Columbien 0.1% Cr ± 0.002, der Demantoïd vom Ural 0.01% Cr ± 0.002 und der Alexandrit vom Ural weniger als 0.002% Cr.

2. Hr. Engler überreichte das 93. Heft (IV. 141.) des Werkes »Das Pflanzenreich«: Malpighiaceae, Pars 2, von Franz Niedenzu (Leipzig 1928).

3. Hr. Wiegand überreichte den 1. Band des von den Staatlichen Museen zu Berlin herausgegebenen Kataloges der Sammlung antiker Skulpturen: »Katalog der etruskischen Skulpturen« von Andreas Rumpf (Berlin 1928).

4. Vorgelegt wurde der 2. Band der ersten Reihe der sämtlichen Schriften und Briefe von Gottfried Wilhelm Leibniz: Allgemeiner politischer und historischer Briefwechsel, Band 2, 1676—1679 (Darmstadt 1927).

5. Das ordentliche Mitglied Hr. Albrecht Penck hat am 17. Juni 1928 sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

6. Die Akademie hat zu wissenschaftlichen Zwecken bewilligt:

durch ihre physikalisch-mathematische Klasse:

200 *RM* für die Fortführung der Arbeiten des Hrn. Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht in Blankenburg (Thüringen) an seinen »Opuscula Ichneumonologica«.

Die Akademie hat den Professor am Polytechnischen Institut »M. I. Kalinin« in Leningrad, Hrn. Dr. A. F. Joffe, zum korrespondierenden Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse gewählt.

Adresse an Hrn. Albrecht Penck zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 17. Juni 1928.

Hochverehrter Herr Kollege!

Zum 50. Male jährt sich der Tag, an dem Ihnen die Leipziger Universität die Doktorwürde verliehen hat — für uns ein mit Freude benutzter Anlaß, um Ihnen die herzlichsten Glückwünsche zu übermitteln und dabei der gewaltigen Arbeit zu gedenken, die Sie seit jenem Tage als Forscher und Lehrer im Dienste der geographischen Wissenschaft geleistet haben.

Ihren Eintritt in das wissenschaftliche Leben haben Sie als Zwanzigjähriger mit einer Dissertation über vulkanische Auswürflinge gekennzeichnet, haben aber später nur mehr gelegentlich die Probleme Ihrer Erstlingsarbeit gestreift. Nachdem Sie als junger Doktor sich München zur Arbeitsstätte erkoren hatten, mag die Nähe der Alpen Sie zu den Aufgaben geführt haben. die, in immer weiter gedehntem Ausmaße sich im Berührungsgebiete von Geographie und Geologie haltend, den größten Teil Ihrer Kraft und Ihrer Zeit in Anspruch genommen haben. Kaum 24 Jahre alt, haben Sie durch die gekrönte Preisschrift über die Vergletscherung der Alpen, in der Sie als Erster eine periodische Wiederholung der Vereisung nachgewiesen haben, Ihrem Namen Klang und Geltung über die Grenzen deutschen Landes hinaus verschafft. Von Wien aus ist dann das in gemeinsamer Arbeit mit Ihrem Freunde E. Brückner geschaffene Werk über die Alpen im Eiszeitalter ausgegangen, in dem wir die Krönung Ihrer glazialgeologischen Forschungen erblicken. Unsere Sitzungsberichte geben aber Zeugnis davon, daß Sie auch in den letzen Jahren noch immer die Mühen beschwerlicher Bergwanderungen auf sich genommen haben, um unsicher gebliebene Ergebnisse aufzuklären, immer begleitet von Schülern, die unter Ihrer Leitung eine Exkursionsschule durchmachen mußten, wie sie in gleicher Strenge vor Ihnen nie vom Nachwuchse gefordert worden ist. Wie Sie selbst ein Beobachter von seltener, fast unvergleichlicher Schärfe sind, so haben Sie auch Ihren Schülern eingeprägt, daß des Geographen Hauptarbeit nicht am Schreibtisch geleistet werden kann.

Auf das Gesamtgebiet der Kräfte, die an der Ausgestaltung unserer Erdoberfläche wirksam sind, bezieht sich Ihr großes Werk über die Morphologie der Erdoberfläche, die durch Sie eine ganz neue, systematische Grundlage erhalten hat. Über den Problemkreis der physischen Geographie hinaus erstreckt sich eine Reihe von Arbeiten, die dem letzten Jahrzehnt angehören

und für die Ihnen jeder Deutsche zu Dank verpflichtet ist. Eindrucksvoll haben Sie in Ihrem Werke »Deutsche, Polen und Kassuben in Westpreußen« das Unrecht klargelegt, das dem deutschen Volke durch die Schaffung des polnischen Korridors zugefügt worden ist. Nach dem Kriege haben Sie sich endlich durch Ihre Forschungen über den Lebensraum der Erde und die Welternährung mit dem Hauptproblem der Anthropogeographie auseinandergesetzt.

Zahlreiche und weite Reisen, die Sie um die Erde herum, die Sie nach Spitzbergen und Australien, die Sie viermal durch die Vereinigten Staaten geführt haben, boten Ihnen die Möglichkeit und die Anschauungsgrundlage für Arbeiten von weltumspannender Wichtigkeit. Daß Ihr rastloser Tätigkeitstrieb Sie auch zu organisatorischen Aufgaben von größter Reichweite genötigt hat, beweist am besten die Tatsache, daß Ihnen der Anstoß zu einer internationalen Weltkarte im Maßstabe von 1 : 1 000 000 zu verdanken ist.

Fünf Jahrzehnte ruheloser, fruchtbarster Arbeit haben Ihre Schaffenskraft nicht vermindert. Auch in der schweren Zeit, die Ihnen vorzeitig die besten Ihrer Schüler, die Ihnen den hochbegabten Sohn geraubt hat, ist die Arbeit Ihr bester Trost, Ihre wertvollste Stütze gewesen. So gehören Sie am Tage Ihres goldenen Doktorjubiläums als emsig Schaffender unserem Kreise an, immer noch von neuem Erkenntnisse erringend und verbreitend. Zu einer neuen Fahrt über das Weltmeer ziehen Sie jetzt aus, und unsere aufrichtigen Wünsche begleiten Sie dabei.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften

Ausgegeben am 10. Juli.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XX—XXII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 28. Juni. (S. 249)

Guthnick: Über die Berücksichtigung der Extinktion bei lichtelektrischen Messungen. (S. 250)

Guthnick: Bericht über den Stand der Vorbereitungen zur photographischen Überwachung des Himmels. (S. 258)

Gesamtsitzung am 12. Juli. (S. 270)

Klassensitzung am 19. Juli. (S. 271)

Keibel: Zur Augenentwicklung der Beuteltiere. (S. 272)

G. Pólya: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (Zweite Mitteilung.) (S. 280)

E. Kamke: Verallgemeinerungen des Jordanschen Kurvensatzes und stetige Winkelfunktionen. (Mitteilung vom 22. März.) (S. 283)

Library of Congress
JAN 11 1929
Smithsonian Deposit

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 28. Juni.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Guthnick sprach zunächst über die Berücksichtigung der Extinktion bei lichtelektrischen Messungen.

Es wird zahlenmäßig belegt, daß die »Extinktionsfaktoren« für lichtelektrische Messungen sich nur langsam mit der Seehöhe des Beobachtungsortes ändern und daß die von Stebbins für seine lichtelektrischen Messungen auf dem Mount Hamilton angewandte Extinktionsformel zu unwahrscheinlichen Extinktionsgradienten für den in Betracht kommenden Zenitdistanzenbereich führt. Daran schließt sich eine Bemerkung über die Farbenindizes der Jupitersatelliten.

2. Hr. Guthnick legte sodann einen Bericht über den Stand der Vorbereitungen zur photographischen Überwachung des Himmels vor.

Der Plan des Unternehmens, der bereits in einer Mitteilung in den Berl. Ber. 1926, XXI skizziert worden war, wird ausführlich dargelegt. Die umfangreichen instrumentellen Einrichtungen zur Durchführung des Planes werden beschrieben. Für einen Teil des Unternehmens haben die Arbeiten auf den Sternwarten Sonneberg und Babelsberg nach etwas verschiedenen Plänen bereits begonnen und bemerkenswerte Erfolge erzielt. In Sonneberg wurde das Hauptgewicht auf die schwachen Sterne gelegt, und es wurden bisher 284 neue, meist schwache Veränderliche entdeckt, in Babelsberg wurden die Sterne heller als 13^m durchmustert und 63 neue Veränderliche entdeckt, von denen 31 BD-Sterne sind. Die galaktische Verteilung der β Lyrae-Sterne und W Ursae majoris-Sterne wird untersucht und analog derjenigen der δ Cephei- und RR Lyrae-Sterne befunden.

Über die Berücksichtigung der Extinktion bei lichtelektrischen Messungen.

Von Paul Guthnick.

Die folgende Betrachtung ist durch ein Mißverständnis veranlaßt worden, dem meine kurze allgemeine Darlegung über die Berücksichtigung der Extinktion bei lichtelektrischen Messungen in einer früheren Mitteilung über die vier hellen Jupitersatelliten (Sitzungsberichte der Akademie 1927, S. 112) begegnet ist[1]. Ich hatte in meiner Mitteilung Kritik an der Methode geübt, nach der von Hrn. Stebbins die Extinktion bei seinen lichtelektrischen Messungen der vier hellen Jupitersatelliten auf dem Mount Hamilton berücksichtigt worden ist, und ich hatte gezeigt, daß die von ihm angewandte genäherte Extinktionsformel in dem in Betracht kommenden Zenitdistanzenintervall von 51° bis 64° einen Extinktionsgradienten ergibt, der unwahrscheinlich ist. Hr. Stebbins hat meine dazu gemachten allgemeinen Bemerkungen über die Extinktionsfaktoren so aufgefaßt, als hätte ich behauptet, daß eine Bergstation keinen durchsichtigeren Himmel habe als eine in der Ebene gelegene. Die von ihm zum Beweise wörtlich zitierte Stelle in meiner Mitteilung hat er aber völlig mißverstanden. Da der Sache eine grundsätzliche Bedeutung zukommt — die praktische ist in dem vorliegenden Falle, wie ich in meiner Mitteilung ausdrücklich bemerkt habe, gering —, so werde ich im folgenden meine damaligen Darlegungen eingehender begründen.

Die in Babelsberg benutzten Extinktionsfaktoren sind durch Vergleichung von lichtelektrischen Messungen an Sternen in verschiedenen Zenitdistanzen mit der empirischen Extinktionskurve für das visuelle Spektralgebiet abgeleitet worden, sind also rein empirische. Sie können genähert als das Verhältnis der Extinktionen für die beiden Spektralgebiete, oder auch der Logarithmen der Transmissionskoeffizienten für dieselben betrachtet werden. Strenger ist aber ihre Definition als das Verhältnis der Gradienten der empirischen visuellen und lichtelektrischen Extinktionskurve für die Zenitdistanz z, da wegen des Forbesschen Phänomens und etwaiger anderer Einflüsse spektraler oder lokaler oder sonstiger Art der wahre Transmissionskoeffizient eine merkliche Abhängigkeit von der Zenitdistanz (genauer von der vom Licht durchlaufenen Luftmasse) haben kann, die für verschiedene Spektralgebiete nicht dem gleichen Gesetz zu folgen braucht. Analoge Überlegungen gelten für

[1] Joel Stebbins and T. S. Jacobsen, Further photometric measures of Jupiter's satellites etc., Lick Observatory Bulletin Nr. 401.

beträchtlich verschiedene Seehöhen. Die tatsächliche Bestimmung der Babelsberger Extinktionsfaktoren entspricht dieser strengeren Definition. Für mäßige Zenitdistanzen, für mäßige Höhen über dem Meer und für das mittlere Gebiet des Spektrums haben diese Überlegungen nach den bisherigen Erfahrungen nur theoretische Bedeutung, für große Zenitdistanzen, für große Seehöhen usw. ist noch keine endgültige Klärung der Sachlage erreicht.

Es liegt in der Natur der Sache, daß bei der empirischen Bestimmung der Extinktionsfaktoren für einen bestimmten Zenitdistanzenbereich der Einfluß der größeren Zenitdistanzen dieses Bereichs überwiegt, so daß die Faktoren im wesentlichen für diese gelten. Da in Babelsberg die lichtelektrischen Messungen im allgemeinen nicht über eine größere Zenitdistanz als 55° ausgedehnt werden, so stellen die Babelsberger Extinktionsfaktoren die Extinktionsverhältnisse in einem Zenitdistanzenbereich von schätzungsweise $z = 40°$ bis $z = 55°$ am besten dar. In kleineren Zenitdistanzen ist der Einfluß der Faktoren auf die differenzielle Extinktion, da nur Sterne mit geringen Zenitdistanzenunterschieden miteinander verglichen werden, sehr gering.

Auf die Abhängigkeit der Extinktionsfaktoren vom Spektraltypus der Sterne, die recht merklich ist, werde ich hier nicht näher eingehen, da sie nicht bestritten wird.

Hr. STEBBINS hat seinen Extinktionsberechnungen die Näherungsformel $0^m.20 \cdot f \cdot \sec z$ zugrunde gelegt, in der f ein empirisch aus Messungen von Sternen in verschiedenen, zwischen 51° und 64° liegenden, Zenitdistanzen bestimmter, vom Spektraltypus abhängiger Faktor ist, der also im wesentlichen den Babelsberger Extinktionsfaktoren entspricht. Es ist aber zu beachten, daß diese Formel die Reduktion der in der Zenitdistanz z beobachteten Sterngröße (m_z) auf die außeratmosphärische (m) liefern soll, während in Babelsberg auf die Zenithelligkeit (m_o) reduziert wird. Den Faktor f bestimmte Hr. STEBBINS für den mittleren Spektraltypus der Jupitersatelliten zu 0.88, so daß also seine Reduktionsformel lautet:

$$m_z - m = 0^m.176 \sec z .$$

Zur Prüfung dieser Formel hat man mit ihr für den hier in Betracht kommenden Zenitdistanzenbereich (51°—64°) den Extinktionsunterschied für die beiden Grenzen derselben zu berechnen und mit dem aus anderweitigen Extinktionsuntersuchungen sich ergebenden Wert zu vergleichen. Es lag nahe, die Vergleichung mit den auf empirischen Untersuchungen begründeten Extinktionstheorien auszuführen, da dies eine sehr einfache Sache ist. Man hat allgemein:

$$m_z - m_o = 2.5 \log p\,[f(z) - 1],$$

worin p der Transmissionskoeffizient für den Beobachtungsort, $f(z)$ die vom Licht durchlaufene Luftmasse in Einheiten der in der Richtung zum Zenit durchlaufenen Luftmasse ist. Die Funktion $f(z)$ wäre einer der Theorien zu entnehmen und p nach den vorhandenen Bestimmungen für den gegebenen Beobachtungsort anzusetzen. Man würde etwa die LAPLACEsche oder die BEMPORADsche Theorie zugrunde legen, die übrigens (ebenso wie die BOUGERsche, LAMBERTsche, MAURERsche Theorie) für das gegebene Zenitdistanzenintervall praktisch nahezu die gleichen Werte für $f(z)$ liefern. Da sich aber keine der Theorien in aller

wünschenswerter Strenge an die empirischen Extinktionskurven anschmiegt, so habe ich die unmittelbare Benutzung der letzteren vorgezogen. Statt für die Zenitdistanzen 51° und 64° sind die folgenden Rechnungen für die Zenitdistanzen 50° und 65° durchgeführt worden.

1. Bestimmung der Transmissionskoeffizienten p der Atmosphäre für den Mount Hamilton und für Babelsberg und Ableitung der Extinktionsfaktoren.

Ich nehme mit Hrn. Stebbins als repräsentative Wellenlänge für seine lichtelektrischen Messungen λ 4600 an, ohne weiter zu untersuchen, ob dies die beste mögliche Annahme ist, da eine mäßige Änderung der effektiven Wellenlänge, wie man sich leicht überzeugt, ohne Belang ist. Für das visuelle Spektralgebiet ist eine entsprechende Annahme nicht nötig, da für dieses unmittelbare Bestimmungen von p vorliegen, die für das Gesamtgebiet des visuellen Spektrums gelten. Für den Mount Hamilton selbst sind mir weder für das eine noch das andere Spektralgebiet unmittelbare Bestimmungen der Transmissionskoeffizienten bekannt, so daß geeignete Bestimmungen von anderen Orten herangezogen werden mußten. Diese wurden mittels der bekannten genäherten Beziehung

$$\frac{\log p_1}{\log p_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

in der p_1 und p_2 die Transmissionskoeffizienten und b_1 und b_2 die Barometerstände für die beiden miteinander verglichenen Orte bedeuten, auf die Seehöhe des Mount Hamilton reduziert. Die folgende Tabelle I enthält für vier Orte, an denen Bestimmungen des Transmissionskoeffizienten der Atmosphäre für die Wellenlänge 4600 ausgeführt worden sind, die notwendigen Daten: den mittleren Barometerstand und den beobachteten Transmissionskoeffizienten für λ 4600. Die zweite Spalte enthält außerdem die Seehöhe. Die letzte Spalte gibt den aus den Werten der dritten Spalte berechneten Transmissionskoeffizienten für den Mount Hamilton, für den ein mittlerer Barometerstand von 653 mm (Seehöhe 1283 m) angenommen wurde. Alle Barometerstände sind wirklich beobachtet. Die Werte der beobachteten p sind der Zusammenstellung von Müller in Potsd. Publ. Bd. 22, S. 76, entnommen.

Tabelle I.

Ort	Seehöhe	Barometerstand	p_{4600} (beobachtet)	p_{4600} (Mt. Hamilton)
Potsdam	97 m	752 mm	0.735	0.765
Mount Wilson	1771 m	623 mm	0.817	0.809
Pedrogil (Teneriffa)	1950 m	595 mm	0.831	0.816
Alta vista (Teneriffa)	3260 m	510 mm	0.858	0.822

Nach Fowle[1] ist für feuchte, staubfreie Luft auf dem Mount Wilson $p_{4600} = \alpha_{o\lambda} \cdot \alpha_{w\lambda}^{w} = 0.848 \times 0.973 = 0.825$, wenn für w gemäß den Vormittags-

[1] Lindholm, Über die Staubtrübung der Atmosphäre 1909—1926, Gerlands Beitr. z. Geophysik, XVIII, Heft 1/2, 1927. Dort finden sich weitere Literaturangaben.

beobachtungen ein mittlerer Wert von 0.7 cm angesetzt wird. Für $w = 1.0$ cm ergibt sich $p_{4600} = 0.816$. Es bedeutet $\alpha_{o\lambda}$ die Molekularzerstreuung der Luft, $\alpha_{w\lambda}$ die Wasserdampfzerstreuung, w die Wasserdampfmenge in der Luftsäule über dem Beobachtungsort in cm Niederschlag. Für die ungefähre Seehöhe von Potsdam liegen noch zwei weitere Bestimmungen vor: Orotava (Teneriffa), 100 m, $p_{4600} = 0.709$, und Washington, 10 m, $p_{4600} = 0.656$. Die Bestimmung in Orotava beruht auf Messungen an nur zwei Tagen mit sehr ungünstigen Durchsichtigkeitsverhältnissen, die Bestimmung in Washington zeigt eine derartige Inferiorität der Durchlässigkeit des dortigen Himmels für blaues Licht gegenüber Potsdam an, daß ich sie, ebenso wie die von Orotava nicht verwertet habe. Alle Bestimmungen sind an der Sonne gemacht worden, gelten also für die Durchlässigkeitsverhältnisse am Tage[1].

Für die Babelsberger Sternwarte liegen keine Bestimmungen des Transmissionskoeffizienten für schmale Spektralbereiche vor, da aber die Entfernung vom Potsdamer Observatorium nur 3 km beträgt, die Seehöhe nahe die gleiche ist und beide Observatorien auf bewaldeten Anhöhen liegen, so kann man wohl für beide Orte die gleichen Extinktionsverhältnisse annehmen.

Die Zahlen der letzten Spalte der Tabelle I zeigen den bekannten Gang mit der Seehöhe, der besagt, daß die von der Theorie geforderte (genäherte) Beziehung zwischen p und b für die Wellenlänge 4600 und für mäßige Seehöhen nicht befriedigend erfüllt ist. In großen Höhen scheint dieser Gang, wie die von Abbot auf dem 4400 m hohen Mount Whitney ausgeführten Bestimmungen anzeigen, zu verschwinden. Die Hauptursache des Ganges scheint der »Staub« der unteren Atmosphäre zu sein. Ich nehme gemäß den Zahlen in der Tabelle für den Mount Hamilton $p_{4600} = 0.800$ an, was der Wahrheit wohl sehr nahe kommen dürfte.

Für das visuelle Spektralgebiet habe ich die in der Tabelle II zusammengestellten Bestimmungen benutzt, die alle für die Nachtverhältnisse gelten.

Tabelle II.

Ort	Seehöhe	Barometer	p_{vis} (beobachtet)	Geltend für die Spektren	Zenitdistanzenbereich	p_{vis} (Mt. Hamilton)	Quelle
Babelsberg	80 m	753 mm	0.812	F, G, K oder auch G, K	0°—81°	0.835	ZIPLER, Veröff. Berl. Beob. III, 2
Potsdam	97 m	752 mm	0.808	$B3 - K5$	0°—77°.5	0.831	KEMPF, V. J. S. **31**, S. 13
Potsdam	97 m	752 mm	0.852	$B3 - K5$	80°—87°.5	0.870	»
Säntis	2504 m	569 mm	0.879	$Bo - K5$	0°—86°	0.862	MÜLLER, Potsd. Publ. **8**, Nr. 27
Ätna	2942 m	540 mm	0.880	$\frac{1}{2}(B2 + Kp)$	0°—87°	0.857	MÜLLER u. KEMPF, Potsd. Publ. **11**, Nr. 38

[1] Nach den vieljährigen lichtelektrischen Messungen nimmt in Babelsberg die Durchsichtigkeit für kurzwelliges Licht in klarer Nacht regelmäßig zunächst schnell, dann langsamer zu. Dieses Gesetz der Durchsichtigkeit ist besonders in der wärmeren Jahreszeit ausgeprägt. Wahrscheinlich ist also der Transmissionskoeffizient für λ 4600 in der Nacht merklich größer als am Tage. Wieweit etwas ähnliches für andere Orte in Betracht kommt, entzieht sich meiner Beurteilung.

Die zweite Potsdamer Bestimmung aus den sehr großen Zenitdistanzen allein beruht auf Beobachtungen in ausgesucht klaren Nächten (vgl. die Bemerkungen von Kempf in V. J. S. **31,** S. 12 und S. 15), und die Beobachtungsmethode war ganz verschieden von der der ersten Bestimmung. Kempf glaubt, daß der große Unterschied der aus diesen beiden Reihen bestimmten Transmissionskoeffizienten hauptsächlich davon herrührt, daß die zweite Reihe aus Beobachtungen in besonders klaren Nächten, die erste dagegen aus Beobachtungen in »zwar guten, aber keineswegs ausschließlich ungewöhnlich durchsichtigen« Nächten besteht. Ferner ging in der ersten Reihe die Gesichtslinie bei den großen Zenitdistanzen über die nach Norden gelegene Stadt Potsdam hinweg, in der zweiten Reihe dagegen mehr nach Osten und Westen. Ich möchte noch hinzufügen, daß durch diesen vorliegenden Fall die Möglichkeit einer merklichen Abhängigkeit des Transmissionskoeffizienten von der Zenitdistanz im Sinne des Forbesschen Phänomens doch recht nahegelegt wird. Auch die Babelsberger Messungen von Zipler machen für die großen Zenitdistanzen eine merkliche Abhängigkeit des Transmissionskoeffizienten von z wahrscheinlich.

Es ist somit nicht ganz leicht, aus den Zahlen der Tabelle II den Wert des visuellen Transmissionskoeffizienten für den Mount Hamilton abzuschätzen. Eine merkliche Abhängigkeit von der Seehöhe scheint auch für den visuellen Transmissionskoeffizienten noch zu bestehen. Man kann nur sagen, daß der Wert für den Mount Hamilton sehr wahrscheinlich zwischen den Grenzen 0.850 und 0.860 liegen wird. Ich nehme, geltend für ein mittleres Spektrum $p_{vis} = 0.855$ an.

Für die weiteren Betrachtungen sind somit die folgenden Grundlagen gegeben:

	Babelsberg	Mount Hamilton
p_{vis}	0.812	0.855
p_{4600}	0.735	0.800

Mit diesen Werten ergeben sich unmittelbar die folgenden Extinktionsfaktoren für λ 4600

Babelsberg (80 m): 1.48, Mount Hamilton (1283 m): 1.42.

Für den Säntis (2504 m) ergibt sich mit dem aus Tabelle I abgeschätzten Wert $p_{4600} = 0.838$ der Extinktionsfaktor 1.37. Die Abnahme erfolgt also mit zunehmender Seehöhe nur langsam[1]. Damit ist meine Bemerkung in der früheren Mitteilung, daß die Meereshöhe des Beobachtungsortes, wenn sie nicht sehr bedeutend ist, keinen wesentlichen Einfluß auf die Extinktionsfaktoren haben werde, gerechtfertigt.

Der Extinktionsfaktor 1.48 gehört nach der auf S. 117 meiner früheren Mitteilung gegebenen Zusammenstellung zu einem Spektrum G 1. Angewandt wurden von mir für die vier Jupitersatelliten gemäß ihren Farbenindizes die Faktoren 1.4, 1.5, 1.5 und 1.6. Unter einer etwas willkürlichen Festsetzung hatte ich das mittlere Spektrum der Satelliten zu F 9 angenommen.

[1] Wenn der in der Fußnote S. 253 erwähnte Unterschied zwischen den Tag- und Nachtwerten des Transmissionskoeffizienten für das visuelle und das lichtelektrische Spektralgebiet merklich verschieden ist, so würden die Werte der Extinktionsfaktoren für die verschiedenen Seehöhen in Wirklichkeit noch weniger verschieden sein.

2. Vergleichung der Extinktionsgradienten.

Die folgende Tabelle III enthält für die Zenitdistanzen 50° und 65° und für ein mittleres Spektrum den visuellen Extinktionsunterschied und den mit dem angegebenen Extinktionsfaktor erhaltenen Extinktionsunterschied für λ 4600, und zwar für folgende Orte:

1. Babelsberg, nach der mit BEMPORADS Theorie aus dem von ZIPLER bestimmten mittleren Transmissionskoeffizienten (0.812) für die Spektralklassen *F*, *G*, *K* berechneten Extinktionskurve. Die beobachteten Extinktionen haben in dem Zenitdistanzenbereich von 50° bis 65° einen etwas stärkeren Gang als die Theorie verlangt. Der beobachtete Extinktionsunterschied zwischen $z = 50°$ und $z = 65°$ ist nach einer Überschlagsrechnung um $0^m.028$ größer als der theoretische. Die dem beobachteten Extinktionsunterschied entsprechenden Zahlen sind in der Tabelle eingeklammert.

2. Potsdam, nach der beobachteten mittleren Extinktionskurve von MÜLLER.

3. Säntis, nach der mit der LAPLACEschen Extinktionsformel aus den beobachteten Transmissionskoeffizienten von MÜLLER berechneten Extinktionskurve. Der wirklich beobachtete Extinktionsunterschied stimmt zwischen $z = 50°$ und $z = 65°$ sehr nahe mit dem theoretischen überein; er ist um $0^m.006$ größer. Die dem beobachteten Extinktionsunterschied entsprechenden Zahlen sind in der Tabelle in Klammern eingesetzt.

4. Mount Hamilton, interpoliert aus den Extinktionskurven 3 und 4.

5. Mount Hamilton, berechnet nach der Formel von STEBBINS: $m_z - m = 0^m.176 \sec z$, für die lichtelektrischen Messungen der Jupitersatelliten.

Angenommene Transmissionskoeffizienten: Babelsberg $p_{4600} = 0.735$, Potsdam $p_{4600} = 0.735$, Säntis $p_{4600} = 0.838$, Mount Hamilton $p_{4600} = 0.800$.

Tabelle III.

Art	1. Babelsberg $p = 0.812$	2. Potsdam $p = 0.808$	3. Säntis $p = 0.879$	4. Mt. Hamilton aus 3 und 4	5. Mt. Hamilton Formel von STEBBINS
Seehöhe	80 m	97 m	2504 m	1283 m	1283 m
Reduktion auf	$z = 0$	$z = 0$	$z = 0$	$z = 0$	Weltraum
Vis. Ext., $z = 50°$	$0^m.127$	$0^m.120$	$0^m.078$	$0^m.099$	$0^m.274$ (lichtelektr.)
» » , $z = 65°$	$0^m.312$	$0^m.319$	$0^m.189$	$0^m.254$	$0^m.416$ »
» » , Unterschied	$0^m.185$ ($0^m.213$)	$0^m.199$	$0^m.111$ ($0^m.117$)	$0^m.155$	—
Extinktionsfaktor	1.5	1.5	1.37	1.5	—
Unterschied für λ 4600 für den Beobachtungsort	$0^m.277$ ($0^m.320$)	$0^m.298$	$0^m.152$ ($0^m.160$)	$0^m.232$	$0^m.142$ (lichtelektr.)
Unterschied für λ 4600 reduz. auf Mt. Hamilton	$0^m.201$ ($0^m.232$)	$0^m.216$	$0^m.192$ ($0^m.202$)	$0^m.232$	$0^m.142$ »

Die Tabelle zeigt, daß unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit der Transmissionskoeffizienten von der Zenitdistanz die von Hrn. STEBBINS angewandte Extinktionsformel etwa dem Unterschied der Extinktion für λ 4600 auf dem Säntis (oder auf dem Ätna), also einer Seehöhe, die mindestens doppelt so groß ist als die des Mount Hamilton, entspricht. Der Unterschied der lichtelektrischen Extinktion nach der STEBBINSschen Formel ist kleiner als der Unterschied der visuellen Extinktion in Spalte 4. Der von mir für

die Neureduktion der lichtelektrischen Messungen angenommene Gradient — $0^{m}.232$ in Spalte 4 — ist vielleicht etwas zu groß gewesen, wie die Werte in den Spalten 1, 2 und 3 anzeigen. Ich füge noch hinzu, daß ein um 0.5 Klassen späteres Spektrum den Extinktionsfaktor um 0.05 und den Extinktionsunterschied um $0^{m}.007$ verkleinert.

Weiter läßt sich die Sache hier nicht verfolgen, da Hr. Stebbins die zur Bestimmung seines Faktors f benutzten Messungen nicht mitteilt, und man nicht klar ersehen kann, wie die Ableitung des Faktors erfolgt ist. Aus der vorliegenden Betrachtung wird man aber zwei Schlußfolgerungen ziehen müssen: 1. daß es gewagt ist, aus einigen wenigen Messungen in einem sehr beschränkten Zenitdistanzenbereich auf die Extinktionsverhältnisse eines Beobachtungsortes zu schließen, 2. wie wichtig es ist, das alte Problem der Abhängigkeit der für bestimmte ausgedehnte Spektralgebiete geltenden mittleren Transmissionskoeffizienten von der durchlaufenen Luftmasse (Forbessches Phänomen) mit genauen Meßmethoden in Angriff zu nehmen. Das ergibt sich besonders eindringlich aus der Betrachtung der Zahlen der Tabelle II für die beiden Potsdamer Bestimmungen. Was die Extinktionsverhältnisse auf dem Mount Hamilton betrifft, so wird man auf Grund der wenigen lichtelektrischen Messungen vorerst kaum annehmen dürfen, daß sie sich so auffallend abweichend von denen anderer Orte, die sich zum Teil ähnlich günstiger klimatischer Verhältnisse erfreuen, verhalten sollten.

3. Die Farbenindizes der Jupitersatelliten.

Mit dieser Betrachtung über die Extinktion steht in engerem Zusammenhang eine weitere Bemerkung von Hrn. Stebbins über die von mir aus der Vergleichung seiner lichtelektrischen Messungen von 1926 mit meinen visuellen Messungen gefundenen Farbenäquivalente der Satelliten, deren Kenntnis für die Festsetzung der individuellen, von der spektralen Energieverteilung der Sterne abhängenden Extinktionsfaktoren nötig ist. Hr. Stebbins hält meine Bestimmung für verfehlt, weil er 1927 aus direkten lichtelektrischen Bestimmungen mittels Blau- und Gelbfilter wesentlich andere Werte erhalten habe.

Da ich aus dem damals mir zur Verfügung stehenden Material nur relative Farbenindizes der Satelliten ableiten konnte, so mußte ich für einen Satelliten eine plausible, jedoch etwas willkürliche Annahme machen, deren Fehler, da er sich bei allen Satelliten nahe gleichmäßig auswirkt, keine wesentliche Bedeutung hat. Dies ist ausdrücklich in meiner Mitteilung erwähnt. Ich nahm für den Satelliten II eine spektrale Intensitätsverteilung entsprechend einem Spektrum $G\,1$ an und erhielt dann für die anderen Satelliten die folgenden, gleich in Spektralklassen umgesetzten Werte, neben die ich die von Hrn. Stebbins erhaltenen stelle:

Satellit	G.	St.	St.-G.	St.-(G.+0.4)
I	$G\,5$	$G\,9$	+0.4	0.0
II	$G\,1$	$G\,5$	+0.4	0.0
III	$F\,9$	$G\,4$	+0.5	+0.1
IV	$F\,1$	$G\,3$	+1.2	+0.8

Man ersieht aus der letzten Spalte, daß die von mir abgeleiteten relativen Farbenindizes der drei ersten Satelliten mit den von Hrn. STEBBINS gefundenen praktisch völlig übereinstimmen, während sich für IV eine merkliche Abweichung ergibt. Das letztere ist aber nicht überraschend, da die beiden Bestimmungen sich auf nicht unerheblich verschiedene Spektralbereiche beziehen — STEBBINS Bestimmungen beruhen auf der Vergleichung zweier nahe benachbarter kurzwelliger, meine auf der Vergleichung eines mittleren kurzwelligen mit dem visuellen Spektralgebiet —, und da man für die Satelliten, besonders für den schon dem Auge etwas ungewöhnlich gefärbt erscheinenden Satelliten IV, nicht ohne weiteres eine spektrale Intensitätsverteilung voraussetzen darf, die der normalen der Fixsterne entspricht. Gerade bei dem Satelliten IV war von vornherein zu erwarten, daß verschiedene Spektralgebiete erheblich verschiedene Werte liefern würden. Da es für die Festsetzung der Extinktionsfaktoren auf das Verhältnis vom visuellen zum lichtelektrischen Spektralgebiet ankommt, so müssen folgerichtig auch diese beiden Spektralgebiete miteinander verglichen werden, sobald die Möglichkeit abnormer spektraler Intensitätsverteilung vorliegt.

Bericht über den Stand der Vorbereitungen zur photographischen Überwachung des Himmels.

Von Paul Guthnick.

In einer Mitteilung: »Die Verwendung kurzbrennweitiger photographischer Objektive in der Astronomie«[1] von R. Prager und mir wurde ein vor zwei Jahren endgültig beschlossener Plan skizziert, nach dem an zunächst drei deutschen Beobachtungsstationen, den Sternwarten Babelsberg, Bamberg und Sonneberg, eine beständige photographische Überwachung des in Mitteleuropa sichtbaren Himmels durchgeführt werden soll. Neben den eigentlichen Überwachungsaufnahmen sollen Serienaufnahmen ausgewählter Himmelsfelder einhergehen. Die Überwachungsaufnahmen sollen durchschnittlich mindestens einmal im Monat den ganzen zugänglichen Himmel doppelt überdecken, die Serienaufnahmen ausgewählter Felder in ununterbrochener Reihenfolge jede klare Nacht bis zur Erlangung einer Zahl von 60—80 Platten fortgesetzt und nach angemessener Zeit wiederholt werden. Die Überwachungsaufnahmen sollen mit einheitlichen Kameras großen Öffnungsverhältnisses auf Platten gleicher Sorte — insbesondere gleicher selektiver Empfindlichkeit — vom Format 16 × 16 cm und mit gleicher, vorerst einhalbstündiger Belichtungszeit gemacht werden; sie sollen nach Möglichkeit von allen drei Stationen miteinander vergleichbar sein. Nur für den südlichsten Teil des Himmels sind wegen der erheblich stärkeren Extinktion einstündige Aufnahmen vorgesehen. Die Serienaufnahmen sollen mit beliebigen Kameras und mit frei zu wählenden Belichtungszeiten gemacht werden. Für die Zeit der hellen Sommernächte, in denen Aufnahmen mit Objekten sehr großen Öffnungsverhältnisses auf der nördlichsten Station, Babelsberg, sehr erschwert sind und auch an den beiden anderen Orten stark eingeschränkt werden müssen, kommen vor allem Serienaufnahmen mit Objektiven von kleinerem Öffnungsverhältnis in Betracht. Auch für die Überwachungsaufnahmen ist für diese, von Mitte Mai bis Anfang August dauernde Jahreszeit die Verwendung von Objektiven kleineren Öffnungsverhältnisses zu erwägen. Für die Mondscheinnächte gelten ähnliche Überlegungen.

Der Zweck der Überwachungsaufnahmen ist neben der Entdeckung von neuen Sternen, Kometen usw., die allmähliche Ermittlung aller noch unbekannten Veränderlichen bis herab zur Helligkeit 12^m oder 13^m, um damit

[1] Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1926, S. 275.

statistisch verwertbares, vollständiges Material zu gewinnen, ferner die ständige Überwachung der vielen bekannten Veränderlichen, besonders der langperiodischen und unregelmäßigen, für die Zwecke des »Kataloges und der Ephemeriden veränderlicher Sterne«.

Die Serienaufnahmen haben in bezug auf die Veränderlichen den gleichen Zweck, sie sollen aber außerdem einem eingehenderen Studium aller in den betreffenden Feldern stehenden, hinreichend hellen Veränderlichen, besonders der kurzperiodischen, dienen, wozu die Überwachungsaufnahmen ihres sporadischen Charakters wegen im allgemeinen wenig geeignet sind.

1. Die instrumentelle Ausrüstung.

Die Kosten für die zur Ausführung des Planes nötigen Instrumente hat in dankenswerter Weise die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zum größten Teil übernommen.

Für die Überwachungsaufnahmen sind drei Kameras mit neu berechneten Ernostar-Objektiven von 135 mm Öffnung und 240 mm Brennweite — Öffnungsverhältnis also 1 : 1.8 — in der Werkstatt der Babelsberger Sternwarte gebaut worden. Das Plattenformat ist zu 16 × 16 cm gewählt worden, obwohl davon nur 14 cm benutzt werden. Gut brauchbar abgebildet wird ein kreisförmiges Feld von etwas über 30° Durchmesser. Maßgebend hierbei waren vor allem praktische Gründe: bequem handliches Format der Platten bei möglichst großem Felddurchmesser, möglichst geringe Zahl der für eine vollständige Überdeckung des Himmels notwendigen Aufnahmen, möglichste Herabdrückung der Betriebskosten usw.

Mit dem extrem großen Öffnungsverhältnis der Ernostar-Objektive sind freilich auch gewisse Nachteile verbunden: starker Helligkeitsabfall nach dem Plattenrande hin, großer Einfluß der Helligkeit des Himmelsgrundes, äußerste Empfindlichkeit gegen Fehler der Fokussierung. In den Sommernächten können in Babelsberg mit dem Ernostar Aufnahmen nur während zwei Stunden um Mitternacht herum gemacht werden und auch dann nicht nach Norden hin. Ebenso fallen praktisch im Durchschnitt etwa 10 Nächte um den Vollmond herum aus. Die große Empfindlichkeit gegen Fokussierungsfehler — bereits Beträge von der Größenordnung 0.05 mm machen sich bemerkbar — zwingt bezüglich der photographischen Platten, die Abweichungen von der Ebene bis zum Zehnfachen dieses Betrages zeigen, zu besonderen Vorkehrungen, da die Verwendung von Spiegelglasplatten der hohen Kosten wegen ausgeschlossen ist. Die Schwierigkeit wurde behoben durch die Konstruktion von Metallkassetten mit starker ebener Rückwand, an die die Platten durch mit Schrauben fest anziehbare Randleisten angepreßt werden. Nach einiger Übung wird durch dieses Verfahren äußerst selten eine Platte merklich beschädigt und auch dann nur am äußersten Rande, der doch nicht benutzbar ist. Der Erfolg ist, daß die Platten jetzt während der Aufnahmen praktisch eben sind. Die Fokussierung geschieht durch Drehen des Objektives in einem guten Gewinde und Ablesung an einer Peripherieteilung, die jede gewünschte Genauigkeit gestattet. Die Kassetten werden an die mit Seitenleisten versehene ebene Hinterwand der Kamera angelegt und mit einer einzigen Schraube befestigt. Der Kassetten-

wechsel ist so äußerst bequem und schnell. Über den Helligkeitsabfall werden später nähere Angaben gemacht.

Die Einrichtung der parallaktischen Montierungen für diese Kameras ist der Kostenersparnis halber ebenfalls von der Werkstatt der Babelsberger Sternwarte übernommen worden. Das hat allerdings den Nachteil gehabt, daß wegen der starken Inanspruchnahme der Werkstatt durch andere Arbeiten für die Sternwarte die Fertigstellung der Montierungen längere Zeit dauert, als erwartet worden war. Zur Zeit ist die Montierung für Bamberg vollendet und an Ort und Stelle, die beiden anderen werden im Lauf dieses Jahres fertig werden. Die Montierungen werden mit Zeiß-Uhrwerken und elektrischer Sekundenkontrolle versehen sein. Eine Kontrolle der Nachführung durch den Beobachter wird nach den bisherigen in Babelsberg gemachten Erfahrungen überflüssig sein.

Mit den Überwachungsaufnahmen konnte aus den angegebenen Gründen bisher noch nicht begonnen werden; Prof. Zinner in Bamberg gedenkt sie im nächsten Herbst aufzunehmen.

Die Serienaufnahmen dagegen sind an zwei Stellen, Sonneberg und Babelsberg, schon seit längerer Zeit im Gange und haben bereits sehr gute Erfolge erzielt, wobei zu bemerken ist, daß sie, wenigstens in Babelsberg, noch nicht im vollen geplanten Umfange aufgenommen sind, sondern mehr nebenbei mit längeren Unterbrechungen besorgt wurden. Für die Serienaufnahmen ist seit der Aufstellung des Planes noch eine weitere Station, die dem Herzog von Sachsen-Altenburg gehörende Sternwarte Wolfersdorf in Thüringen, als Mitarbeiterin hinzugekommen.

Die bei den Serienaufnahmen verwendeten Kameras sind in Babelsberg die später für den Überwachungsdienst bestimmte Ernostar-Kamera, ferner zwei Kameras, die eine mit einem Tachar von 100 mm Öffnung und 250 mm Brennweite, die andere mit einem Tessar von 86 mm Öffnung und 300 mm Brennweite. Das Plattenformat für die beiden letztgenannten Kameras ist 9×12 cm. Alle drei Kameras sind zur Zeit auf einer kleinen Zeißschen Astrographenmontierung mit Leitfernrohr und elektrischer Sekundenkontrolle aufgesetzt. Die Dauer der Belichtung beträgt auch für die Serienaufnahmen vorläufig nur $0^h.5$. Bis zum Frühjahr 1928 wurden die Aufnahmen mit der Ernostar-Kamera von Prager und mir, die Aufnahmen mit den beiden anderen Kameras von cand. phil. Schneller besorgt. Letzterer hat jetzt auch die Aufnahmen mit der Ernostar-Kamera übernommen.

In jüngster Zeit ist für Babelsberg noch eine Zeißsche Montierung mit Leitfernrohr und elektrischer Sekundenkontrolle, ferner ein Zeiß-Triplet von 140 mm Öffnung und 700 mm Brennweite aus dem Nachlaß von Prof. Adolf Miethe erworben worden. Das Instrument wird voraussichtlich im Herbst in Gebrauch genommen werden und soll zu Serienaufnahmen mit längerer Belichtung verwendet werden. Erwogen wird ferner die Anschaffung eines Objektives von Ross mit dem Öffnungsverhältnis 1 : 6.8, mit dem große Felder mit sehr geringer Verzeichnung und kleinem Helligkeitsabfall abgebildet werden können. Es ist aber noch zweifelhaft, ob diese Aufnahmen sich zur Aufsuchung neuer Veränderlicher und zum Studium derselben eignen werden. Hierüber nachher Näheres.

In Sonneberg hat Dr. HOFFMEISTER Serienaufnahmen mit meist zweistündiger Belichtung aufgenommen und damit bereits große Erfolge erzielt. Es ist dies die Ausdehnung des Serienplanes auf die schwachen Sterne ($< 12^m$), die entweder durch Vergrößerung der Objektivöffnung oder durch Verlängerung der Belichtungszeit erreicht werden muß. HOFFMEISTER verwendet dabei drei auf einer Zeiß-Montierung mit Leitrohr und Sekundenkontrolle angebrachte Kameras. Die Objektive sind ein Zeiß-Triplet von 170 mm Öffnung und 1200 mm Brennweite, ein Zeiß-Triplet von 140 mm Öffnung und 700 mm Brennweite, endlich als Notbehelf ein altes Objektiv von 80 mm Öffnung und 400 mm Brennweite. Die optischen Achsen der beiden Zeiß-Triplets sind um 8° gegeneinander geneigt, so daß zwei Nachbarfelder gleichzeitig aufgenommen werden können. Die Stellung der kleinen Kamera ist veränderlich. Die Plattenformate sind der Reihe nach 20×20 cm (=9°×9°), 10×15 cm und 9×12 cm, Das größte Objektiv würde auch ein noch größeres Plattenformat mit Vorteil vertragen, da die Bilder am Rande der Platte erst leicht verlängert sind und der Helligkeitsabfall gering ist.

Die Sonneberger Sternwarte liegt auf dem 640 m hohen Erbisbühl und ist ihrer hohen günstigen Lage wegen besonders für die Aufnahmen der südlichsten Teile des Himmels geeignet.

Auf der Sternwarte Wolfersdorf (279 m) wurde anfangs mit einem Zeiß-Triplet von 120 mm Öffnung und 540 mm Brennweite gearbeitet. Neuerdings erfolgen die Aufnahmen mit einem Zeiß-Triplet von 140 mm Öffnung und 700 mm Brennweite. Die Belichtungszeit ist durchweg $0^h.5$. Auch dort ist bereits ein ansehnliches wertvolles Plattenmaterial gesammelt, dessen Auswertung auch begonnen worden ist, aber durch den Mangel eines geeigneten Blinkapparates vorläufig noch erschwert wird.

Die bisherigen Erfahrungen in Babelsberg haben gezeigt, daß es für das Hauptziel des Unternehmens, die Erforschung der Veränderlichen, keineswegs gleichgültig ist, welcher Objektivtypus verwendet wird, wenn die Brennweite sehr klein ist. Ich werde nachher für einige der in Babelsberg und Sonneberg verwendeten Objektive über diesen Punkt nähere Angaben machen. Unwesentlich ist es für die Eignung eines Objektives zu der vorliegenden Aufgabe, ob bei seiner Berechnung das Hauptgewicht auf die Beseitigung der Koma oder des Astigmatismus usw. gelegt worden ist. Ein ideales, fehlerloses Objektiv, das über das ganze abgebildete Feld hinweg die Sterne punktförmig abbildet, würde wahrscheinlich für unsere Aufgabe sehr wenig geeignet sein. Beim Ernostar z. B. ist dieser Idealzustand für die schwächeren Sterne in der Plattenmitte praktisch erreicht; dort sind die kleinsten Durchmesser von völlig ausgeschwärzten Bildern von der Größenordnung 0.02 mm. Mit den an den Blinkkomparatoren üblichen Vergrößerungen (etwa 10fach) sind die Veränderungen dieser kleinen Bilddurchmesser oder gar die Veränderungen der Schwärzung so kleiner Bilder mit der Sternhelligkeit nur mit Mühe zu erkennen. Infolgedessen werden auf den Ernostar-Platten verhältnismäßig nur selten Veränderliche nahe der Plattenmitte gefunden. Es ist möglich, daß die Anwendung wesentlich stärkerer Vergrößerungen am Blinkkomparator diese Schwierigkeit verringert oder gar beseitigt, jedoch liegen hierüber in Babelsberg

noch keine praktischen Erfahrungen vor. An dem nachher erwähnten neuen Modell des Blinkkomparators können ohne weiteres beliebige Okularvergrößerungen angewandt werden.

Wesentlich anders wird die Sachlage, wenn die Brennweite des Objektives so groß ist, daß sich der Einfluß der Luftunruhe auf die Sternbilder geltend machen kann, deren Durchmesser dann von selbst hinreichend groß werden. Dies ist bestimmt z. B. bei dem von Hoffmeister benutzten 170 mm-Zeiß-Triplet der Fall. Das von Ross berechnete, ganz ausgezeichnete vierlinsige Objektiv mit einem Öffnungsverhältnis von 1 : 6.8 liefert nach einem mir von Prof. Baade zur Verfügung gestellten Abzug einer Aufnahme von einem 28° × 21° messenden Felde bis zum Rande außerordentlich kleine punktförmige Sternbilder. Vermutlich müßte für unsere Aufgabe eine Brennweite von mindestens 100 cm genommen werden, womit aber die regelmäßige Ausnutzung des ganzen brauchbaren Feldes ausgeschlossen ist.

Die drei in Babelsberg benutzten Objektive: Tessar 1 : 3.5, Tachar 1 : 2.5, Ernostar 1 : 1.8 und das von Hoffmeister benutzte Triplet 1 : 7 sind in ihrer Art extrem verschieden. Nach den Untersuchungen von cand. phil. Schneller werden mit dem Tachar und dem Tessar folgende Grenzgrößen in der Polsequenz erreicht. Ich setze für das noch nicht genauer untersuchte Ernostar und das Hoffmeistersche 170 mm-Zeiß-Triplet die beiläufigen Zahlen hinzu.

Objektiv	Öffnung	Grenzgröße (Plattenmitte)	Belichtungszeit	Grenzgröße in 7° Abstand von der Plattenmitte	Grenzgröße in 10° Abstand von der Plattenmitte	Grenzgröße in 13°5 Abstand von der Plattenmitte	Öffnungsverhältnis
Tachar . . .	100 mm	$14^{m}.6$	$0^{h}.5$	$14^{m}.2$	$13^{m}.7$	$12^{m}.7\pm$	1 : 2.5
Tessar . . .	86 mm	13.9	0.5	13.5	13.1	—	1 : 3.5
Ernostar . .	135 mm	14.0±	0.5	13.6±	13.2±	13.1±	1 : 1.8
Triplet . . .	170 mm	16.5	2.0	—	16.0±	—	1 : 7

Auf gleiche Öffnung bezogen, ist also das Tessar in der Nähe der optischen Achse für Sterne um $0^{m}.4$ lichtschwächer als das Tachar, das Ernostar sogar um etwa eine Größenklasse, doch ist diese letztere Zahl nicht zu verbürgen; wahrscheinlich ist der Unterschied geringer[1]. Auch das Triplet scheint effektiv verhältnismäßig lichtschwächer als das Tachar zu sein, worin sich vielleicht der mit der Brennweite wachsende Einfluß der Luftunruhe verrät. Der Helligkeitsabfall ist beim Tachar am größten; beim Ernostar ist er nach nur beiläufiger Abschätzung verhältnismäßig gering, höchstens von dem gleichen Betrag wie beim Tessar. Beim Triplet ist er bis 10° Abstand noch recht gering. Bei letzterem Objektiv sind die Sternbilder in diesem Abstand von der optischen Achse erst leicht verlängert, was bei dem kleinen Öffnungsverhältnis zu erwarten war. Beim Tachar beträgt der Durchmesser des Feldes guter bis gering deformierter Bilder etwa 8°, beim Tessar etwa 12°, beim

[1] Die Zahlen der Tabelle für das Ernostar sind inzwischen durch eine genauere Untersuchung von Hrn. Schneller nahe bestätigt worden. Die Grenzgrößen sind vielleicht noch um einige Zehntel einer Größenklasse tiefer anzusetzen.

Ernostar etwa 10°. Die Brauchbarkeit des Feldes für unsere Zwecke hört beim Tachar in etwa 17° Abstand von der optischen Achse auf, beim Tessar, für das das angewandte Plattenformat nicht ganz ausreicht, wahrscheinlich in ungefähr demselben Abstand, beim Ernostar in 18° Abstand. Beim Triplet, 1 : 7, sind in 10° Abstand die Bilder erst leicht verlängert, bei dem erwähnten Ross-Objektiv, 1 : 6.8, sind die Bilder in 17° Abstand noch nicht merklich deformiert. Das Tessar hat sich als nicht besonders geeignet für die Aufsuchung neuer Veränderlicher und für Helligkeitsschätzungen auf der Platte erwiesen, dasselbe würde in gesteigertem Maße für das Triplet und das Ross-Objektiv gelten, wenn man seine Dimensionen bei gleichbleibendem Öffnungsverhältnis auf eine Brennweite von 25—30 cm herabsetzte. Mit der Brennweite von 120 cm dagegen hat sich das Triplet als hervorragend geeignet erwiesen. Tachar und besonders Ernostar haben sich ebenfalls als hervorragend geeignet erwiesen. Das Ergebnis der Vergleichungen war bestimmend für die Wahl des Ernostars für die Überwachungsaufnahmen; für die Serienaufnahmen wäre später vielleicht die Anschaffung von Triplets von 300 mm Öffnung mit einem Öffnungsverhältnis von 1 : 5 zu erwägen, wobei man allerdings das größte für die vorhandenen Blinkkomparatoren noch zulässige Plattenformat verwenden müßte, um ein nicht zu kleines Feld zu bekommen. Mit einer so großen Öffnung könnten die Belichtungszeiten wesentlich verkürzt werden, ohne daß die untere Grenzgröße heraufgesetzt wird. Zu demselben Ergebnis gelangte Hoffmeister[1]. Interessant ist noch, daß es für die Ernostaraufnahmen keine obere Helligkeitsgrenze für die Erkennbarkeit kleiner Helligkeitsschwankungen gibt. Auf den halbstündigen Aufnahmen ist die Veränderlichkeit eines Objektes wie ζ Geminorum noch auffallender als die gleich große eines Objektes von z. B. der 10. oder 11. Größe.

Für die Auswertung der Aufnahmen ist die Benutzung des Blinkkomparators unerläßlich. Während in Sonneberg und Wolfersdorf zur Zeit noch provisorische Einrichtungen in Gebrauch sind — in Sonneberg wurde bisher dem Stereoskopprinzip der Vorzug gegeben —, wird in Babelsberg die Blinkvorrichtung eines großen Zeißschen Stereokomparators mit und ohne elektrischem Antrieb der Blinkvorrichtung benutzt, der noch die sehr angenehme Rosenbergsche Einrichtung für die Vergleichung von Platten verschiedenen Maßstabes (bis zu 1 : 3) besitzt. Diese Einrichtung wird von der Firma bei ihren neuen Modellen nicht mehr gemacht. Der Apparat gestattet die Vergleichung von Platten bis zum Format 24×30 cm, er ist infolgedessen für die Zwecke des Überwachungsplanes unnötig groß. Seiner Größe entspricht sein Gewicht von 350 kg und sein hoher Anschaffungspreis. Die Firma hat daher auf meine Anregung und mit dankenswertem Eingehen auf unsere speziellen Anforderungen ein neues Modell C (nur Blinkkomparator) konstruiert, das sich gegenwärtig im Bau befindet und durch Handlichkeit und Leichtigkeit und durch einen relativ niedrigen Preis auszeichnen wird. Es ist normalerweise für Platten bis zum Format 16×16 cm bestimmt, kann aber mit geringen Beschränkungen auch für Platten bis zum Format 20×20 cm und

[1] A. N. 5553.

sogar 22×22 cm benutzt werden. Es ist geplant, drei dieser neuen Blinkkomparatoren für Babelsberg, Bamberg und Sonneberg zu erwerben.

Für Babelsberg ist in der Werkstatt der Sternwarte außerdem ein lichtelektrisches Photometer zum genauen Ausmessen von photographischen Aufnahmen nach meinen Angaben gebaut worden. Der Apparat ist erst in diesen Tagen fertig geworden, so daß er an einer größeren Messungsreihe noch nicht erprobt werden konnte. Die bisherigen Versuche versprechen aber ein angenehmes, schnelles und glattes Arbeiten mit ihm.

In Sonneberg und Babelsberg stehen außerdem Hartmannsche Mikrophotometer zur Verfügung. Hoffmeister hat die Brauchbarkeit desselben auch für seine fokalen Sternaufnahmen mit dem Zeißtriplet erprobt[1].

Im allgemeinen werden aber voraussichtlich die Helligkeitsbestimmungen auf den Überwachungs- und Serienaufnahmen durch Stufenschätzungen erfolgen, deren Genauigkeit, wie in der Mitteilung von Prager und mir in den Sitzungsberichten nachgewiesen ist, vollauf den geforderten Ansprüchen genügt. Bei Aufnahmen sehr sternreicher Gegenden mit den kurzbrennweitigen Objektiven wird dies übrigens das einzige anwendbare Verfahren sein. Die Genauigkeit einer aus Stufenschätzungen abgeleiteten Helligkeit kann im normalen Falle auf etwa $\pm 0^{m}.05$ (M. F.) geschätzt werden. In sehr sternreichen Gegenden wird die Genauigkeit geringer.

2. Plan der Verteilung und Ausführung der Aufnahmen und deren Behandlung.

Die Festsetzung der Belichtungszeit von $0^{h}.5$ bzw. $1^{h}.0$ für die Überwachungsaufnahmen ist mit Rücksicht auf die Ausführbarkeit des Planes — mindestens einmalige doppelte Überdeckung des ganzen Himmels in jedem Monat — in unserer wechselnden Witterung erfolgt. Sollte es sich später herausstellen, daß längere Belichtungszeiten ohne Einschränkung des Planes durchführbar sind, oder sollte sich die Beschaffung je einer zweiten Überwachungskamera für jede Beobachtungsstation ermöglichen lassen, so wird zu längeren Belichtungen übergegangen werden. Für die Serienaufnahmen sind die Belichtungszeiten in das Belieben jedes Teilnehmers gestellt, da eine Normalisierung hier nicht erwünscht ist. Wählt man lange Belichtungszeiten, wie Hoffmeister, so wächst die Zahl der zu erwartenden Neuentdeckungen stark an; sie gehören natürlich meistens den schwachen Größenklassen an. Die lange Belichtungszeit hat aber zur Folge, daß die Veränderlichen mit sehr kurzer Periode und kleiner Amplitude in allen Größenklassen praktisch unentdeckt bleiben. Das so gewonnene Material hat also für statistische Untersuchungen den Nachteil der Unvollständigkeit für alle Größenklassen auch oberhalb einer gewissen Helligkeitsgrenze, die natürlich oberhalb des Schwellenwertes der Platten liegt. Wendet man kürzere Belichtungszeiten an, wie es zur Zeit in Babelsberg geschieht, so wird nur eine entsprechend

[1] A. N. 5503.

höhere Helligkeitsgrenze erreicht, und die Zahl der zu erwartenden Neuentdeckungen sinkt stark herab; jedoch werden nun nach und nach praktisch alle Veränderlichen innerhalb des Bereiches gefunden. Die Zahl der zu erwartenden Neuentdeckungen wächst bei einer Ausdehnung der unteren Helligkeitsgrenze um 3 Größenklassen auf ein Vielfaches, wie man nachher sehen wird. Lange und kurze Belichtungszeiten haben also beide ihre wesentlichen Vorteile und Nachteile, und man wird stets gezwungen sein, beide anzuwenden, um statistische Vollständigkeit zu erreichen[1].

Keineswegs unwesentlich für eine möglichst gute Brauchbarkeit der Aufnahmen ist die Art der Entwicklung der Platten. Es sollen auch die schwächsten Lichteindrücke nach Möglichkeit aus der Platte herausgeholt, die Helligkeitskontraste möglichst groß werden. Eine Verschleierung der Platten infolge der Einwirkung des Himmelsgrundes oder infolge kräftiger Entwicklung hat sich als nicht nachteilig erwiesen, solange sie die Durchsicht der Platten nicht ganz erheblich beeinträchtigt. Nach mancherlei Versuchen wird in Babelsberg dem Brenzkatechin-Ätznatron-Entwickler (ohne Zusatz von Bromkalium) in der Zusammensetzung: Lösung A: 60 g Natriumsulfit sicc., 20 g Brenzkatechin, 1000 g destill. Wasser; Lösung B: 14 g Ätznatron, 1000 g destill. Wasser; gebrauchsfertiger Entwickler: 1 Teil A + 1 Teil B + 4 Teile Wasser, der Vorzug gegeben. Unter normalen Verhältnissen wird 5 Minuten lang entwickelt bei einer Temperatur von 12° bis 15° Celsius. Die bei der Entwicklung sich zeigende Verschleierung der Platten geht anscheinend im Fixierbad stark zurück, jedenfalls ist sie nachher bei den trockenen Platten in der Durchsicht nicht störend.

Der Plan der Verteilung der Himmelszonen für die Überwachungsaufnahmen, wie er zur Zeit besteht, beruht auf der Voraussetzung nur dreier Beobachtungsstationen, Sonneberg, Bamberg und Babelsberg. Der Berechnung des Planes ist ferner die Voraussetzung zugrunde gelegt, daß der Durchmesser des brauchbaren Feldes des neuen Ernostar-Objektives 14 cm = 32°.52 betrage. Die Länge der Diagonale einer quadratischen Platte von 14 cm Seitenlänge entspricht also 44°.84. Benutzt werden in Wirklichkeit Platten vom Format 16 × 16 cm, weil dieses Format in der Astronomie auch sonst sehr häufig verwendet wird und die Einführung eines neuen Formates unpraktisch wäre. Damit ergeben sich folgende Unterlagen für den Verteilungsplan, wenn der wirklich benutzte Teil der Platte zu 14 × 14 cm angenommen wird.

Deklination der Plattenmitte	Deklination der Mitte der südlichen Feldkante	Deklination der Mitte der nördlichen Feldkante	Südliche Ecken des Feldes, $\Delta\alpha$ gegen Plattenmitte, δ	Nördliche Ecken des Feldes, $\Delta\alpha$ gegen Plattenmitte, δ
−17°.5	−33°.8	− 1°.2	±1^h.24, −32°.4	±1^h.04, − 1°.2
+10	− 6.3	+26.3	±1.05, − 6.1	±1.16, +25.2
+40	+23.7	+56.3	±1.13, +22.8	±1.78, +53.2
+70	+53.7	+86.3	±1.69, +50.9	±5.13, +73.9

[1] Vgl. auch HOFFMEISTER, A. N. 5553, der dies ebenfalls betont.

Auf Grund dieser Zahlen ist der folgende schematische Verteilungsplan aufgestellt worden:

1. Sonneberg.

a) Obligatorische Aufnahmen.
Plattenmitten: δ —17°.5, α 0^h, 2^h, 4^h ... 22^h; zusammen 12 Aufnahmen mit je 1^h Belichtung.

b) Fakultative Aufnahmen.
Plattenmitten: δ —17°.5, α 1^h, 3^h, 5^h ... 23^h; zusammen 12 Aufnahmen mit je 1^h Belichtung.

2. Bamberg.

a) Obligatorische Aufnahmen.
Plattenmitten: δ —4°, α 1^h, 3^h, 5^h ... 23^h; zusammen 12 Aufnahmen mit je $0^h.5$ Belichtung.

b) Obligatorische Aufnahmen.
Plattenmitten: δ +24°, α 1^h, 3^h, 5^h ... 23^h; zusammen 12 Aufnahmen mit je $0^h.5$ Belichtung.

c) Obligatorische Aufnahmen.
Plattenmitten: δ +53°, α 0^h, 2^h, 4^h ... 22^h; zusammen 12 Aufnahmen mit je $0^h.5$ Belichtung.

3. Babelsberg.

a) Obligatorische Aufnahmen.
Plattenmitten: δ +10°, α 0^h, 2^h, 4^h ... 22^h; zusammen 12 Aufnahmen mit je $0^h.5$ Belichtung.

b) Obligatorische Aufnahmen.
Plattenmitten: δ +40°, α 0^h, 2^h, 4^h ... 22^h; zusammen 12 Aufnahmen mit je $0^h.5$ Belichtung.

c) Obligatorische Aufnahmen.
Plattenmitten: δ +70°, α 0^h, 3^h, 6^h ... 21^h; zusammen 8 Aufnahmen mit je $0^h.5$ Belichtung.

d) Obligatorische Aufnahmen.
Plattenmitte: δ +90°, mit je $0^h.5$ Belichtung.

Die sonnennahen Felder sind natürlich in Abzug zu bringen. Ob die Überwachungsaufnahmen nach diesem Plan praktisch durchgeführt werden können, kann erst die Erfahrung zeigen. Wenn die Umstände es erfordern, sollen die Areale auch dann aufgenommen werden, wenn sie teilweise unter dem natürlichen Horizont sind. Die Mondscheinnächte und die hellen Sommernächte sollen, wenn möglich, mit kürzeren Aufnahmen oder mit Objektiven kleineren Öffnungsverhältnisses ausgenutzt werden. Zur Zeit werden in Sonneberg auch noch andere Möglichkeiten ausprobiert. Hrn. Hoffmeister ist es gelungen, 10 Stunden nach Vollmond noch Sterne unter 14^m zu erreichen. Sollte es sich ferner in Zukunft ermöglichen lassen, an den drei Beobachtungsstationen noch je ein zweites gleiches Instrument aufzustellen, so würde man, wie schon bemerkt, vielleicht auch zu Aufnahmen mit der doppelten Belichtungszeit übergehen können.

Eine erste vorläufige Durchmusterung der gewonnenen Überwachungsaufnahmen unter dem Blinkkomparator soll so bald als möglich erfolgen zur Feststellung etwaiger auffälliger Neuerscheinungen (Kometen, Novae usw.). Die genaue Durchmusterung erfordert so viel Zeit, daß sie ohne einen großen Stab von eingeübten Hilfskräften nur an einem kleinen Teil der Platten durchgeführt werden kann. Es ist daher beabsichtigt, das Plattenmaterial anderen Sternwarten leihweise zur Verfügung zu stellen. Gemeinsame Besitzer der Überwachungsplatten bleiben die drei beteiligten Sternwarten, die unter sich ihr Material ebenfalls nach Möglichkeit austauschen. Diese Vereinbarungen beziehen sich nicht auf die Serienaufnahmen, über die die betreffenden Stellen vollkommen frei verfügen.

Eine wichtige Aufgabe haben die Überwachungsaufnahmen noch damit zu erfüllen, daß sie eine fortlaufende Kontrolle der Ephemeriden veränderlicher Sterne ermöglichen, ferner die Nachprüfung neu gemeldeter oder älterer, bisher nicht bestätigter Veränderlicher für die Zwecke der Benennungslisten gestatten werden. Die Serienaufnahmen werden dafür natürlich ebenfalls und in steigendem Maße in Betracht kommen.

3. Bisherige Ergebnisse der Serienaufnahmen der Sternwarten Sonneberg und Babelsberg.

Wie schon erwähnt, wurden die Serienaufnahmen in Sonneberg von Dr. Hoffmeister hauptsächlich mit einem 170 mm-Zeiß-Triplet und einem 140 mm-Zeiß-Triplet gemacht. Die optische Achse der letzteren ist gegen die des ersten um 8° geneigt, so daß jede Aufnahme zwei aneinandergrenzende Felder liefert. Belichtung in der Regel zweistündig. Die Zahl der mit den beiden Objektiven aufgenommenen Felder beträgt bereits weit über 30.

Die Durchmusterung der Platten von 12 dieser Felder unter dem Blinkkomparator hat bisher folgendes Ergebnis gehabt:

Mitte des Feldes	Zahl der gesicherten neu entdeckten Veränderlichen	Mitte des Feldes	Zahl der gesicherten neu entdeckten Veränderlichen
A Cassiopeiae	12	67 Ophiuchi	19
α Persei	5	Lyra	4
12 Orionis	24	$18^h 50^m +29°$	117
$7^h -6°$	8	19 35 +30	
α Canis min.	22	2 Lacertae	14
ζ Hydrae	7	3 Lacertae	52

In Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Durchforschung zweier Milchstraßenareale mit dem Hamburger 1 m-Reflektor durch Baade ist auch hier die große Häufigkeit von Bedeckungsveränderlichen (Algolsternen) in der Milchstraße auffallend. Dieselbe Erfahrung wurde in Babelsberg gemacht. Hervorzuheben ist ferner die auffallend ungleichmäßige Verteilung der Mirasterne nach der galaktischen Länge, ferner die verhältnismäßig große Zahl (4) neuer Veränderlicher von dem seltenen U Geminorum-Typus.

Die Zahl der bisher in Babelsberg auf Serienaufnahmen (Ernostar, Tachar, Tessar, einige Reflektoraufnahmen) neu gefundenen Veränderlichen ist wegen der Beschränkung auf halbstündige Belichtungen natürlich entsprechend geringer. Auch ist zu bemerken, daß die Babelsberger Serienaufnahmen nur im Hinblick auf kurzperiodische Veränderliche gemacht wurden, so daß sie für die Auffindung langsam veränderlicher Sterne ungeeignet sind. Bisher liegen zahlreiche Aufnahmen von 10 Feldern vor, außerdem gelegentliche Aufnahmen, zwischen 7—9, von drei weiteren Feldern und noch weniger von etwa 20 Feldern. Von diesen Feldern wurden bisher 9 nach Veränderlichen abgesucht, davon zwei, M 15 und M 92, von Dr. Haas[1]. Bei keinem einzigen Feld ist die Durchmusterung als abgeschlossen zu betrachten. Das Ergebnis war folgendes:

Mitte des Feldes	Zahl der gesicherten neu entdeckten Veränderlichen	Darunter BD-Sterne	Beobachter
$14^h.5$ $+34°.5$	11	3	Guthnick u. Prager
22.7 +40	10	9	
7.0 +25	17	8	
12.4 +26	9	5	
21.0 +70	noch nicht durchforscht	—	Schneller
23.0 m+70	8	4	
13.1 +50.8	noch nicht durchforscht	—	
M 15	1	—	Guthnick u. Prager
M 92	7	2	
M 3	noch nicht durchforscht	—	

Unerwartet groß ist das Verhältnis der Zahl der helleren, in der BD befindlichen Veränderlichen zur Gesamtzahl. Von den in der BD enthaltenen neuen Veränderlichen sind, in BD-Größen, einer $7^m.0$, fünf $8^m.6$—$9^m.0$, drei $9^m.3$—$9^m.4$, die übrigen $9^m.5$. Man sieht hieraus, wie unvollständig das statistische Material selbst für die BD-Größen 8^m—9^m heute noch ist, wie notwendig also auch Aufnahmen kürzerer Belichtungszeit sind. Unter $0^h.5$ Belichtungszeit herunterzugehen, ist, wenigstens für die Ernostar-Aufnahmen, nicht notwendig. Unter den neuen Veränderlichen ist der Fall AC Andromedae besonders bemerkenswert durch die Eigenart des Lichtwechsels. Die Helligkeitsschwankungen dieses weißen Sternes verlaufen nach Art derjenigen des RR Lyrae-Typus, sind aber anscheinend ganz unperiodisch. Aufgefallen ist ferner die galaktische Verteilung der verhältnismäßig vielen neu gefundenen W Ursae majoris-Sterne, die zu einer kleinen Untersuchung über die galaktische Verteilung aller bisher bekannten Veränderlichen dieses Typus Veranlassung gab. Die Zahl aller bekannten β Lyrae-Sterne, soweit der Charakter ihres Lichtwechsels nicht angezweifelt wird, einschließlich der in Babelsberg neu gefundenen, beträgt zur Zeit 58. Es dürften aber unter diesen noch einige Sterne sein, deren β Lyrae-Charakter nicht ganz gesichert ist. Von den Sternen des Kataloges veränderlicher Sterne für 1928 sind als unsicher ausgeschlossen worden: SX Aurigae, SV Centauri, RU Coronae bor., CP Cygni (wahrscheinlich nicht veränderlich);

[1] A. N. 5453.

von den übrigen sind als etwas zweifelhaft noch zu nennen: ST Aquarii, W Equulei, T Sextantis, die aber nicht ausgeschlossen wurden.

Zunächst ergibt sich ein Zerfallen der β Lyrae-Sterne in zwei ziemlich gut getrennte Gruppen, in eine Gruppe mit Perioden $< 0^d.7$ und in eine Gruppe mit Perioden $> 0^d.9$. In die Lücke fällt vorläufig nur ein Stern, AG Lacertae, $P = 0^d.75$, der seinem übrigen Charakter nach der zweiten Gruppe anzugehören scheint. Die Unterschiede der beiden Gruppen zeigt die folgende kleine Zusammenstellung:

Gruppe	Perioden-grenzen	Durchschnittlicher Unterschied der Helligkeit von Haupt- und Nebenminimum	Verteilung in galaktischer Breite	Verteilung in galaktischer Länge
I	$0^d.24$—$0^d.66$	$0^m.14$	0°—30° 16 St. 30 —60 9 St. 60 —90 7 St.	0°—180° 22 St. 180 —360 10 St.
II	$0^d.93$—$198^d.5$	$0^m.51$	0°—20° 23 St. 20 —40 3 St. 40 —90 0 St.	0°—180° 14 St. 180 —360 12 St.
AG Lacertae	$0^d.75$	$1^m.0$	$\beta = -5°$	$\lambda = 70°$

Die Gruppe I ist also in bezug auf β gleichmäßig über den Himmel verteilt, die Gruppe II sehr stark nach der Milchstraße konzentriert. Bei der Gruppe I zeigt sich bezüglich der Längen ein Überwiegen des nördlichen Teiles der Milchstraße gegen den südlichen, was aber vielleicht eine Auslesewirkung ist. In der Gruppe I ist der Helligkeitsunterschied zwischen den beiden Minima durchschnittlich sehr gering, in der Gruppe II beträchtlich. Bezüglich des Helligkeitsunterschiedes der Minima verhalten sich in Gruppe I abweichend nur die drei Sterne WZ Cygni ($0^m.6$, $P = 0^d.58$), RT Sculptoris ($0^m.7$, $P = 0^d.51$), V Trianguli ($0^m.6$, $P = 0^d.59$); bei RZ Draconis ($P = 0^d.55$) ist der Helligkeitsunterschied $0^m.3$, bei allen übrigen Sternen $0^m.0$ bis $0^m.2$. Bei T Sextantis ($P = 0^d.48$) ist der Helligkeitsunterschied nicht bekannt. In Gruppe II ist der Helligkeitsunterschied bei 8 Sternen noch nicht bekannt; bei W Serpentis ($P = 28^d.31$) ist er $0^m.0$, bei AD Andromedae ($P = 0^d.99$) und 221. 1928 Geminorum ($P = 9^d.97$) ist er $0^m.1$, bei V Puppis ($P = 1^d.45$) ist er $0^m.2$, bei TT Aurigae ($P = 1^d.33$), W Crucis ($P = 198^d.5$) und β Lyrae ($P = 12^d.91$) ist er $0^m.3$, bei den 10 übrigen Sternen ($P = 0^d.93$ bis $36^d.57$) ist er $0^m.4$ bis $1^m.0$.

Die galaktische Verteilung der beiden Gruppen von β Lyrae-Sternen erinnert an diejenige der kurz- und langperiodischen δ Cephei-Sterne und ist in dieser Beziehung bemerkenswert. Freilich ist das für statistische Untersuchungen zur Verfügung stehende Material für die β Lyrae-Sterne noch so klein, daß man die vorstehenden Beziehungen wohl noch nicht als gesichert ansehen kann.

Ausgegeben am 22. August.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

XXI. Gesamtsitzung. 12. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

1. Hr. F. W. K. Müller legte vor und analysierte ein uigurisches Buchfragment aus den Funden der ersten Turfan-Expedition, das ein lamaistisches Zauberritual enthält. (Ersch. später.)

2. Hr. Keibel überreichte seine »Beiträge zur Anatomie, zur Entwicklungsgeschichte und zur Stammesgeschichte der Sehorgane der Cyklostomen« (Leipzig 1928).

3. Das korrespondierende Mitglied Hr. Exner in Wien übersandte seine Schrift »Über die Zirkulationen kalter und warmer Luft zwischen hohen und niedrigen Breiten« (Wien 1928).

4. Hr. Hesse überreichte die 51. Lieferung des Werkes »Das Tierreich«: *Lepidoptera, Nemeobiinae,* bearbeitet von Dr. H. Stichel (Berlin und Leipzig 1928).

5. Vorgelegt wurde das Werk von Dr. Heinrich Schnee »Nationalismus und Imperialismus« (Berlin [1928]).

Ausgegeben am 22. August.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

XXII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 19. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Rubner.

1. Hr. Keibel sprach über die Entwicklung des Auges der Beuteltiere.

Er weist nach, daß diese Entwicklung nicht aus dem Rahmen der Entwicklung bei den anderen Amnioten herausfällt, wie das Giuseppe Levi (Turin) nach einem Vortrag in der Versammlung der französischen Anatomen zu Lüttich (1926) annimmt.

2. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn Prof. Dr. G. Pólya in Zürich vor: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete.

Der Verfasser beweist darin den folgenden Satz: Es sei A eine beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge, deren Komplementärgebiet G zusammenhängend ist. Wenn τ die Robinsche Konstante von A ist, so ist der Flächeninhalt von A nicht größer als $\pi\tau^2$.

Zur Augenentwicklung der Beuteltiere.

Von F. Keibel.

Auf der Versammlung der französischen Anatomen in Lüttich berichtete 1926 Giuseppe Levi aus Turin über die Entwicklung der Cornea bei den Amnioten. Besonderes Interesse erwecken da seine Angaben über einen Beutelembryo von *Didelphys marsupialis* von 15 mm Länge. Er will bei ihm einen sehr eigenartigen Bau des Auges gefunden haben, der weit von dem der anderen Amnioten abweicht. Fig. 4 seines Vortrags, die ich hier als Fig. 1 wiedergebe, soll das beweisen. Hr. Giuseppe Levi hatte die Güte, mir die Wiedergabe seiner Abbildung zu gestatten und mir das Original seiner Figur dazu zur Verfügung zu stellen.

Ich beginne mit der Beschreibung der Figur 1.

Wie sich der von ihm in der Figur 1 (bzw. 4) abgebildete Zustand in den endgültigen umbildet, konnte Levi nicht verfolgen, da ihm als nächst älteres Stadium nur ein Fetus von *Didelphys* zur Verfügung stand, der eine Länge von 35 mm hatte.

Es ist mir nun nicht zweifelhaft, daß die Schwierigkeit, welche Levi findet, seine Befunde bei *Didelphys* mit denen bei anderen Wirbeltieren zu vergleichen, auf einer falschen Deutung beruht.

Wenn wir Levis Fig. 4 (hier als Fig. 1 wiedergeben) betrachten, so deute ich den Raum Ca., den Levi als vordere Augenkammer auffaßt, als einen Spaltraum innerhalb der Corneaanlage. Distal von ihm liegt das Epithel der Cornea, proximal die noch sehr dünne bindegewebige Anlage mit dem Descemetschen Endothel; eine Membrana pupillaris ist in der Figur Levis nicht zu erkennen. Ob die Spalte Sc. bei Levi die erste Anlage eines Konjunktivalsackes ist oder auch nur ein Schrumpfungsspalt, möchte ich dahingestellt sein lassen; es hat für die Deutung keine Wichtigkeit. Wenn wir von außen nach innen vorgehen, so haben wir:

1. die Oberfläche der verklebten Lidepidermis,
2. das verklebte Epithel selbst (Ep.),
3. die erste Andeutung eines Konjunktivalsackes (Sc.),
4. die Platte des Corneaepithels,
5. die Anlage der übrigen Cornea mit dem Descemetschen Endothel (E.); jetzt erst würde

6. die Anlage der vorderen Augenkammer kommen, doch ist von ihr noch nichts zu erkennen[1], und schließlich
7. auf der vorderen Fläche der Linse das Linsenepithel (Lep.).

Die Figur 2 gibt eine schematische Darstellung meiner Deutung, bei der der proximale Teil der Corneaanlage in seine natürliche Lage gebracht ist. Zwischen dem Descemetschen Endothel und dem Linsenepithel kommt dann ein Hohlraum zustande, der als die Stelle der Anlage der vorderen Augenkammer zu deuten ist, natürlich könnte es sich auch um einen durch

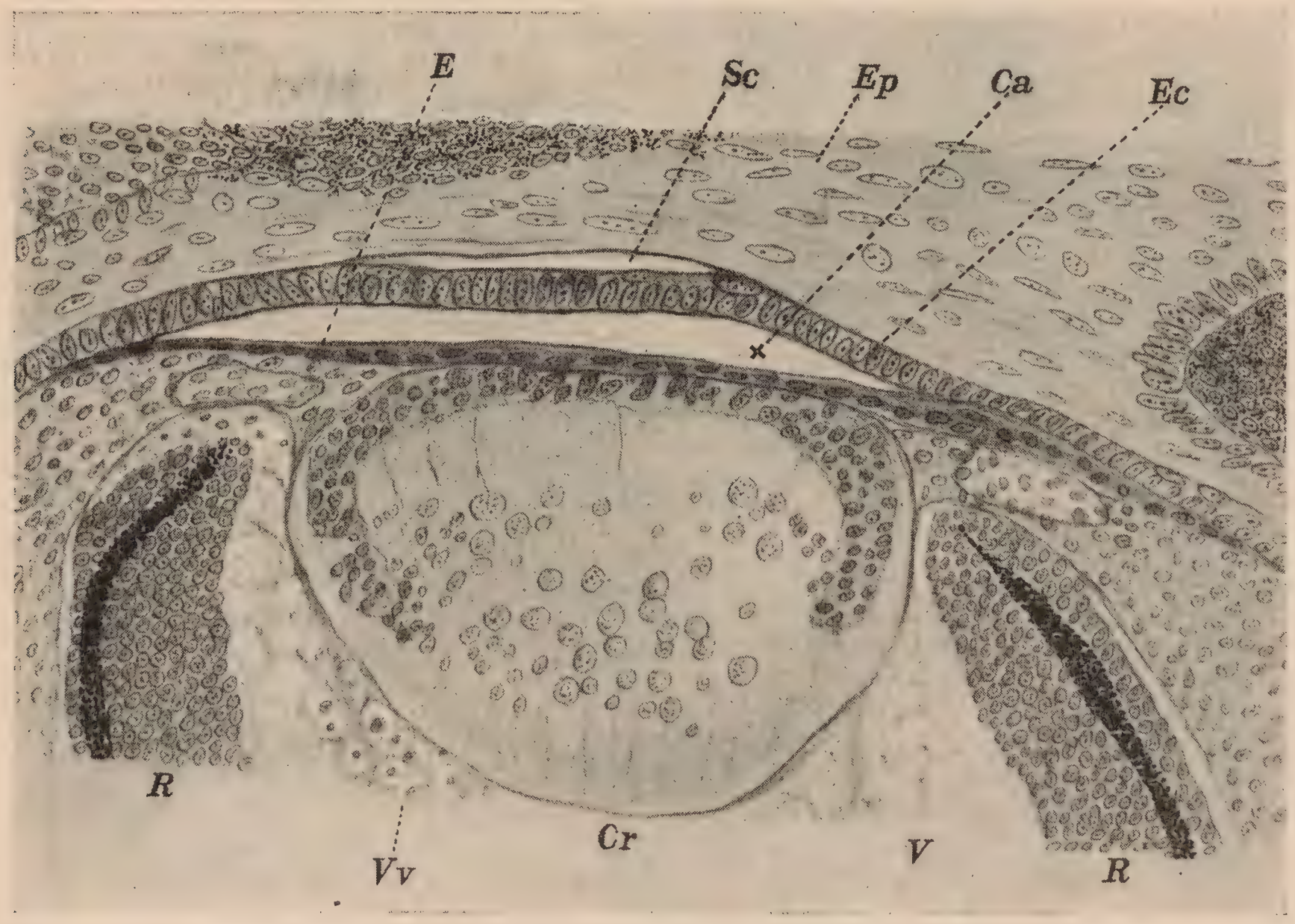


Fig. 1 (LEVIS Fig. 4). Schnitt durch einen Embryo von *Didelphys marsupialis* von 15 mm Länge, 370:1, nach GIUSEPPE LEVI (1926).

Ep.: épithélium des replis palpébraux; *Sc.*: sac conjunctival; *Ec.*: épithélium cornéen; *Ca.*: chambre antérieure de l'œil nach LEVI, in Wirklichkeit ein Spaltraum innerhalb des Corneagebietes; *E.*: assise endotheliale (membrane pupillaire primive) nach LEVI, in Wirklichkeit ein Teil der cornea mit dem Descemetschen Endothel; *R.*: rétine; *Cr.*: cristallin; *V.*: corps vitré; *Vv.*: vaisseaux du vitré.

Schrumpfung entstandenen Spalt handeln. (Man vergleiche die Figurenerklärung.)

Daß diese meine Deutung richtig ist, läßt sich durch eine Reihe von Schnitten beweisen, die durch die Augen verschiedener Stadien von Beuteltierembryonen geführt sind.

Es handelt sich um Schnitte durch Embryonen von *Perameles obesula* und *Phascolarctus cinereus* aus dem SEMONschen Material und um einen Embryo von *Didelphys aurita*, den mir Hr. Prof. ERNST BRESSLAU zur Verfügung gestellt hat. Prinzipiell wichtige Unterschiede dürften in der Entwicklung

[1] LEVI sagt: »La chambre antérieure de l'œil est donc, chez l'embryon de *Didelphys*, une fente entre l'épithélium cornéen (ectodermique) et un feuillet endothélial (mesenchymal, membrane pupillaire).«

der in Frage kommenden Verhältnisse zwischen den verschiedenen Marsupialiern nicht bestehen.

So gebe ich hier nur Schnitte durch eine Reihe von Peramelesembryonen, und zwar in Fig. 3a und Fig. 3b von einem Embryo von 15 mm Länge. Fig. 3a geht durch das ganze Auge und ist bei einer Vergrößerung von 50 : 1 wiedergegeben. Fig. 3b stellt nur den distalen Teil des Auges bei stärkerer Vergrößerung (200 : 1) dar. Die Spalträume sind von distal nach proximal

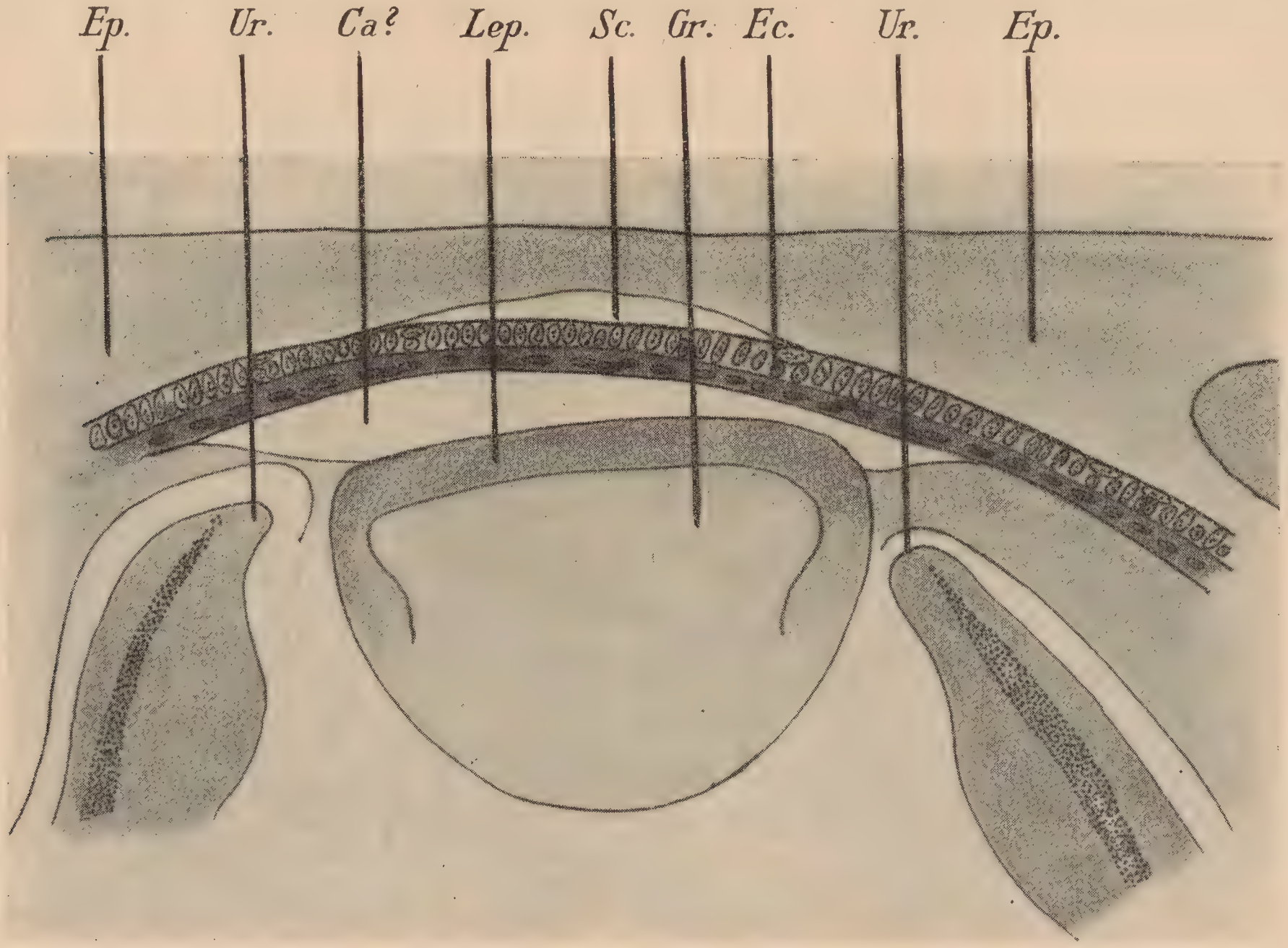


Fig. 2. Schema nach Fig. 1 entworfen. Die Schicht der Cornea mit den Zellen des Descemetschen Endothels ist an die Epithelschicht angelagert und dadurch der Spaltraum zum Verschwinden gebracht, den Levi irrtümlich als vordere Augenkammer auffaßt. Durch die Verlagerung der proximalen Corneaschicht (der Schicht mit den Descemetschen Zellen) ist nun ein anderer Hohlraum entstanden, der seiner Lage nach der vorderen Augenkammer entspricht, *Ca?*; ich habe ihn mit einem ? bezeichnet, weil er nicht ein wirklicher Raum zu sein braucht. Es wäre wohl möglich, daß in diesem Entwickelungsstadium im Leben kein Raum zwischen der Schicht der Descemetschen Zellen und der vorderen Fläche der Linse vorhanden war, und hier durch Schrumpfung bedingte Verhältnisse vorliegen; *Cr.*: die Linse; *Ec.*: Schicht des Cornealepithels; *Ep.*: das Epithel zwischen den Augenlidern; *Lep.*: Linsenepithel; *Sc.*: Conjunctivalsack; *Ur.*: Umschlagsrand des Augenbechers.

aufgeführt: 1. der konjunktivale Raum zwischen Epithel der Lider und Corneaepithel, 2. ein Spaltraum im Gebiet der Cornea und 3. ein Spaltraum zwischen Cornea und vorderer Fläche der Linse. Besonders auffallend ist die Schicht, auf der das Descemetsche Endothel sitzt. Sie erscheint als strukturlos, und auf den ersten Blick liegt es nahe, sie als Descemetsche Haut zu deuten, doch ist sie wohl die Anlage der ganzen Substantia propria der Cornea. Mesenchymzellen sind in ihr noch nicht nachzuweisen. Für Weiteres vergleiche man die Figurenerklärung.

Fig. 4a und 4b geben entsprechende Schnitte von einem Perameles-embryo von 18 mm Länge. Die Spalträume sind in distal-proximaler Rich-

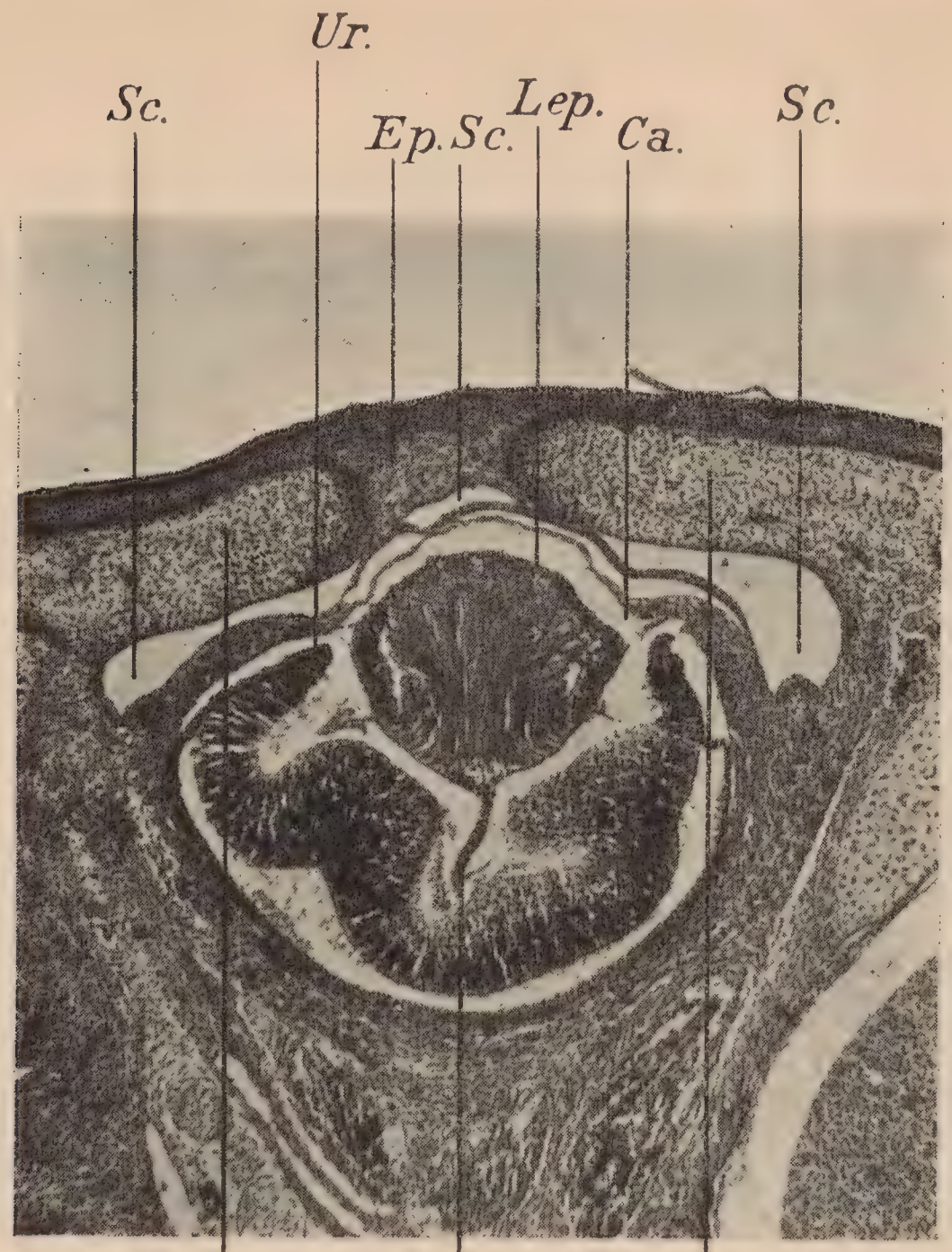


Fig. 3a (50:1). Schnitt durch das Auge eines Beuteldachsembryo (*Perameles obesula*) von 15 mm Länge.

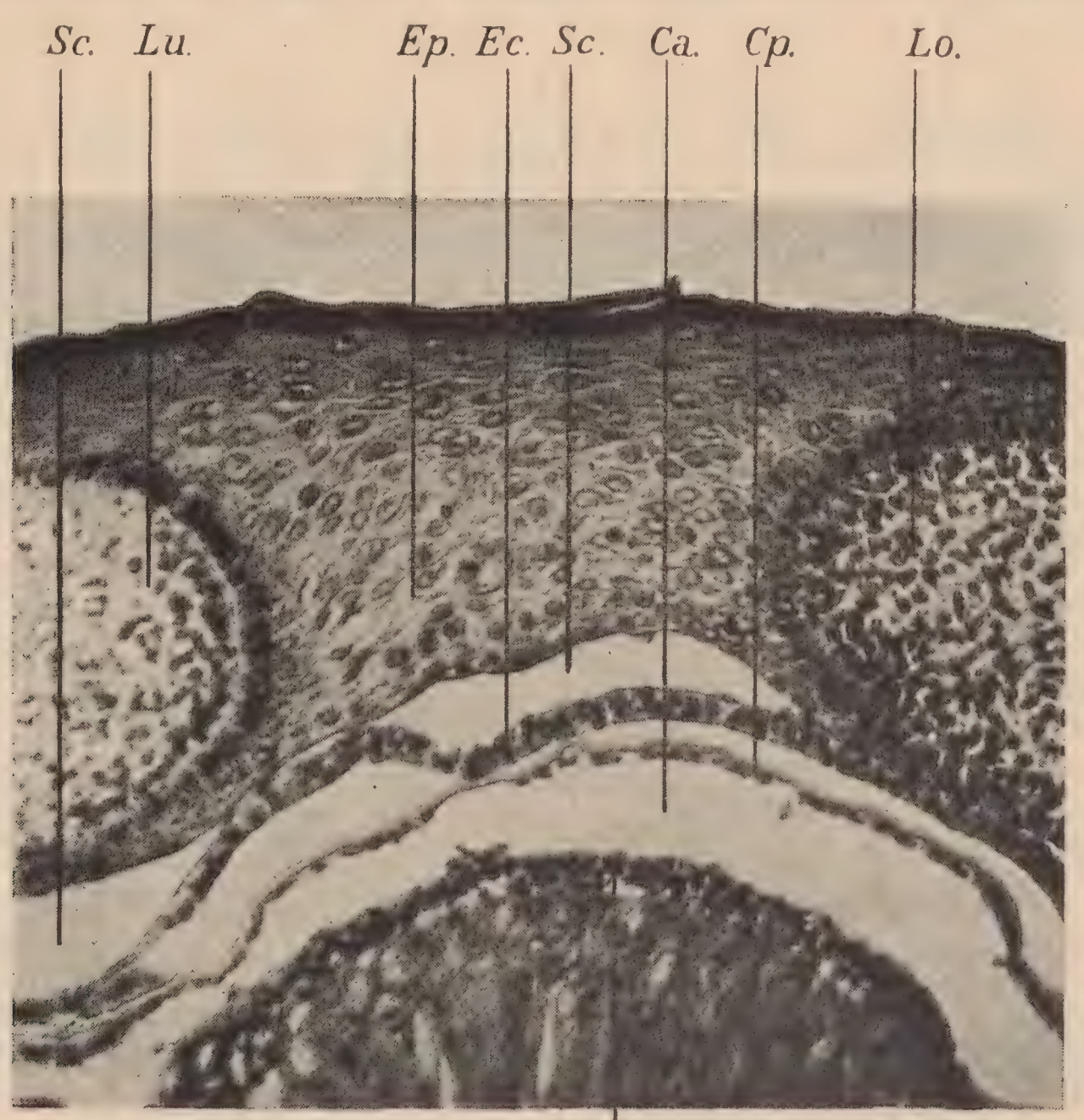


Fig. 3b (200:1). Ein Teil dieses Schnittes bei stärkerer Vergrößerung. *Ahy.*: Arteria hyaloïdea; *Ca.*: Stelle der vorderen Kammer; *Cp.*: proximaler Teil der Cornea mit Descemetschem Endothel; *Ec.*: Corneaepithel; *Ep.*: das Epithel zwischen den Augenlidern; *Lep.*: Linsenepithel; *Lo.*: oberes Lid; *Lu.*: unteres Lid; *Sc.*: Conjunctivalsack; *Ur.*: Umschlagsrand des Augenbechers.

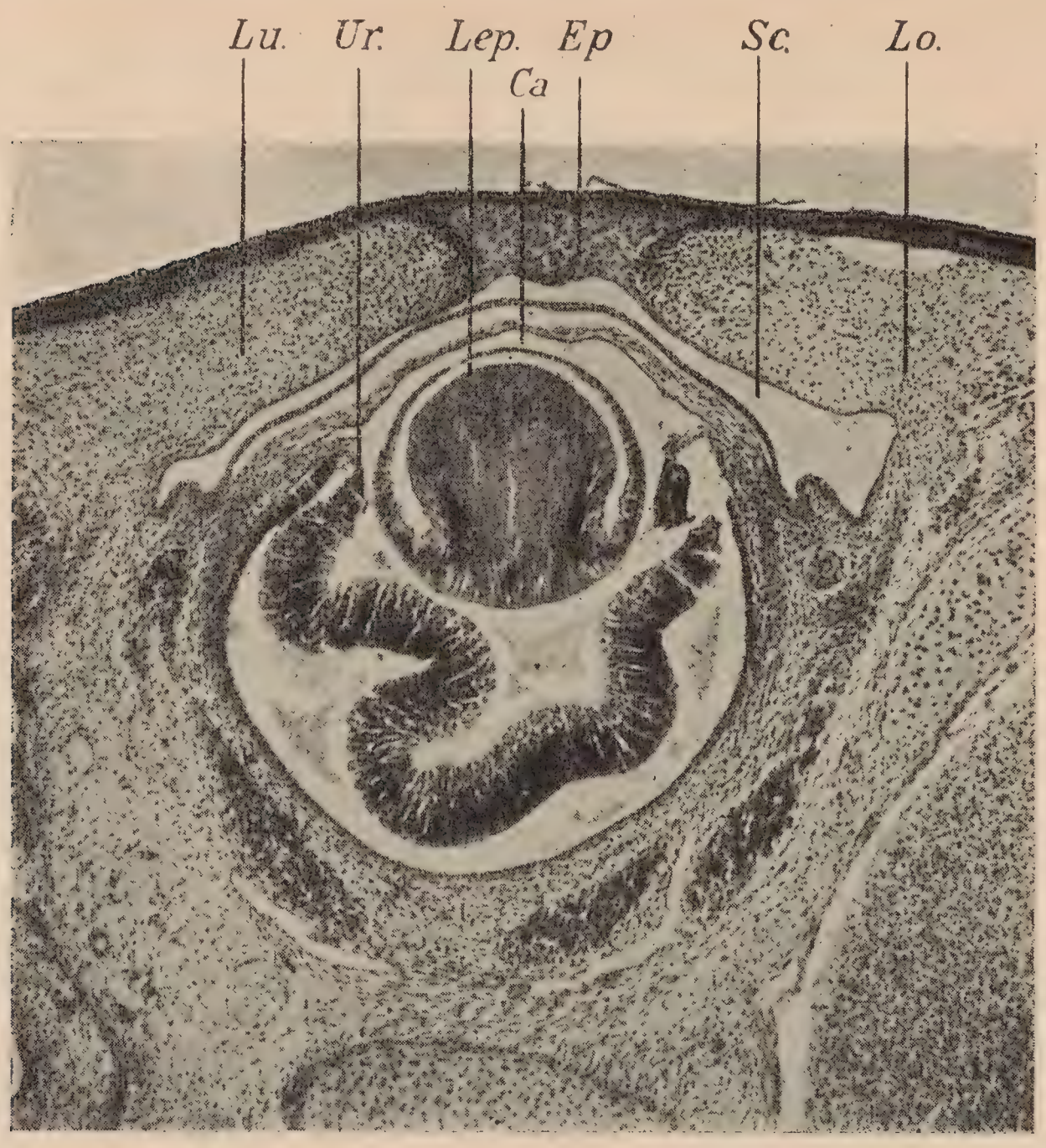


Fig. 4a (50:1). Schnitt durch das Auge eines Beuteldachsembryo (*Perameles obesula*) von 18 mm Länge.

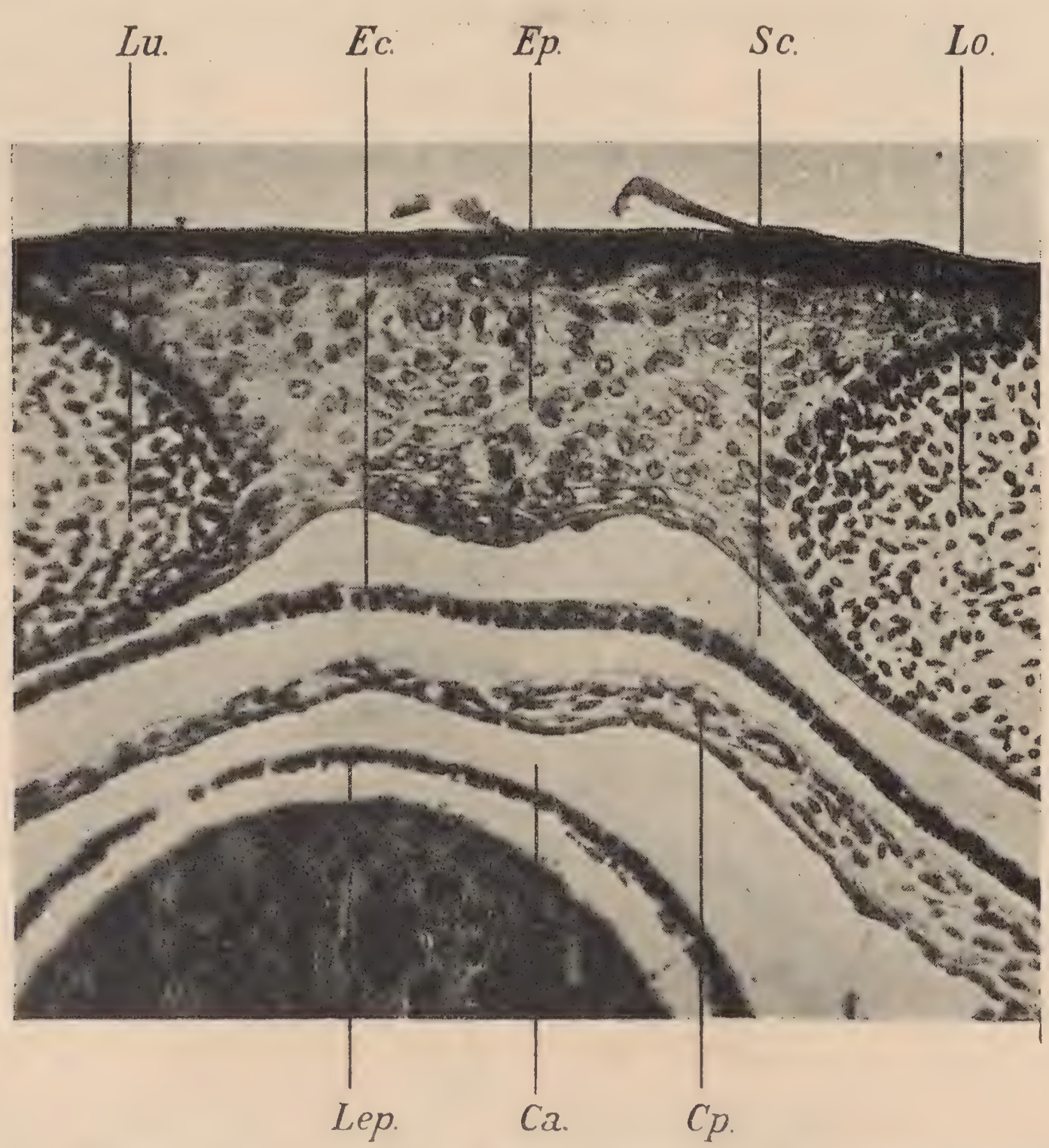


Fig. 4b (200:1). Ein Teil dieses Schnittes stärker vergrößert. *Cp.*: proximaler Teil der Cornea (Substantia propria + Descemetsches Endothel); auch sonst Beschriftung wie in Fig. 3a und 3b.

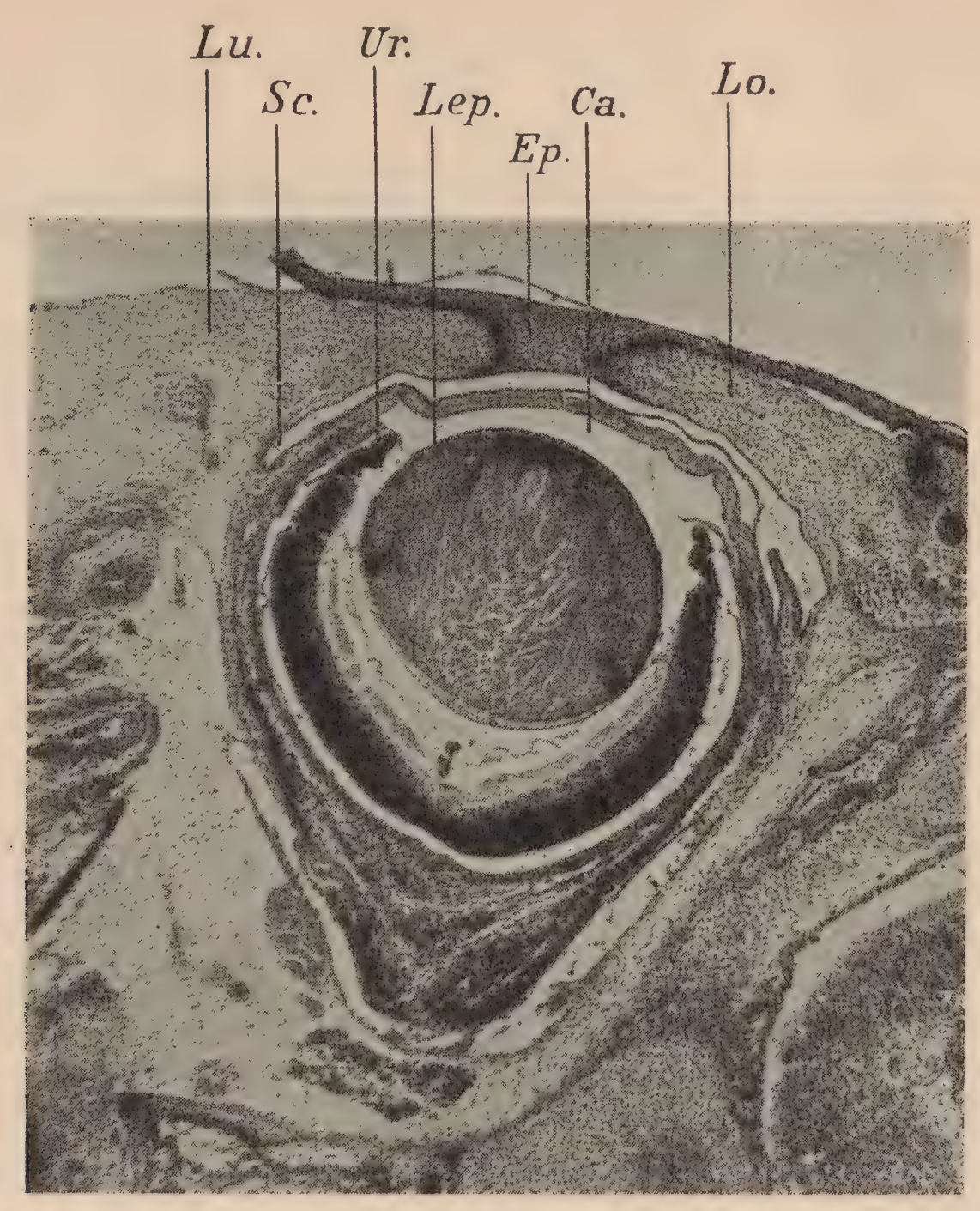


Fig. 5a (30 : 1). Schnitt durch das Auge eines Beuteldachsembryo (*Perameles obesula*) von 21 mm.

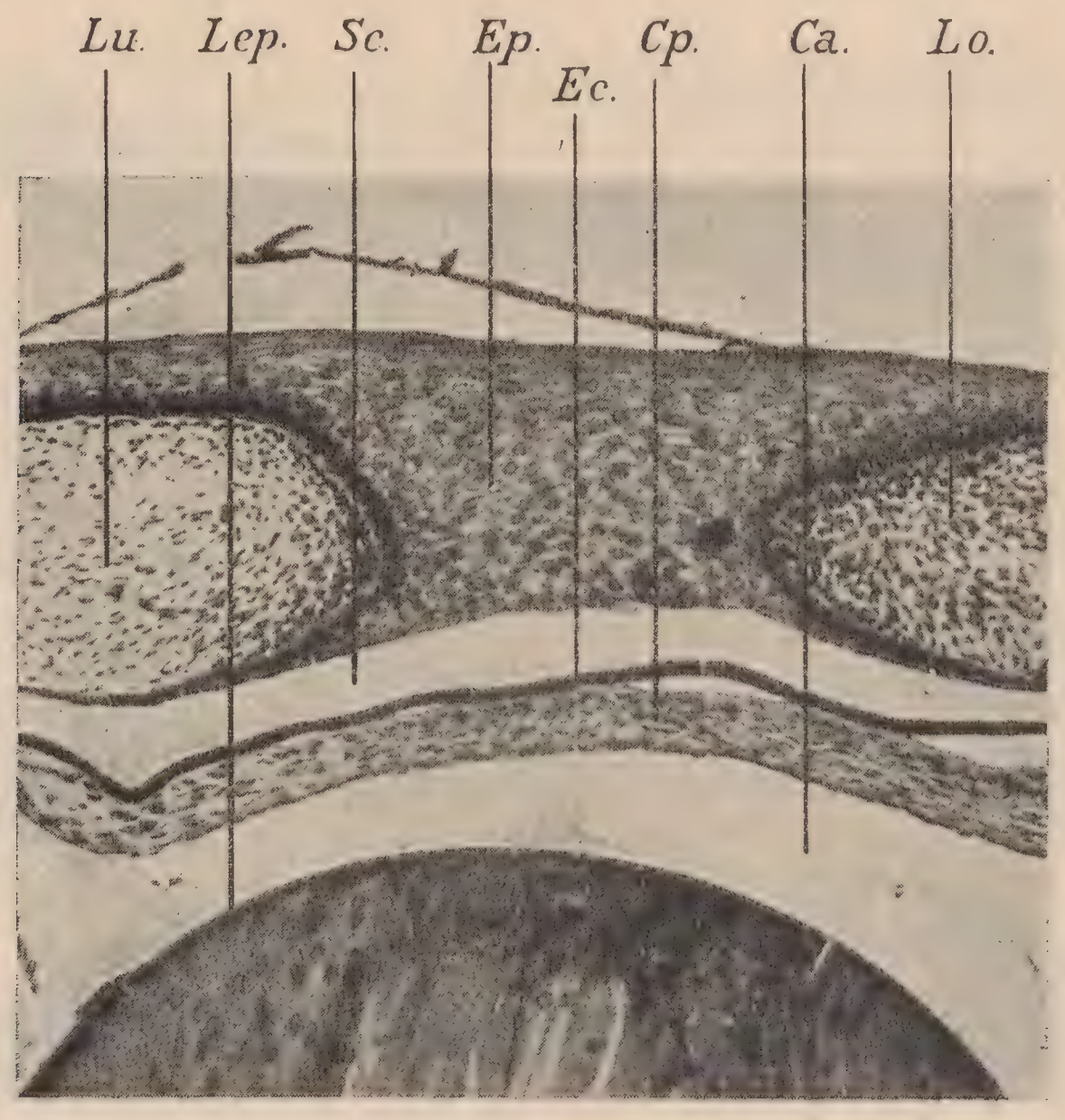


Fig. 5b. Ein Teil des gleichen Schnittes bei stärkerer Vergrößerung. *Ca.*: vordere Kammer; *Cp.*: proximaler Teil der Cornea (Substantia propria + Descemetsches Endothel). Auch sonst Beschriftung wie bei Fig. 3a und 3b.

Fig. 6a (30:1). Schnitt durch das Auge eines Beuteldachsembryo (*Perameles obesula*) von 28 mm

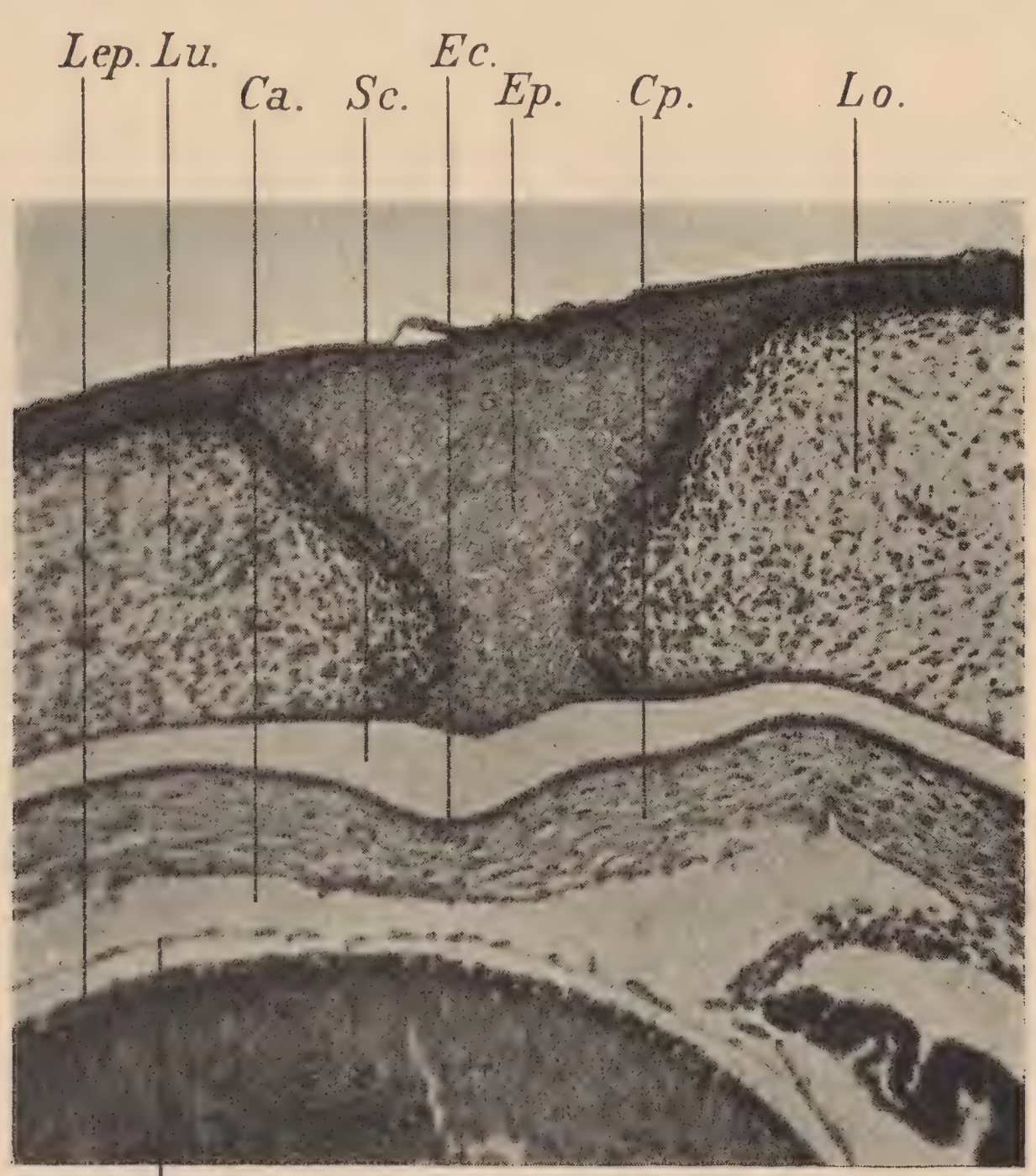


Fig. 6b (200:1). Ein Teil dieses Schnittes bei stärkerer Vergrößerung. *Cp.*: proximaler Teil der Cornea (Substantia propria + Descemetsches Endothel); *Ec.*: Corneaepithel; *Ca.*: vordere Kammer; *Mp.*: Membrana pupillaris. Sonst Beschriftung wie Fig. 3a und 3b.

tung: 1. der nun gut ausgebidete Konjunktivalsack, 2. ein Spaltraum zwischen Corneaepithel und Substantia propria der Cornea und 3. ein Raum zwischen Descemetschem Endothel und der vorderen Fläche der Linse, das ist die vordere Augenkammer. Der Konjunktivalsack ist noch durch die miteinander verklebten Lider von der Außenwelt abgeschlossen, doch werden in dem verklebten Lidepithel bereits Verhornungsvorgänge deutlich. Die Anlage einer Nickhaut ist zu erkennen.

Das Epithel der Cornea ist zweiseitig. Die distale, dem Konjunktivalsack zugekehrte Schicht besteht aus ganz niedrigen, in einer Lage angeordneten Zellen; unter ihnen liegt eine Schicht etwa kubischer Zellen. Die Substantia propria der Cornea enthält bereits viele Zellen. Eine deutliche Membrana Descemeti ist nicht zu erkennen, dagegen ist das Descemetsche Endothel gut ausgebildet. Zwischen dem Descemetschen Endothel und dem Linsenepithel liegt die vordere Augenkammer. Das Linsenepithel hat sich etwas von den Linsenfasern abgehoben. Im übrigen vergleiche die Figurenerklärung.

Ich lasse jetzt entsprechende Abbildungen von einem Peramelesembryo von 21 mm Länge folgen: Fig. 5a und 5b. Fig. 5a ist 30mal vergrößert und Fig. 5b, ein Teil von Fig. 5a, 200mal.

Der Konjunktivalsack ist auch hier noch nach außen abgeschlossen. Eine Membrana nictitans ist gut entwickelt. Das Corneaepithel liegt zum großen Teil der Substantia propria der Cornea fest auf. Nur teilweise findet sich zwischen Corneaepithel und Substantia propria ein Spaltraum. Die Substantia propria ist zellenreich, eine Bowmansche und eine Descemetsche Haut ist nicht zu erkennen, aber das Descemetsche Epithel ist deutlich. Die vordere Augenkammer ist gut ausgebildet. Das Linsenepithel liegt den Linsenfasern dicht auf.

Zum Schluß gebe ich Abbildungen von einem Schnitt durch einen Peramelesembryo von 28 mm Länge. Fig. 6a ist 30mal, Fig. 6b 250mal vergrößert.

Die Augenlider sind auch hier noch verklebt und dadurch der Konjunktivalsack nach außen abgeschlossen. Das Corneaepithel liegt in ganzer Ausdehnung der gut entwickelten Substantia propria auf.

Bowmansche und Descemetsche Membran sind nicht zu erkennen, wohl aber das Descemetsche Endothel. Zwischen der vorderen Augenkammer und der distalen Wand der Linse läßt sich eine Pupillarmembran nachweisen.

Durch die eben dargestellten Schnitte ist wohl der Beweis geliefert, daß die Augenentwicklung bei den Marsupialiern im wesentlichen ebenso verläuft wie bei den anderen Amnioten.

Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete.

(Zweite Mitteilung [1]).

Von Prof. Dr. G. Pólya
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Man verdankt Hrn. Bieberbach [2] die Kenntnis der folgenden, für den Beweis des Verzerrungssatzes wichtigen Tatsache: *Wird ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet* $\mathfrak{G}$, *welches den unendlich fernen Punkt im Innern enthält, durch eine Funktion, deren Entwicklung um* $z = \infty$ *mit* $z + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots$ *beginnt, auf das Äußere eines Kreises vom Radius* τ *schlicht abgebildet, so ist der Flächeninhalt des zu* $\mathfrak{G}$ *komplementären Bereiches* $\leqq \pi \tau^2$. Die Ausdehnung dieses Satzes auf mehrfach zusammenhängende Bereiche läßt sich mit den in meiner vorangehenden Mitteilung [1] verwendeten Bezeichnungen so aussprechen:

I. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine beschränkte und abgeschlossene ebene Punktmenge, deren Komplementärgebiet* $\mathfrak{G}$ *zusammenhängend ist. Wenn* τ *die* Robinsche *Konstante (der transfinite Radius) von* $\mathfrak{A}$ *ist, so ist der Flächeninhalt von* $\mathfrak{A}$ *nicht größer als* $\pi \tau^2$.

Unter »Flächeninhalt« wird hierin das äußere Jordansche Maß der Punktmenge $\mathfrak{A}$ verstanden (dieser Flächenbegriff führt hier zu der schärfsten Fassung). Satz I läßt sich, auf Grund der im analogen Falle meiner ersten Mitteilung angegebenen Schlüsse, sofort auf den folgenden zurückführen:

II. *Es sei* $F(z) = z^n + \cdots$ *ein Polynom vom Grade* n *und höchstem Koeffizienten* 1. *Man bezeichne mit* $\mathfrak{F}_R$ *die Menge derjenigen komplexen Zahlen* z, *für welche*

$$|F(z)| \leqq R$$

gilt und mit $|\mathfrak{F}_R|$ *den Flächeninhalt von* $\mathfrak{F}_R$. *Dann ist*

$$|\mathfrak{F}_R| \leqq \pi R^{\frac{2}{n}},$$

und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann erreicht, wenn $F(z) = (z - c)^n$ *mit konstantem* c *ist.*

---

[1] Vgl. diese Sitzungsberichte 18 (1928) S. 228—232.

[2] Diese Sitzungsberichte 38 (1916) S. 940—955, insbesondere Satz II auf S. 943. Ich lasse unerwähnt die von Hrn. Bieberbach miterhaltene volle Diskussion des Falles der Gleichheit, da deren Verallgemeinerung hier noch nicht gegeben wird.

Satz II besagt, daß die Fläche $|\mathfrak{F}_R|$ ein Maximum ist, wenn die Nullstellen von $F(z)$ alle zusammenfallen. Satz II ist nur ein Spezialfall von Satz I: Die zum Punkt $z = \infty$ gehörige Greensche Funktion des Komplementärgebietes von $\mathfrak{F}_R$ ist

$$\frac{1}{n} \log |F(z)\, R^{-1}| = \log |z| - \log \sqrt[n]{R} + \cdots,$$

und die Robinsche Konstante (= transfiniter Durchmesser) von $\mathfrak{F}_R$ ist somit $\sqrt[n]{R}$. Umgekehrt entsteht I aus II, indem die allgemeine Punktmenge $\mathfrak{A}$ durch passende $\mathfrak{F}_R$ angenähert wird.

Die Kenntnis der Sätze I und II verdanke ich Hrn. G. Szegö, der sie mir vor längerer Zeit als Vermutung mitgeteilt hat. Ich gebe für Satz II einen Beweis, der sich dem Gedankengang von Hrn. Bieberbach a. a. O. anschließt und zugleich ergibt, daß $|\mathfrak{F}_R| R^{-\frac{2}{n}}$ *eine wachsende Funktion von* R ist.

Man betrachte die Umkehrfunktion der ganzen rationalen Funktion $F(z)$, indem man

$$Z = F(z), \quad z = f(Z)$$

setzt. Die algebraische Funktion $f(Z)$ hat höchstens $n-1$ Verzweigungspunkte; nehmen wir an, daß der Kreis

$$|Z| = R \tag{1}$$

durch keinen dieser Verzweigungspunkte hindurchgeht; $R > 0$. Dann besteht die Begrenzung von $\mathfrak{F}_R$ aus gewissen doppelpunktlosen geschlossenen Kurven $\mathfrak{C}_1, \cdots \mathfrak{C}_\lambda, \cdots \mathfrak{C}_l$, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Es ist $1 \leqq l \leqq n$, und jeder Punkt auf und innerhalb $\mathfrak{C}_\lambda$ gehört zu $\mathfrak{F}_R$, $\lambda = 1, 2, \cdots l$.

Es liegen in $\mathfrak{C}_\lambda$ Nullstellen von $F(z)$, deren Anzahl, mit Multiplizität gerechnet, m sei, $1 \leqq m \leqq n$. Wenn z die Kurve $\mathfrak{C}_\lambda$ im positiven Sinne einmal beschreibt, muß Z den Kreis (1) stets im positiven Sinne fortschreitend m mal beschreiben ($\mathfrak{C}_\lambda$ ist eine Niveaukurve von $|F(z)|$, und die Änderung von $\log Z = \log F(z)$ gibt die Nullstellenanzahl von $F(z)$ an). Daher besitzt derjenige Zweig von $z = f(Z)$, der durch die Punkte von $\mathfrak{C}_\lambda$ dargestellt ist, wenn Z auf dem Kreis (1) variiert, eine Entwicklung von der Form

$$z = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \sqrt[m]{Z^k}, \tag{2}$$

die auf dem Kreisrand (1) absolut konvergiert. Daher ist der von $\mathfrak{C}_\lambda$ umschlossene Flächeninhalt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \Im\, \bar{z}\, dz &= \frac{1}{2}\Re \int \bar{z}\, \frac{dz}{dZ}\, Z\, d\Phi \\
&= \frac{1}{2}\Re \int_0^{2\pi m} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \bar{a}_h \sqrt[m]{R^h}\, e^{-\frac{ih\Phi}{m}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{m} a_k \sqrt[m]{R^k}\, e^{\frac{ik\Phi}{m}}\, d\Phi \\
&= \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\, |a_k|^2 \sqrt[m]{R^{2k}}
\end{aligned}$$

(es wurde $Z = R e^{i\varphi}$ gesetzt). Es ist $|\mathfrak{F}_R|$ die Summe von l analogen Flächeninhalten, also

$$(3) \qquad \frac{|\mathfrak{F}_R|}{\pi R^{\frac{2}{n}}} = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \,|\, a_k \,|^2 \, R^{\frac{2k}{m} - \frac{2}{n}} .$$

Ist insbesondere R so groß, daß $l = 1$, $\lambda = 1$, $m = n$ ausfällt, so ist

$$(2') \qquad z = Z^{\frac{1}{n}} + a_0 + a_1 Z^{-\frac{1}{n}} + a_2 Z^{-\frac{2}{n}} + \cdots ,$$

$$(3') \qquad \frac{|\mathfrak{F}_R|}{\pi R^{\frac{2}{n}}} = 1 - |\, a_1 \,|^2 R^{-\frac{4}{n}} - 2 \,|\, a_2 \,|^2 R^{-\frac{6}{n}} - \cdots .$$

In der Summe rechts unter (3) nehmen alle nichtverschwindenden Glieder mit wachsendem R zu, abgesehen von dem Falle, in welchem $k = 1$ und zugleich $m = n$ (also $l = 1$) ist; denn, falls $k \neq 0$ ist und der genannte Ausnahmefall nicht eintritt, haben

$$k \text{ und } \frac{2k}{m} - \frac{2}{n}$$

das nämliche Vorzeichen, da doch $1 \leqq m \leqq n$. Also nimmt, abgesehen vom Falle, in welchem

$$z = a_0 + a_1 Z^{\frac{1}{n}}$$

ist, das Verhältnis (3) mit wachsendem R ständig zu und strebt ständig zunehmend, wie (3′) zeigt, gegen den Grenzwert 1. W. z. b. w.

Verallgemeinerungen des JORDANschen Kurvensatzes und stetige Winkelfunktionen.

Von Prof. Dr. E. KAMKE
in Tübingen

(Vorgelegt von Hrn. ERHARD SCHMIDT am 22. März 1928 [s. oben S. 95].)

Hr. E. SCHMIDT[1] hat vor einiger Zeit einen Beweis des JORDANschen Kurvensatzes gegeben, »der sich in konsequenter und einheitlicher Weise auf den Begriff der Charakteristik stützt«. Hier soll gezeigt werden, daß diese Methode — die veränderte Sachlage wird allerdings Abänderungen bedingen — ihre Kraft auch beim Beweis gewisser allgemeinerer Sätze bewährt, die mit den beiden JORDANschen Kurvensätzen in enger Beziehung stehen.

Wird ein Kontinuum[2] *einfach zusammenhängend* genannt, wenn die Komplementärmenge ein einziges Gebiet bildet, dagegen *zweifach zusammenhängend*, wenn die Koplementärmenge in genau zwei elementenfremde Gebiete zerfällt, so können jene Sätze folgendermaßen formuliert werden:

I. *Sind* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *zwei einfach zusammenhängende Kontinua, deren Durchschnitt* $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ *eine einzige (nicht leere) zusammenhängende Menge ist, so ist* $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ *ebenfalls ein einfach zusammenhängendes Kontinuum.*

II. *Besteht der Durchschnitt von* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *dagegen aus genau zwei elementenfremden Kontinuen, so ist* $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ *ein zweifach zusammenhängendes Kontinuum.*

Satz I und ein Teil von Satz II sind — auf andere Art — zuerst von Z. JANISZEWSKI[3] und der Rest des Satzes II von Hrn. ST. STRASZEWICZ[4] bewiesen. Aus II folgt natürlich der Satz über die *geschlossene* JORDAN-Kurve, sobald der

[1] *Über den JORDANschen Kurvensatz* [Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 28 (1923) 318—329].

[2] Es werden folgende Bezeichnungen benutzt:

Unter einem *Kontinuum* wird eine beschränkte abgeschlossene und zusammenhängende Menge verstanden.

Eine beschränkte und abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ heißt *zusammenhängend*, wenn sich je zwei ihrer Punkte P und Q für jedes $\varepsilon > 0$ innerhalb $\mathfrak{M}$ durch eine ε-Kette verbinden lassen, d. h. wenn es eine endliche Anzahl von Punkten P_ν in $\mathfrak{M}$ gibt, so daß in der von P zu Q führenden Punktkette

$$P = P_0, P_1, \cdots, P_p = Q$$

der Abstand zweier aufeinanderfolgender Punkte kleiner als ε ist.

[3] *Sur les coupures du plan faites par les continus* [Prace matematyczno-fizyczne 26 (1915) 11—63]; polnisch.

[4] *Über eine Verallgemeinerung des JORDANschen Kurvensatzes* [Fundamenta mathematicae 4 (1923) 128—135].

Satz über die *offene* JORDAN-Kurve bewiesen ist. Sowohl dieser Satz als auch Satz I werden sich aber als einfache Folgerungen aus einem in § 2 zu beweisenden Satz ergeben, der daher auch an sich von Interesse zu sein scheint. Im § 5 wird als Anwendung der in den vorangehenden Paragraphen entwickelten Sätze noch eine weitere Verallgemeinerung des JORDANschen Kurvensatzes bewiesen.

§ 1.

Allgemeines über stetige Winkelfunktionen.

1. In der Ebene sei ein positiver Drehungssinn festgelegt. $\mathfrak{C}$ sei ein Kontinuum und Z ein nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörender Punkt. Bei Beachtung des Drehungssinns ist für je zwei Punkte A und P von $\mathfrak{C}$ der Winkel[1] AZP bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π festgelegt. Diese willkürlichen Vielfachen von 2π mögen so bestimmt werden[2], daß eine mit P sich stetig ändernde Winkelfunktion $\phi(A, Z, P)$ entsteht. Diese Funktion, bei der $\mathfrak{C}$ der Variabilitätsbereich von P ist, soll eine *stetige Winkelfunktion* des Kontinuums $\mathfrak{C}$ für den Scheitelpunkt Z und den Anfangspunkt A heißen. Sie erfüllt also die Bedingungen:

$$\phi(A, Z, P) \equiv AZP \pmod{2\pi},$$
$$\phi(A, Z, A) = O,$$
$\phi(A, Z, P)$ ist eine stetige Funktion von P.

Bei festem A und Z gibt es höchstens eine stetige Winkelfunktion $\phi(A, Z, P)$ für das Kontinuum $\mathfrak{C}$.

Das folgt daraus, daß die Differenz zweier solcher Funktionen als Werte nur ganzzahlige Vielfache von 2π annimmt und für $P = A$ den Wert O hat.

2. *Gibt es für den Scheitelpunkt Z und das Kontinuum $\mathfrak{C}$ eine stetige Winkelfunktion $\phi(A, Z, P)$ mit dem Anfangspunkt A, so gibt es für jeden beliebigen Punkt B von $\mathfrak{C}$ als Anfangspunkt eine stetige Winkelfunktion $\phi(B, Z, P)$, und zwar ist*

$$\phi(B, Z, P) = \phi(A, Z, P) - \phi(A, Z, B). \tag{1}$$

Ferner gelten allgemein die Rechenregeln

$$\phi(A, Z, B) = -\phi(B, Z, A), \tag{2}$$

$$\phi(A, Z, B) + \phi(B, Z, C) = \phi(A, Z, C). \tag{3}$$

Denn die rechte Seite von (1) ist stetig, hat für $P = B$ den Wert O, und ist mod. 2π kongruent zu $AZP - AZB = BZP$; sie ist also *eine* und nach Nr. 1 daher *die* stetige Winkelfunktion mit dem Anfangspunkt B. Schließlich folgen (2) und (3) aus (1) für $P = A$ bzw. $P = C$.

---

[1] Die Winkel werden hier stets durch einfaches Aneinanderreihen dreier Buchstaben bezeichnet; der erste Buchstabe bestimmt dabei die Ausgangslage des Schenkels bei der Winkeldrehung. Ist keine besondere Festsetzung getroffen, so kann der Winkel beliebig normiert werden.

[2] Wann das möglich ist, wird im folgenden untersucht werden.

3. *Wenn das Kontinuum $\mathfrak{C}$ für den Scheitelpunkt Z_0 eine stetige Winkelfunktion $\phi(A, Z_0, P)$ besitzt, so hat es eine solche auch für jeden Punkt Z als Scheitelpunkt, welcher der $\frac{1}{2}$ d-Umgebung von Z_0 angehört; dabei bezeichnet d den Abstand des Punktes Z_0 von $\mathfrak{C}$.*

Denn aus den Voraussetzungen $\overline{AZ_0} \geqq d$, $\overline{PZ_0} \geqq d$, $\overline{ZZ_0} < \frac{1}{2} d$ folgt $\overline{AZ} > \frac{1}{2} d$ und $\overline{PZ} > \frac{1}{2} d$. Daher können die Winkel Z_0PZ und ZAZ_0 so normiert werden, daß sie dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sind. Es wird nun behauptet, daß

$$\phi(A, Z, P) = \phi(A, Z_0, P) + Z_0PZ + ZAZ_0 \tag{4}$$

bei der angegebenen Normierung der beiden letzten Winkel eine stetige Winkelfunktion für den Scheitelpunkt Z ist. In der Tat ist die Funktion für jeden Punkt P von $\mathfrak{C}$ definiert. Ferner ist

$$PZA + ZAZ_0 + AZ_0P + Z_0PZ \equiv O \pmod{2\pi},$$

also wegen (4):

$$\phi(A, Z, P) \equiv AZP \pmod{2\pi}.$$

Weiter ist wegen (4) auch $\phi(A, Z, A) = O$, und schließlich ergibt sich die Stetigkeit von $\phi(A, Z, P)$ in bezug auf P daraus, daß $\phi(A, Z_0, P)$ nach Voraussetzung und Z_0PZ bei der Normierung $|Z_0PZ| < \frac{1}{2}\pi$ offensichtlich stetig ist.

4. Es sei ein Kontinuum $\mathfrak{C}$ gegeben. Dann gibt es einen Kreis, so daß $\mathfrak{C}$ von allen Punkten außerhalb dieses Kreises unter einem spitzen Winkel erscheint. Wird dieser Winkel AZP so normiert, das er dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so ist er eine stetige Winkelfunktion $\phi(A, Z, P)$. Bei Beachtung von Nr. 3 ergibt sich hieraus:

Die Menge $\mathfrak{Z}$ aller Punkte Z, die Scheitelpunkte stetiger Winkelfunktionen von $\mathfrak{C}$ sind, ist offen und enthält alle hinreichend fernen Punkte; ferner ist

$$\lim_{Z \to \infty} \phi(A, Z, P) = 0$$

gleichmäßig in allen Punkten A und P des Kontinuums $\mathfrak{C}$.

5. *Die Funktion $\phi(A, Z, P)$ ist sogar eine stetige Funktion der drei Variabeln A, P, Z innerhalb deren Variabilitätsbereiche $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{Z}$.*

Denn es seien A_0, A, P_0, P Punkte aus $\mathfrak{C}$ und Z_0, Z Punkte aus $\mathfrak{Z}$. Nach den Rechenregeln von Nr. 2 ist

$$\phi(A, Z, P) - \phi(A_0, Z_0, P_0) = \phi(A, Z, P) - \phi(A, Z_0, P) - \phi(A_0, Z_0, A) - \phi(P, Z_0, P_0).$$

Da ϕ in bezug auf die Punkte von $\mathfrak{C}$ stetig ist, sind die beiden letzten Glieder der rechten Seite ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$, falls A und P in einer hinreichend kleinen Umgebung von A_0 bzw. P_0 liegen. Bezeichnet d den Abstand des Punktes Z_0 von $\mathfrak{C}$ und wird Z auf die $\frac{1}{2}d$-Umgebung von Z_0 beschränkt, so ist nach Nr. 3, (4)

$$\phi(A, Z, P) - \phi(A, Z_0, P) = Z_0PZ + ZAZ_0$$

mit $|Z_0PZ| < \frac{1}{2}\pi$, $|ZAZ_0| < \frac{1}{2}\pi$. Auch hier ist jedes Glied der rechten Seite dem absoluten Betrage nach kleiner als ε, wenn A, P, Z auf hinreichend kleine Umgebungen von A_0, P_0, Z_0 beschränkt sind. Damit ist die Stetigkeit bewiesen. Bei Beachtung der Limesrelation von Nr. 4 folgt daraus weiter mit der üblichen Schlußweise:

Bezeichnet $\mathfrak{Z}_1$ die Teilmenge der Punkte von $\mathfrak{Z}$, die von $\mathfrak{C}$ einen festen Mindestabstand $d > 0$ haben, so ist $\phi(A, Z, P)$ eine gleichmäßig stetige Funktion der drei Variabeln A, P, Z innerhalb der Variabilitätsbereiche $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{Z}_1$.

6. Endlich sei noch folgender Hifssatz angeführt:

Ist Z Scheitelpunkt einer stetigen Winkelfunktion $\phi(A, Z, P)$ des Kontinuums $\mathfrak{C}$ und hat die Strecke $\overline{ZY}$ keinen Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam, so gibt es auch für Y als Scheitelpunkt eine stetige Winkelfunktion von $\mathfrak{C}$.

Denn ist d der Abstand der Strecke ZY von $\mathfrak{C}$, so kann man diese Strecke so in endlich viele Teile zerlegen, daß jeder Teil kleiner als $\frac{1}{2}d$ ist. Die wiederholte Anwendnng von Nr. 3 ergibt dann nach und nach die Richtigkeit der Behauptung für sämtliche Teilpunkte und schließlich für Y.

§ 2.

Über einfach zusammenhängende Kontinua.

1. *Ist $\mathfrak{C}$ ein einfach zusammenhängendes Kontinuum, so ist jeder Punkt Z der Komplementärmenge von $\mathfrak{C}$ Scheitelpunkt einer stetigen Winkelfunktion von $\mathfrak{C}$.*

Denn es sei Z ein nach § 1, 4 vorhandener Scheitelpunkt einer stetigen Winkelfunktion von $\mathfrak{C}$ und Y ein beliebiger Punkt der Komplementärmenge von $\mathfrak{C}$. Da $\mathfrak{C}$ einfach zusammenhängt, kann Z mit Y innerhalb der Komplementärmenge durch einen endlichen Streckenzug verbunden werden. Die wiederholte Anwendung von § 1, 6 ergibt dann die Behauptung.

Von dem eben bewiesenen Satz gilt aber auch die Umkehrung, und gerade diese Tatsache ist, wie sich im folgenden zeigen wird, ein sehr angenehmes Hilfsmittel, wenn es sich darum handelt, von gewissen Kontinuen nachzuweisen, daß sie einfach zusammenhängen. Für den Beweis der Umkehrung werden zwei Hilfssätze vorausgeschickt, die mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung gleich allgemeiner gehalten sind, als für den vorliegenden Zweck nötig wäre.

2. *Es sei ein Kontinuum* $\mathfrak{C}$ *und eine Zahl* $\delta > 0$ *gegeben. Dann gibt es endlich viele geschlossene einfache Kreisbogenpolygone* $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_n$ $(n \geqq 0)$ *mit folgenden Eigenschaften*[1]*:*

a) $\mathfrak{P}_0$ *besteht aus endlich vielen nach außen konvexen und jedes der übrigen* $\mathfrak{P}_\nu$*, wenn diese vorhanden sind, aus endlich vielen nach außen konkaven Kreisbogen*[2]*;*

b) *die* $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_n$ *liegen außereinander und innerhalb* $\mathfrak{P}_0$*;*

c) $\mathfrak{C}$ *liegt innerhalb* $\mathfrak{P}_0$ *und außerhalb der andern* $\mathfrak{P}_\nu$*;*

d) *die Mittelpunkte der Kreise, welche die Begrenzung von* $\mathfrak{P}_0, \cdots, \mathfrak{P}_n$ *bilden, gehören zu* $\mathfrak{C}$*, und die Radien sind höchstens* δ*;*

e) *jeder innerhalb* $\mathfrak{P}_0$ *und zugleich außerhalb der andern* $\mathfrak{P}_\nu$ *liegende Punkt hat von* $\mathfrak{C}$ *höchstens den Abstand* δ*.*

Beweis: Um jeden Punkt von $\mathfrak{C}$ wird ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}\delta$ beschrieben. Als abgeschlossene Menge wird $\mathfrak{C}$ schon von endlich vielen dieser offenen Kreisflächen überdeckt. Durch Vergrößerung der Radien, jedoch nicht über δ hinaus, kann erreicht werden, daß keine zwei der Kreise einander berühren und daß durch keinen Punkt mehr als zwei Kreislinien gehen. Diese Kreislinien haben im ganzen nur endlich viele gemeinsame Punkte und zerfallen durch diese in endlich viele Teilbogen. Die Summe der offenen Kreisflächen werde die »Kreismenge $\mathfrak{K}$« genannt.

Es sei nun A irgendein Randpunkt von $\mathfrak{K}$. Da in keinem Punkt mehr als zwei Kreislinien zusammenstoßen, gehört auch ein gewisser durch A gehender Kreisbogen zum Rand von $\mathfrak{K}$. Auf diesem Kreisbogen gehe man weiter. Entweder kann man auf dem Kreis, ohne eine andere Peripherie anzutreffen, ganz herumlaufen; dann soll dieser Kreis eins der Kreisbogenpolygone $\mathfrak{P}_\nu$ sein. Oder man trifft beim Herumlaufen auf eine andere Kreislinie. Dann gehe man von dem Schnittpunkt aus auf dem Kreisbogen weiter, der außerhalb des eben teilweise umlaufenen Kreises liegt. Bei Fortsetzung des Verfahrens kommt man schließlich zu einem schon durchlaufenen Punkt zurück; das mag zuerst bei dem Punkt B geschehen. Da in keinem Punkt mehr als zwei Kreislinien zusammenstoßen, sind alle durchlaufenen Punkte Randpunkte von $\mathfrak{K}$. Ferner ist $B = A$; denn sonst würden in B drei Kreisbogen zusammenstoßen, die zu zwei durch B gehenden Kreisen gehörten; dann würde aber einer dieser drei Kreisbogen in einem der Kreise liegen, also nicht zum Rande von $\mathfrak{K}$ gehören.

Wird das Verfahren für noch nicht durchlaufene Randpunkte wiederholt, so entstehen schließlich endlich viele geschlossene Kreisbogenpolygone, die nach der eben gemachten Bemerkung keinen gemeinsamen Punkt haben.

---

[1] Hier wird der Jordansche Kurvensatz für Kreisbogenpolygone vorausgesetzt, die nur aus nach außen konvexen oder nur aus nach außen konkaven Kreisbogen zusammengesetzt sind, d. h. für Kreisbogenpolygone mit der Eigenschaft, daß von zwei aneinanderstoßenden Kreisbogen niemals der eine in dem Vollkreis des andern liegt. Für solche Polygone läßt sich der Jordansche Kurvensatz besonders leicht beweisen.

[2] Diese Polygone werden künftig kurz als »konvexe« bzw. »konkave« bezeichnet werden.

Jedes der Polygone besteht, von außen gesehen, nur aus konvexen oder nur aus konkaven Kreisbogen. Denn stieße bei einem Polygon in einem Punkt S ein konvexer mit einem konkaven Bogen zusammen, so läge der eine Bogen innerhalb des andern Kreises, könnte also nicht zum Rand von K gehören.

Für jedes Kreisbogenpolygon $\mathfrak{P}$ liegt die Kreismenge $\mathfrak{K}$ entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb von $\mathfrak{P}$. Denn jeder Punkt K von $\mathfrak{K}$ gehört einem zu $\mathfrak{K}$ gehörenden offenen Kreis an, dessen Mittelpunkt M zu $\mathfrak{C}$ gehört. Daher liegen K und M sicher auf derselben Seite von $\mathfrak{P}$. Wenn nun zwei Punkte von $\mathfrak{K}$ auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{P}$ lägen, träfe das auch für zwei Punkte des Kontinuums $\mathfrak{C}$ zu, was nicht sein kann, da $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{C}$ keinen Punkt gemein hat.

Da für jedes konkave Kreisbogenpolygon $\mathfrak{P}$ außerhalb $\mathfrak{P}$ und in beliebiger Nähe jedes Punktes von $\mathfrak{P}$ Punkte von $\mathfrak{K}$ liegen, liegen die etwa vorhandenen konkaven Polygone $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_n$ demnach außereinander.

Unter der Gesamtheit der Polygone gibt es mindestens ein konvexes. Denn sonst bestände die Menge $\mathfrak{K}$ aus den Punkten, die außerhalb aller konkaven Polygone liegen, wäre also nicht beschränkt. Es gibt aber unter den Polygonen auch nur *ein* konvexes. Denn da im Innern jedes konvexen Polygons, und zwar in beliebiger Nähe jedes Randpunktes, Punkte von $\mathfrak{K}$ liegen, läge $\mathfrak{K}$ sonst teils innerhalb, teils außerhalb eines dieser Polygone. Durch denselben Schluß ergibt sich, daß die $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_n$ innerhalb $\mathfrak{P}_0$ liegen.

Schließlich ist jeder im Innern von $\mathfrak{P}_0$ und zugleich außerhalb der etwa vorhandenen $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_n$ liegende Punkt ein Punkt von $\mathfrak{K}$, da diese Polygone den vollständigen Rand von $\mathfrak{K}$ bilden. Da jeder Punkt von $\mathfrak{K}$ in einem Kreise liegt, dessen Mittelpunkt zu $\mathfrak{C}$ gehört, ist auch e) bewiesen.

3. *Es sei $\mathfrak{C}$ ein Kontinuum und $\mathfrak{Z}$ die Menge der Punkte, die Scheitelpunkte stetiger Winkelfunktionen für das Kontinuum $\mathfrak{C}$ sind. Dann ist $\mathfrak{Z}$ ein Gebiet.*

Beweis: Es braucht nur die folgende Behauptung (B) bewiesen zu werden.

(B) Ist $\mathfrak{Z}_1$ bei gegebenem $d > 0$ die Teilmenge von $\mathfrak{Z}$, deren Punkte von $\mathfrak{C}$ mindestens den Abstand d haben, so gibt es ein »konvexes« Kreisbogenpolygon $\mathfrak{P}$, so daß $\mathfrak{C}$ innerhalb $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}_1$ außerhalb $\mathfrak{P}$ liegt.

Dann gibt es nämlich zu irgend zwei Punkten von $\mathfrak{Z}$ ein Polygon $\mathfrak{P}$, so daß beide Punkte außerhalb liegen. Beide Punkte lassen sich also durch einen außerhalb $\mathfrak{P}$ liegenden Streckenzug verbinden, der nach § 1, 6 ganz zu $\mathfrak{Z}$ gehört. Da $\mathfrak{Z}$ nach § 1, 4 auch offen ist, ist $\mathfrak{Z}$ somit ein Gebiet.

Nach § 1, 5 ist die stetige Winkelfunktion $\phi(A, Z, P)$ des Kontinuums $\mathfrak{C}$ gleichmäßig stetig in den drei Variabeln, wenn Z auf den Bereich $\mathfrak{Z}_1$ beschränkt wird. Es gibt also ein $\delta < \frac{1}{2} d$, so daß für $\overline{PQ} < 2\delta$ und die eben genannten Z

$$|\phi(P, Z, Q)| < \frac{1}{3}\pi \tag{1}$$

ist. Das nach Nr. 2 zu diesem δ existierende »konvexe« Polygon werde $\mathfrak{P}$ genannt, und für dieses soll die Behauptung (B) bewiesen werden. Dabei kann

angenommen werden, daß $\mathfrak{P}$ aus mindestens zwei Kreisbogen mit verschiedenen Kreismittelpunkten besteht.

Die einzelnen Kreisbogen von $\mathfrak{P}$ werden, indem $\mathfrak{P}$ in irgendeiner Richtung durchlaufen wird, mit $1, 2, \cdots, m$ numeriert. Die zugehörigen Kreismittelpunkte seien $M_1, \cdots, M_m$. Weiter wird auf dem μ-ten Kreisbogen ein innerer Punkt K_μ beliebig ausgewählt und $M_{m+1} = M_1$, $K_{m+1} = K_1$ gesetzt.

Jeder Punkt Z von $\mathfrak{Z}_1$ hat von $\mathfrak{C}$ und somit von jedem M_μ einen Abstand $\geqq d > 2\delta$. Daher erscheint von Z aus jede Strecke $\overline{M_\mu M_{\mu+1}}$ sowie jeder Kreisbogen von $\mathfrak{P}$ unter einem Winkel $< \frac{1}{3}\pi$ und zwei aneinanderstoßende Kreisbogen unter einem Winkel $< \frac{2}{3}\pi$. Bezeichnet $\bar{\phi}$ jeweils die stetige Winkelfunktion für den Teil von $\mathfrak{P}$, der von K_μ bis $K_{\mu+1}$ durchlaufen wird, so ist hiernach für $\mu = 1, \cdots, m$

$$(2) \qquad \bar{\phi}(K_\mu, Z, K_{\mu+1}) = K_\mu Z K_{\mu+1}, \qquad |K_\mu Z K_{\mu+1}| < \frac{2}{3}\pi.$$

Ferner ist, wenn ϕ die stetige Winkelfunktion von $\mathfrak{C}$ bezeichnet, wegen (1) und $\overline{M_\mu M_{\mu+1}} < 2\delta$ für $\mu = 1, \cdots, m$

$$(3) \qquad \phi(M_\mu, Z, M_{\mu+1}) = M_\mu Z M_{\mu+1}, \qquad |M_\mu Z M_{\mu+1}| < \frac{1}{3}\pi.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß

$$(4) \qquad \phi(M_1, Z, M_\mu) - \sum_{\varkappa=1}^{\mu-1} \bar{\phi}(K_\varkappa, Z, K_{\varkappa+1}) = K_\mu Z M_\mu - K_1 Z M_1$$

bei

$$(5) \qquad |K_\mu Z M_\mu| < \frac{1}{3}\pi$$

für $\mu = 1, 2, \cdots, m+1$ ist, wobei die Summe für $\mu = 1$ den Wert 0 bedeuten soll.

Da die Winkel $K_\mu Z M_\mu$ wegen $\overline{Z M_\mu} > 2\delta$ in der angegebenen Weise normiert werden können, ist die Behauptung für $\mu = 1$ trivial. Die Behauptung sei nun schon für ein $\mu \leqq m$ bewiesen. Dann ist wegen (4), (3) und (2)

$$\begin{aligned} &\phi(M_1, Z, M_{\mu+1}) - \sum_{\varkappa=1}^{\mu} \bar{\phi}(K_\varkappa, Z, K_{\varkappa+1}) \\ &= \phi(M_1, Z, M_\mu) - \sum_{\varkappa=1}^{\mu-1} \bar{\phi}(K_\varkappa, Z, K_{\varkappa+1}) + \phi(M_\mu, Z, M_{\mu+1}) - \bar{\phi}(K_\mu, Z, K_{\mu+1}) \\ &= K_\mu Z M_\mu - K_1 Z M_1 + M_\mu Z M_{\mu+1} - K_\mu Z K_{\mu+1}, \end{aligned} \qquad (6)$$

wobei jeder der drei ersten Winkel dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{3}\pi$ und der letzte kleiner als $\frac{2}{3}\pi$ ist. Bei dieser Normierung ist nun

$$\begin{aligned} M_\mu Z M_{\mu+1} - K_\mu Z K_{\mu+1} &= M_\mu Z K_{\mu+1} + K_{\mu+1} Z M_{\mu+1} - K_\mu Z M_\mu - M_\mu Z K_{\mu+1} \\ &= K_{\mu+1} Z M_{\mu+1} - K_\mu Z M_\mu; \end{aligned}$$

denn sicher gilt dies als Kongruenz mod. 2π, also, da die Summe der absoluten Beträge sowohl für die beiden ersten wie für die beiden letzten Winkel kleiner als π ist, auch mit dem Gleichheitszeichen. Wird dies in (6) eingesetzt, so ergibt sich (4) mit $\mu+1$ statt μ, womit die Allgemeingültigkeit von (4) bewiesen ist.

Aus (4) folgt nun für $\mu = m+1$

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} \overline{\phi}(K_\varkappa, Z, K_{\varkappa+1}) = 0,$$

d. h.[1] Z liegt außerhalb des Polygons $\mathfrak{P}$; w. z. b. w.

4. Aus dem Satz von Nr. 3 folgt nun unmittelbar die Umkehrung des Satzes von Nr. 1;

Ist jeder Punkt der Komplementärmenge eines Kontinuums $\mathfrak{C}$ *Scheitelpunkt einer stetigen Winkelfunktion von* $\mathfrak{C}$, *so hängt* $\mathfrak{C}$ *einfach zusammen.*

Ist $\mathfrak{C}$ insbesondere eine offene Jordan-Kurve, so ist sehr leicht einzusehen[2], daß jeder Punkt ihrer Komplementärmenge Scheitelpunkt einer stetigen Winkelfunktion von $\mathfrak{C}$ ist. Aus dem eben formulierten Satz folgt daher, daß *jeder offene Jordan-Bogen einfach zusammenhängt, d. h. die Ebene nicht zerlegt.*

5. In ebenso einfacher Weise folgt aus Nr. 4 der *Beweis des Satzes I:*

Aus den Voraussetzungen folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ Kontinua sind. Es sei nun A ein Punkt von $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ und Z ein beliebiger Punkt, der nicht zu $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ gehört. Ferner seien ϕ_1 bzw. ϕ_2 die stetigen Winkelfunktionen der Kontinua $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$. Dann ist $\phi_1(A, Z, P) = \phi_2(A, Z, P)$ für die Punkte P von $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$, da beide Funktionen für das Kontinuum $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ stetige Winkelfunktionen sind, die an der Stelle $P = A$ übereinstimmen, und da es nach § 1, 1 nur eine solche Funktion gibt. Es ist daher durch

$$\phi(A, Z, P) = \begin{cases} \phi_1(A, Z, P), & \text{falls } P \text{ zu } \mathfrak{C}_1 \text{ gehört}, \\ \phi_2(A, Z, P), & \text{falls } P \text{ zu } \mathfrak{C}_2 \text{ gehört}, \end{cases}$$

eine eindeutige und offenbar auch stetige Winkelfunktion für $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ definiert. Da der Scheitelpunkt Z ein beliebiger Punkt der Komplementärmenge von $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ war, liefert daher Nr. 4 die Behauptung.

§ 3.

Beginn des Beweises von Satz II.

1. Es seien $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei einfach zusammenhängende Kontinua, deren Durchschnitt aus mindestens zwei getrennten Kontinuen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ besteht; d. h. es soll $\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 = 0$ sein und $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2$ leer sein oder von $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$ einen positiven Abstand haben. D_1 und D_2 seien Punkte der Kontinuen $\mathfrak{D}_1$

[1] Diesfolgt, wenn es hier nicht als bekannt vorausgesetzt werden darf, daraus, daß die Summe für die außerhalb $\mathfrak{P}$ gelegenen Z den Wert 0 hat (Begründung in § 3, 2) und beim Überschreiten von $\mathfrak{P}$ den Wert ändert (Begründung durch das in § 3, 3 verwendete Prinzip).

[2] Vgl. z. B. E. Schmidt, a. a. O. S. 319.

bzw. $\mathfrak{D}_2$. Für einen beliebigen, nicht zu $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ gehörigen Punkt Z als Scheitelpunkt werde die nach § 2, 1 existierende stetige Winkelfunktion von $\mathfrak{C}_1$ mit ϕ_1 und die von $\mathfrak{C}_2$ mit ϕ_2 bezeichnet. Die Zahl

$$C(Z) = \phi_1(D_1, Z, D_2) + \phi_2(D_2, Z, D_1)$$

heiße eine *Ordnung* des Punktes Z in bezug auf das Kontinuum $\mathfrak{C}$.

Bei festgehaltenen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ ist die Ordnung unabhängig von der speziellen Auswahl der D_1, D_2. Denn für irgendwelche Punkte $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ aus $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ ist

$$\begin{aligned}\phi_1(D_1, Z, D_2) + \phi_2(D_2, Z, D_1) = C(Z) + \phi_1(D_1, Z, \overline{D}_1) + \phi_1(D_2, Z, \overline{D}_2)\\ + \phi_2(\overline{D}_2, Z, D_2) + \phi_2(D_1, Z, \overline{D}_1).\end{aligned}$$

Die hier an mittlerer Stelle auftretenden Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 sind aber wegen der eindeutigen Bestimmtheit der stetigen Winkelfunktionen gerade die Funktionswerte für das Kontinuum $\mathfrak{D}_2$, ergeben also die Summe 0. Das Entsprechende gilt für die beiden übriggebliebenen ϕ_1 und ϕ_2.

Alle Punkte Z einer stetigen Kurve, die mit $\mathfrak{C}$ keinen Punkt gemeinsam hat, haben bei festgehaltenen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ dieselbe Ordnung in bezug auf $\mathfrak{C}$.

Das folgt daraus, daß wegen

$$C(Z) \equiv D_1 Z D_2 + D_2 Z D_1 \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

eine etwaige Änderung der Funktion $C(Z)$ mindestens um den Betrag 2π erfolgt, und das kann längs der Kurve nicht eintreten, da $C(Z)$ längs dieser stetig ist.

2. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der folgenden Behauptung:

Sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei einfach zusammenhängende Kontinua, deren Durchschnitt aus genau zwei getrennten Kontinuen besteht, so gibt es mindestens einen Punkt Y, der in bezug auf $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ eine Ordnung $C(Y) \neq 0$ hat.

Hieraus folgt dann, daß $\mathfrak{C}$ mindestens zweifach zusammenhängt; denn da es einen Punkt Z gibt, so daß

$$|\phi_1(D_1, Z, D_2)| < \pi \quad \text{und} \quad |\phi_2(D_2, Z, D_1)| < \pi$$

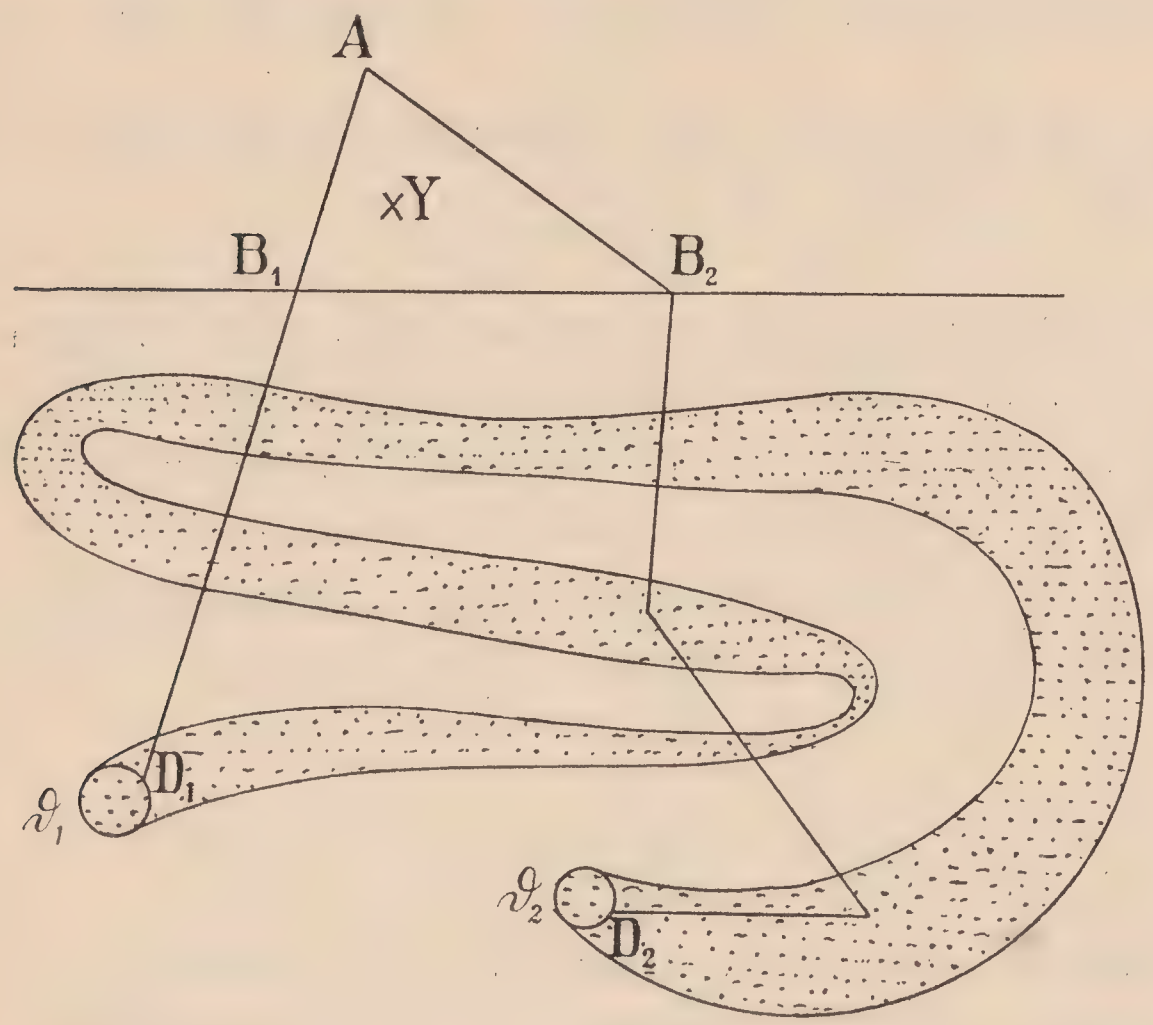
ist, und da stets $C(Z) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ist, ist für diesen Punkt $C(Z) = 0$. Daher lassen sich Z und Y nach der oben gemachten Bemerkung nicht unter Vermeidung von $\mathfrak{C}$ verbinden und gehören somit nicht dem gleichen Gebiet der Komplementärmenge von $\mathfrak{C}$ an.

3. Die Behauptung von Nr. 2 wird zunächst nur für ein spezielles $\mathfrak{C}_2$ bewiesen, allerdings unter der allgemeineren Voraussetzung, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ aus *mindestens* zwei getrennten Kontinuen besteht.

Jedes der beiden $\mathfrak{D}_\nu$ hängt einfach zusammen. Denn es sei etwa Z ein beliebiger Punkt der Komplementärmenge von $\mathfrak{D}_1$ und Z_0 ein beliebiger, weiterhin festgehaltener Punkt der Komplementärmenge von $\mathfrak{C}$. Es genügt, zu beweisen, daß Z immer mit Z_0 unter Vermeidung von $\mathfrak{D}_1$ verbunden werden kann. Ist die Strecke $\overline{ZZ_0}$ frei von $\mathfrak{D}_1$, so ist die Behauptung richtig. Wenn sie nicht

frei von $\mathfrak{D}_1$ ist, gibt es von Z aus einen ersten zu $\mathfrak{D}_1$ gehörigen Punkt D und auf der Strecke $\overline{ZD}$ einen nicht zu $C_1 \cdot C_2$ gehörigen Punkt P. Dieser Punkt P gehört dann der Komplementärmenge von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ an, kann also unter Vermeidung von $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$ mit Z_0 verbunden werden. Dann ist aber Z durch den Streckenzug ZPZ_0 unter Vermeidung von $\mathfrak{D}_1$ mit Z_0 verbunden; w. z. b. w.

Da $\mathfrak{C}$ beschränkt ist, gibt es eine Gerade g, die mit $\mathfrak{C}$ keinen Punkt gemeinsam hat. Irgend ein Punkt B_1 von g werde mit einem Punkt von $\mathfrak{D}_1$ geradlinig verbunden. Auf dieser Strecke sei D_1 der erste Punkt von $D_1 + D_2$. Von jetzt ab werde das $\mathfrak{D}_\nu$, zu dem D_1 gehört, mit $\mathfrak{D}_1$ bezeichnet. Da $\mathfrak{D}_1 + B_1 D_1$ nach § 2,5 einfach zusammenhängt, kann irgend ein weiterer Punkt von g unter Vermeidung von $D_1 + B_1 D_1$ mit einem Punkt von $\mathfrak{D}_2$ verbunden werden. Es sei hierbei B_2 der letzte zu g gehörige Punkt und D_2 hinter B_2 der erste Punkt von $\mathfrak{D}_2$. Schließlich werden B_1 und B_2 geradlinig mit einem Punkt A verbunden, der nicht derselben Halbebene wie $\mathfrak{C}$ angehört. Der Streckenzug $D_1 B_1 A B_2 D_2$ bildet dann ein einfach zusammenhängendes Kontinuum $\mathfrak{p}$, und für dieses $\mathfrak{p}$ statt $\mathfrak{C}_2$ soll nun die Behauptung von Nr. 2 bewiesen werden.



Zu dem Zweck sei Y ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks $A B_1 B_2$, ferner möge $\bar{\mathfrak{p}}$ den Polygonzug $D_1 B_1 B_2 D_2$ und $\phi_{\mathfrak{p}}$ bzw. $\phi_{\bar{\mathfrak{p}}}$ die stetigen Winkelfunktionen von $\mathfrak{p}$ bzw. $\bar{\mathfrak{p}}$ bezeichnen. Da Y unter Vermeidung von $\mathfrak{C} + \bar{\mathfrak{p}}$ mit beliebig weit entfernten Punkten verbunden werden kann, ist nach einem schon in Nr. 2 verwendeten Schluß

$$(1) \qquad \phi_1(D_1, Y, D_2) + \phi_{\bar{\mathfrak{p}}}(D_2, Y, D_1) = 0.$$

Ferner ist offenbar

$$(2) \quad \phi_{\bar{\mathfrak{p}}}(D_2, Y, D_1) = \phi_{\mathfrak{p}}(D_2, Y, D_1) + \phi(B_1, Y, A) + \phi(A, Y, B_2) + \phi(B_2, Y, B_1),$$

wenn die drei letzten Ausdrücke die stetigen Winkelfunktionen der Strecken $B_1 A$ bzw. $A B_2$ bzw. $B_2 B_1$ bezeichnen. Da diese drei Strecken ein Dreieck ergeben, innerhalb dessen Y liegt, ist in (2) die Summe der drei letzten Glieder gleich $\pm 2\pi$. Daher folgt aus (1) und (2)

$$\phi_1(D_1, Y, D_2) + \phi_{\mathfrak{p}}(D_2, Y, D_1) = \mp 2\pi,$$

womit die Behauptung von Nr. 2 für $\mathfrak{p}$ statt $\mathfrak{C}_2$ und natürlich auch für $\mathfrak{p}$ statt $\mathfrak{C}_1$ bewiesen ist, und zwar unter der am Anfang dieser Nummer angegebenen allgemeineren Voraussetzung.

4. Allgemein ergibt sich aus diesem Resultat die Richtigkeit von Nr. 2 folgendermaßen: Es bezeichne $\mathfrak{J}_1$ bzw. $\mathfrak{J}_2$ die Menge der Punkte, die in bezug auf $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{p}$ eine von Null verschiedene Ordnung haben. Der Rand von $\mathfrak{J}_1$ ist dann eine Untermenge von $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{p}$. Denn es sei R ein nicht zu $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{p}$ gehöriger Punkt, und zwar von $\mathfrak{J}_1$ selber oder vom Rand der Menge $\mathfrak{J}_1$. Dann ist auch eine gewisse Umgebung von R frei von $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{p}$. Da aber in dieser Umgebung Punkte von $\mathfrak{J}_1$ liegen, kann jeder Punkt dieser Umgebung mit einem Punkt von $\mathfrak{J}_1$ unter Vermeidung von $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{p}$ verbunden werden. Alle diese Punkte haben also nach dem Ende von Nr. 1 dieselbe Ordnung. Daher ist R ein innerer Punkt von $\mathfrak{J}_1$ und kein Randpunkt. — Ebenso ergibt sich, daß der Rand von $\mathfrak{J}_2$ eine Untermenge von $\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{p}$ ist.

Wenn nun ein zu $\mathfrak{J}_1$ gehöriger Punkt Y zugleich in bezug auf $\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{p}$ die Ordnung 0 hat, so ist

$$\phi_1(D_1, Y, D_2) + \phi_{\mathfrak{p}}(D_2, Y, D_1) \neq 0,$$
$$\phi_2(D_2, Y, D_1) + \phi_{\mathfrak{p}}(D_1, Y, D_2) = 0.$$

Die Addition beider Relationen ergibt dann

$$\phi_1(D_1, Y, D_2) + \phi_2(D_2, Y, D_1) \neq 0,$$

d. h. Y ist ein Punkt, dessen Ordnung in bezug auf $\mathfrak{C}$ von Null verschieden ist.

Liegt der eben angenommene Fall nicht vor, so ist jeder Punkt von $\mathfrak{J}_1$ entweder ein Punkt von $\mathfrak{J}_2$ oder von $\mathfrak{p} + \mathfrak{C}_2$, d. h. es ist

$$\mathfrak{J}_1 \in \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{p},$$

also, da $\mathfrak{J}_1$ jedenfalls mit $\mathfrak{p}$ keinen Punkt gemeinsam hat, sogar

$$\mathfrak{J}_1 \in \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{C}_2.$$

Ist nun P ein Punkt von $\mathfrak{J}_1$, so gehört P hiernach zu $\mathfrak{J}_2$ oder $\mathfrak{C}_2$, also auch zu $\mathfrak{J}_2$ oder $\mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$; d. h. es ist

$$\mathfrak{J}_1 \in \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$$

und daher trivialerweise

$$\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{C}_1 \in \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{C}_2. \tag{3}$$

Wenn hierin das Gleichheitszeichen einmal Geltung hätte, so wäre, da der Rand der linken Seite wegen der am Anfang dieser Nummer gemachten Bemerkung eine Untermenge von $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{p}$ und der der rechten Seite eine Untermenge von $\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{p}$ ist, der Rand eine Untermenge des Durchschnitts $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{p}$ dieser Mengen. Da diese Menge einfach zusammenhängt und mit $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{C}_1$ keinen Punkt gemein hat, wäre dann $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{C}_1$ nicht beschränkt, während doch $\mathfrak{J}_1$ wie $\mathfrak{C}_1$ beschränkt sind. Aus (3) kann daher sogar

$$\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$$

gefolgert werden. D. h. es gibt einen Punkt Y, der zu $\mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$, aber nicht zu $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{C}_1$ gehört. Dieser Punkt gehört dann sogar zu $\mathfrak{J}_2$, aber nicht zu

$\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{C}_1$, also auch nicht zu $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{p}$. D. h. Y gehört zu $\mathfrak{J}_2$ und hat in bezug auf $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{p}$ die Ordnung Null. Dann ergibt sich wie vorhin wieder, daß Y in bezug auf $\mathfrak{C}$ eine von Null verschiedene Ordnung hat. Damit ist aber die Behauptung von Nr. 2 bewiesen.

§ 4.

Beendigung des Beweises von Satz II.

1. Es soll der folgende Satz bewiesen werden:

Sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei einfach zusammenhängende Kontinua, deren Durchschnitt aus genau zwei elementenfremden Kontinuen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ besteht, so bildet die Menge $\mathfrak{Y}$ der Punkte Y, die in bezug auf $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ eine Ordnung $C(Y) \neq 0$ haben, ein Gebiet.

Hieraus folgt dann der Satz II in seinem ganzen Umfang folgendermaßen: Daß $\mathfrak{C}$ die Ebene in mindestens zwei Gebiete zerlegt, ist in § 3, 2 gezeigt. Da für jeden nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Punkt Z entweder $C(Z) \neq 0$ oder $C(Z) = 0$ ist, und da die Punkte erster Art nach dem obigen Satz ein Gebiet bilden, ist nur noch zu zeigen, daß auch die Punkte zweiter Art ein Gebiet bilden. Das folgt aber unmittelbar aus § 2,3, sobald feststeht, daß jeder Punkt Z mit $C(Z) = 0$ Scheitelpunkt einer stetigen Winkelfunktion von $\mathfrak{C}$ ist, und dieses ergibt sich so:

Für je zwei beliebige Punkte D_1 und P von $\mathfrak{D}_1$ ist

$$\phi_1(D_1, Z, P) = \phi_2(D_1, Z, P),$$

da beide Funktionen für $P = D_1$ übereinstimmen und da es für das Kontinuum $\mathfrak{D}_1$ nur eine stetige Winkelfunktion gibt. Ebenso ist für zwei beliebige Punkte D_2 und P von $\mathfrak{D}_2$

$$\phi_1(D_2, Z, P) = \phi_2(D_2, Z, P),$$

also, wenn D_1 ein Punkt von $\mathfrak{D}_1$ ist, wegen $C(Z) = 0$

$$\begin{aligned}\phi_1(D_1, Z, P) &= \phi_1(D_1, Z, D_2) + \phi_1(D_2, Z, P) \\ &= \phi_2(D_1, Z, D_2) + \phi_2(D_2, Z, P) = \phi_2(D_1, Z, P).\end{aligned}$$

Für jeden Punkt P von $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ ist also

$$\phi_1(D_1, Z, P) = \phi_2(D_1, Z, P).$$

Daher ist durch

$$\phi(D_1, Z, P) = \begin{cases} \phi_1(D_1, Z, P), & \text{falls } P \text{ zu } \mathfrak{C}_1 \text{ gehört,} \\ \phi_2(D_1, Z, P), & \text{falls } P \text{ zu } \mathfrak{C}_2 \text{ gehört,} \end{cases}$$

eine eindeutige und offenbar auch stetige Winkelfunktion von $\mathfrak{C}$ definiert, w. z. b. w.

2. Der obige Satz läßt sich zurückführen auf die folgende Behauptung:

(B) Es sei $\mathfrak{Y}_1$ bei gegebenem $d > 0$ die Teilmenge von $\mathfrak{Y}$, deren Punkte von $\mathfrak{C}$ einen Abstand $\geqq d$ haben; dann gibt es für jedes hinreichend kleine

d ein »konkaves« Kreisbogenpolygon $\mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{C}$ außerhalb $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}_1$ innerhalb $\mathfrak{p}$ liegt.

Hiernach gibt es nämlich zu irgend zwei Punkten von $\mathfrak{P}$ ein Polygon $\mathfrak{p}$, so daß beide Punkte innerhalb $\mathfrak{p}$ liegen. Beide Punkte lassen sich also innerhalb $\mathfrak{p}$ durch einen Streckenzug verbinden, der nach § 3, 1 ganz zu $\mathfrak{P}$ gehört. Da ferner jeder Punkt von $\mathfrak{P}$ eine Umgebung hat, die frei von $\mathfrak{C}$ ist, gehören nach § 3, 1 auch alle Punkte dieser Umgebung zu $\mathfrak{P}$, so daß $\mathfrak{P}$ auch offen, also ein Gebiet ist.

3. Für den Beweis von (B) werde d so klein gewählt, daß $\mathfrak{P}_1$ nicht leer ist.

Da ϕ_ν für die Punkte Y von $\mathfrak{P}_1$ nach § 1, 5 eine gleichmäßig stetige Funktion von $\mathfrak{C}_\nu$ ist, gibt es ein $\Delta > 0$, so daß für $\nu = 1, 2$

$$|\phi_\nu(P_\nu, Y, Q_\nu)| < \frac{1}{3}\pi \tag{1}$$

für jeden Punkt Y von $\mathfrak{P}_1$ und je zwei Punkte P_ν, Q_ν von $\mathfrak{C}_\nu$ mit $\overline{P_\nu Q_\nu} < 2\Delta$ ist.

Weiter sei ρ der Abstand der beiden Kontinuen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$, und es sei $0 < 2\sigma < \min(\rho, \Delta)$. Wenn von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ alle Punkte fortgelassen werden, die von $\mathfrak{D}_1$ oder $\mathfrak{D}_2$ einen kleineren Abstand als σ haben, so bleiben zwei wegen $2\sigma < \rho$ nicht-leere Mengen übrig, die voneinander einen positiven Abstand τ haben.

Nun werde

$$0 < 2\delta < \min(d, \Delta, \sigma, \tau) \tag{2}$$

gewählt. Unter den nach § 2, 2 für dieses δ und $\mathfrak{C}$ vorhandenen Polygonen $\mathfrak{P}_\nu$ gibt es dann mindestens ein »konkaves«, und zwar ein solches, dem ein Punkt von $\mathfrak{P}_1$ angehört. Denn sonst müßten alle Punkte von $\mathfrak{P}_1$, da sie wegen $\delta < d$ nach § 2, 2 nicht innerhalb $\mathfrak{P}_0$ und zugleich außerhalb der etwaigen andern $\mathfrak{P}_\nu$ liegen, außerhalb $\mathfrak{P}_0$ gelegen sein. Dann gäbe es aber für die Punkte von $\mathfrak{P}_1$ als Scheitelpunkte stetige Winkelfunktionen für das Innere von $\mathfrak{P}_0$, also insbesondere für $\mathfrak{C}$, was der Bedeutung von $\mathfrak{P}_1$ widerspräche. Eines der konkaven Polygone $\mathfrak{P}_\nu$, das einen Punkt von $\mathfrak{P}_1$ enthält, sei mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet. Es soll gezeigt werden, daß in diesem $\mathfrak{p}$ alle Punkte von $\mathfrak{P}_1$ liegen.

Da $\mathfrak{p}$ »konkav« ist, enthält es mindestens drei Kreisbogen. Die einzelnen Kreisbogen von $\mathfrak{p}$ werden, indem man $\mathfrak{p}$ in irgendeiner Richtung durchläuft, mit $1, 2, \cdots, m$ numeriert. Die zugehörigen Kreismittelpunkte seien $M_1, \cdots, M_m$. Weiter wird auf dem μ-ten Kreisbogen ($\mu = 1, \cdots, m$) ein innerer Punkt K_μ beliebig ausgewählt und $M_{m+1} = M_1$, $K_{m+1} = K_1$ gesetzt.

Jeder Punkt Y von $\mathfrak{P}_1$ hat von $\mathfrak{C}$ und somit von jedem M_μ einen Abstand $\geqq d > 2\delta$. Daher erscheint von Y aus jede Strecke $\overline{M_\mu M_{\mu+1}}$ sowie jeder Kreisbogen von $\mathfrak{p}$ unter einem Winkel $< \frac{1}{3}\pi$. Bezeichnet $\bar{\phi}$ jeweils die stetige Winkelfunktion für den Teil von $\mathfrak{p}$, der von K_μ bis $K_{\mu+1}$ durchlaufen wird, so ist hiernach für $\mu = 1, \cdots, m$

$$\bar{\phi}(K_\mu, Y, K_{\mu+1}) = K_\mu Y K_{\mu+1}, \quad |K_\mu Y K_{\mu+1}| < \frac{2}{3}\pi. \tag{3}$$

Gehören M_μ und $M_{\mu+1}$ zu demselben $\mathfrak{C}_\nu$, so ist wegen (1), (2) und $\overline{M_\mu M_{\mu+1}} < 2\delta$

$$(4) \qquad \phi_\nu(M_\mu, Y, M_{\mu+1}) = M_\mu Y M_{\mu+1}\ , \quad |M_\mu Y M_{\mu+1}| < \frac{1}{3}\pi\ .$$

Gehören dagegen M_μ und $M_{\mu+1}$ nicht zu demselben $\mathfrak{C}_\nu$, so gibt es in $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ einen Punkt D, so daß

$$(5) \qquad \overline{M_\mu D} \leqq \sigma \quad \text{oder} \quad \overline{M_{\mu+1} D} \leqq \sigma$$

ist. Denn sonst hätten M_μ und $M_{\mu+1}$ von $\mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ mindestens den Abstand σ, also nach der am Anfang dieser Nummer getroffenen Festsetzung voneinander mindestens den Abstand τ, was wegen (2) der Tatsache $\overline{M_\mu M_{\mu+1}} < 2\delta$ widerspräche. Da $M_\mu M_{\mu+1} < 2\delta < \sigma$ ist, folgt aus (5)

$$(6) \qquad \overline{M_\mu D} < 2\sigma \quad \text{und} \quad \overline{M_{\mu+1} D} < 2\sigma\ .$$

Daher ist, je nachdem M_μ zu $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ gehört,

$$(7) \qquad \left.\begin{matrix} \phi_1(M_\mu, Y, D) + \phi_2(D, Y, M_{\mu+1}) \\ \phi_2(M_\mu, Y, D) + \phi_1(D, Y, M_{\mu+1}) \end{matrix}\right\} = M_\mu Y M_{\mu+1}\ , \quad |M_\mu Y M_{\mu+1}| < \frac{1}{3}\pi\ .$$

Denn sicher ist dies als Kongruenz mod. 2π richtig; da die linke Seite wegen (1), $\sigma < \Delta$ und (6) dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{2}{3}\pi$ ist und $|M_\mu Y M_{\mu+1}| < \frac{1}{3}\pi$ normiert werden kann, ist dann (7) auch in vollem Umfange richtig. In (7) kann D zunächst für jedes andere Punktepaar $M_\mu, M_{\mu+1}$ einen andern Punkt bedeuten; aber man erkennt nachträglich, daß man sich auf einen festen Punkt D_1 aus $\mathfrak{D}_1$ und einen weiteren Punkt D_2 aus $\mathfrak{D}_2$ beschränken kann.

Für $\mathfrak{C}$ wird nun eine eindeutige (nicht stetige) Winkelfunktion folgendermaßen definiert: Gehören A und B demselben $\mathfrak{C}_\nu$ an, so soll

$$\Phi(A, Y, B) = \phi_\nu(A, Y, B)$$

sein. Ist das nicht der Fall, so soll, je nachdem A zu $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{C}_2$ gehört,

$$(8) \qquad \Phi(A, Y, B) = \begin{cases} \phi_1(A, Y, D_1) + \phi_2(D_1, Y, B) \\ \phi_2(A, Y, D_1) + \phi_1(D_1, Y, B) \end{cases}$$

sein.

Wie man sofort sieht, ist

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi(A, Y, B) \equiv AYB \pmod{2\pi}, \\ \Phi(A, Y, A) = 0, \\ \Phi(A, Y, B) = -\Phi(B, Y, A), \\ \Phi(A, Y, B) + \Phi(B, Y, C) = \Phi(A, Y, C). \end{cases}$$

Ferner ist, je nachdem A zu $\mathfrak{C}_1$ und B zu $\mathfrak{C}_2$ oder A zu $\mathfrak{C}_2$, B zu $\mathfrak{C}_1$ gehört,

$$\phi_1(A, Y, D_2) + \phi_2(D_2, Y, B) = \phi_1(A, Y, D_1) + \phi_2(D_1, Y, B) + C(Y),$$
$$\phi_2(A, Y, D_2) + \phi_1(D_2, Y, B) = \phi_2(A, Y, D_1) + \phi_1(D_1, Y, B) - C(Y).$$

Daher folgt aus (8), (7) und (4) für $\mu = 1, \cdots, m$

$$(10) \quad \Phi(M_\mu, Y, M_{\mu+1}) = M_\mu Y M_{\mu+1} + \eta_\mu C(Y), \quad |M_\mu Y M_{\mu+1}| < \frac{1}{3}\pi,$$

wo $\eta_\mu = 0, +1$ oder -1, also jedenfalls eine ganze Zahl ist und nicht von Y abhängt.

Durch Schluß von μ auf $\mu+1$ ergibt sich nun für $\mu = 1, \cdots, m+1$

$$(11) \quad \Phi(M_1, Y, M_\mu) - \sum_{\varkappa=1}^{\mu-1} \Phi(K_\varkappa, Y, K_{\varkappa+1}) = K_\mu Y M_\mu - K_1 Y M_1 + g_\mu C(Y),$$

wobei g_μ eine ganze Zahl ist, die nicht von Y abhängt, jedes

$$|K_\mu Y M_\mu| < \frac{1}{3}\pi$$

ist und die Summe für $\mu = 1$ die Zahl 0 bedeuten soll. Für $\mu = 1$ ist die Behauptung nämlich trivial, und weiterhin ergibt sie sich aus (9) und (10) in genau derselben Weise wie die Relationen (5) und (6) von § 2, 3.

Aus (11) folgt nun für $\mu = m+1$, da $M_{m+1} = M_1$, $K_{m+1} = K_1$ und die links stehende Summe die Ordnung von Y in bezug auf $\mathfrak{p}$ ist, die mit $K(Y)$ bezeichnet werden möge,

$$(12) \quad -K(Y) = g \cdot C(Y),$$

wenn g statt g_{m+1} geschrieben wird. Da es im Innern von $\mathfrak{p}$ einen Punkt Y_1 von $\mathfrak{P}_1$ gibt, ist für diesen

$$g \cdot C(Y_1) = \pm 2\pi,$$

also, da g eine ganze Zahl und $C(Y_1)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, $g = \pm 1$. Da g von Y nicht abhängt, folgt dann für jedes Y von $\mathfrak{P}_1$ aus (12)

$$K(Y) = \mp C(Y) \neq 0,$$

d. h. jedes Y von $\mathfrak{P}_1$ liegt im Innern von $\mathfrak{p}$; w. z. b. w. Zugleich ergibt sich, daß die Ordnung von Y gleich $\pm 2\pi$ ist.

§ 5.

Über den Zusammenhang eines einfachen Bandes.

Versteht man unter der ε-Umgebung einer beschränkten Menge $\mathfrak{M}$ die Menge der Punkte, die von $\mathfrak{M}$ einen Abstand kleiner als ε haben, so kann der Begriff der Jordan-Kurve folgendermaßen verallgemeinert werden:

Jedem Punkt x eines abgeschlossenen Intervalls $\langle a, b\rangle$ sei ein einfach zusammenhängendes Kontinuum $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(x)$ zugeordnet. Die Zuordnung möge

eine stetige sein, d. h. zu jedem $\mathfrak{X}(x_0)$ und jedem $\varepsilon > 0$ möge es sein $\delta > 0$ geben, so daß für alle x mit

$$\max(a, x_0 - \delta) \leqq x \leqq \min(b, x_0 + \delta)$$

die zugeordneten $\mathfrak{X}(x)$ in der ε-Umgebung von $\mathfrak{X}(x_0)$ liegen. Ferner möge die Zuordnung eineindeutig in dem Sinne sein, daß für $x_1 \neq x_2$ stets $\mathfrak{X}(x_1) \cdot \mathfrak{X}(x_2) = 0$ ist. Die so entstehende Menge der $\mathfrak{X}(x)$ möge ein *offenes einfaches Band* heißen. Ist die Bedingung $\mathfrak{X}(x_1) \cdot \mathfrak{X}(x_2) = 0$ für $x_1 \neq x_2$ nur mit der einen Ausnahme erfüllt, daß $\mathfrak{X}(a) = \mathfrak{X}(b)$ ist, so möge die Menge der $\mathfrak{X}(x)$ ein *geschlossenes einfaches Band* heißen. Jede Menge $\mathfrak{X}(x)$ wird ein *Element* des Bandes genannt.

Als Anwendung der vorstehend abgeleiteten Sätze möge nun bewiesen werden:

Jedes offene einfache Band ist ein einfach zusammenhängendes Kontinuum, und jedes geschlossene einfache Band ist ein zweifach zusammenhängendes Kontinuum.

Der zweite Teil dieses Satzes folgt mit Satz II sofort aus dem ersten Teil, da für $a \leqq x \leqq \frac{1}{2}(a+b)$ bzw. $\frac{1}{2}(a+b) \leqq x \leqq b$ zwei offene Bänder entstehen, deren Durchschnitt aus den beiden elementenfremden Kontinuen $\mathfrak{X}(a)$ und $\mathfrak{X}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ besteht, und da das geschlossene Band die Summe dieser beiden offenen Bänder ist.

Es ist also allein noch die für das offene Band aufgestellte Behauptung zu beweisen. Daß jedes offene Band $\mathfrak{B}$ beschränkt und abgeschlossen ist, ergibt sich sofort aus seiner Definition. Daß es auch zusammenhängend ist, kann so eingesehen werden: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Aus der Stetigkeit des Bandes ergibt sich mit Hilfe des Borelschen Überdeckungssatzes die Existenz endlich vieler Intervalle $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$, so daß deren Gesamtheit das Intervall $\langle a, b \rangle$ überdeckt und in jedem $\langle a_\nu\ b_\nu \rangle$ ein x_ν liegt, für das in der ε-Umgebung von $\mathfrak{X}(x_\nu)$ alle $\mathfrak{X}(x)$ mit $a_\nu \leqq x \leqq b_\nu$ liegen. Je zwei Punkte P, Q aus einem durch $a_\nu \leqq x \leqq b_\nu$ bestimmten Stück des Bandes $\mathfrak{B}$ lassen sich dann innerhalb dieses Bandstücks durch eine ε-Kette verbinden, da P und Q von zwei Punkten $\overline{P}$ bzw. $\overline{Q}$ von $\mathfrak{X}(x_\nu)$ einen Abstand $< \varepsilon$ haben und da diese beiden Punkte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ sich ja innerhalb $\mathfrak{X}(x_\nu)$ durch eine ε-Kette verbinden lassen. Da $\langle a, b \rangle$ durch die endlich vielen $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ vollständig überdeckt ist, lassen sich dann aber auch zwei beliebige Punkte P, Q des Bandes $\mathfrak{B}$ durch eine ε-Kette innerhalb $\mathfrak{B}$ verbinden. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{B}$ ein Kontinuum ist.

Das Band $\mathfrak{B}$ ist nach § 2, 4 sicher einfach zusammenhängend, wenn es für jeden nicht zu $\mathfrak{B}$ gehörenden Punkt Z als Scheitelpunkt eine stetige Winkelfunktion von $\mathfrak{B}$ gibt. Es sei also Z ein beliebiger Punkt, der nicht zu $\mathfrak{B}$ gehört. Jedes Bandelement $\mathfrak{X}(\overline{x})$ kann nach § 2, 1 und der Behauptung (B) von § 2, 3 so in ein »konvexes« Kreisbogenpolygon $\mathfrak{P}$ eingeschlossen werden, daß Z außerhalb dieses Polygons liegt. Es gibt dann weiter ein Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, so daß die den x dieses Intervalls zugeordneten Bandelemente innerhalb $\mathfrak{P}$ liegen und $\overline{x}$ ein innerer Punkt von $\langle \alpha, \beta \rangle$ und nur dann ein End-

punkt dieses Intervalls ist, wenn $\bar{x}$ einer der Endpunkte von $\langle a, b\rangle$ ist. Da Z außerhalb $\mathfrak{P}$ liegt, gibt es vom Scheitelpunkt Z aus eine stetige Winkelfunktion für das abgeschlossene Innere von $\mathfrak{P}$, also erst recht für das durch $\langle \alpha, \beta\rangle$ bestimmte Bandstück. Nach dem Borelschen Überdeckungssatz wird $\langle a, b\rangle$ von endlich vielen der $\langle \alpha, \beta\rangle$ überdeckt. Es gibt also eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ des Intervalls $\langle a, b\rangle$, so daß für jedes durch $\langle a_\nu, a_{\nu+1}\rangle$ bestimmte Bandstück eine stetige Winkelfunktion ϕ_ν mit dem Scheitelpunkt Z existiert. Ist nun P ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{B}$, so gehört er genau einem Bandelement $\mathfrak{X}(x)$ an, und es kann (u. U. auf zwei Arten) ein ν so bestimmt werden, daß $a_\nu \leqq x \leqq a_{\nu+1}$ ist. Wird mit A_ν ein beliebiger, aber weiterhin festgehaltener Punkt aus $\mathfrak{X}(a_\nu)$ bezeichnet, so ist nach einem schon mehrfach ausgeführten Schluß durch

$$\phi(A_0, Z, P) = \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \phi_\varkappa(A_\varkappa, Z, A_{\varkappa+1}) + \phi_\nu(A_\nu, Z, P)$$

eine eindeutige und stetige Winkelfunktion für das ganze Band $\mathfrak{B}$ definiert, womit der Satz in seinem ganzen Umfange bewiesen ist.

Ausgegeben am 22. August.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XXIII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 26. Juli. (S. 301)

v. Ficker: Bemerkungen über die meteorologischen Verhältnisse Teneriffas. (S. 303)

Haberlandt: Zur Entwickelungsphysiologie des Periderms. (S. 317)

Landau: Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante. Zweite Abhandlung. (S. 339)

P. Koebe: Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Zweite Mitteilung.) (S. 345)

P. Koebe: Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Dritte Mitteilung.) (S. 385)

Adresse an Hrn. Max Rubner zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 25. Juli 1928. (S. 443)

Fick: Beobachtungen am Orangkehlsack. (Mitteilung aus der Sitzung der phys.-math. Klasse vom 14. Juni.) (S. 445)

MIT TAFEL IV—VI

Library of Congress
JAN 11 1929
Smithsonian Deposit

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XXIII. Gesamtsitzung. 26. Juli.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Heymann.

1. Hr. von Ficker hielt einen Vortrag »Bemerkungen über die meteorologischen Verhältnisse Teneriffas«.

Es wurde zunächst der jährliche Gang des Luftdruckes auf Teneriffa im Meeresniveau und auf dem Observatorium Izaña (2367 m) behandelt; der Gang des Luftdruckes ist einerseits bedingt durch die jährlichen Verschiebungen der zonalen Druckgürtel, andererseits durch den Massenaustausch zwischen Ozean und Kontinenten. Ferner wurde mit Hilfe der von dem Observatorium Cañadas hochgelassenen Pilotballons die Windverteilung bis 10 km untersucht und dabei überraschenderweise auch in großen Höhen eine überwiegend gegen den Äquator gerichtete Luftversetzung nachgewiesen. Zuletzt wurde mit Hilfe der Luftdruckbeobachtungen die wahre Mitteltemperatur der Luftmassen zwischen Laguna und Izaña berechnet und durch Vergleich mit den oben und unten beobachteten Temperaturen der wahrscheinliche Verlauf der Zustandskurve zwischen Laguna und Izaña konstruiert.

2. Hr. Haberlandt überreichte eine Abhandlung »Zur Entwickelungsphysiologie des Periderms«.

Es wird gezeigt, daß so wie bei der Entstehung des Wundkorkes Zersetzungsprodukte der verletzten und abgestorbenen Zellen als Wundhormone die entsprechenden Zellteilungen auslösen, auch bei der Entstehung des normalen Korkgewebes, des Periderms, Nekrohormone teilungsauslösend wirken, die aus abgestorbenen Haaren und Epidermiszellen stammen. In einigen Fällen sind junge Lentizellen die Entstehungsherde des Periderms. Nur selten treten die Zellteilungen schon so früh auf, daß die in den betreffenden Zellen noch vorhandenen primären Teilungshormone als ihre Ursache anzusprechen sind.

3. Hr. Kehr legte den Bericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae Historica für 1927 vor.

4. Das korrespondierende Mitglied Hr. Landau in Göttingen übersandte eine Arbeit »Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante« (zweite Abhandlung).

In der Rittschen Verallgemeinerung des Schottkyschen Satzes wird eine Voraussetzung (die Existenz eines absoluten Konvergenzgebietes) gestrichen. Ferner wird die Valironsche Übertragung des Blochschen Satzes auf Dirichletsche Reihen verschärft.

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Koebe in Leipzig übersandte die 2. und 3. Mitteilung seiner Arbeit über »Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen«.

2. Mitteilung. Allgemeines über Raumformen und Fundamentalgruppen. Niedere Raumformen. Elementarmodelle und Konformmodelle.

3. Mitteilung. Geschlossene hyperbolische Raumformen. Offene hyperbolische Raumformen endlicher Zusammenhangsordnung. Offene hyperbolische Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung.

6. Derselbe übersandte seine Preisschrift »Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten« (Djursholm 1927).

7. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte sein Buch »Hesiodos Erga« (Berlin 1928),

8. Hr. Guthnick den 8. Band der »Geschichte des Fixsternhimmels« (Karlsruhe 1928).

9. Vorgelegt wurde die 45. Lieferung des Werkes »Der Obergermanisch-Rätische Limes des Römerreiches«, hrsg. von Ernst Fabricius und

10. die Schrift von Alf Sommerfelt »Minnetale over Hugo Schuchardt« (Sonderabdr. 1928).

11. Hr. Max Rubner feierte am 25. Juli 1928 sein fünfzigjähriges Doktorjubiläum. Die Akademie hat ihm aus diesem Anlaß eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

12. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt:

durch die Gesamtakademie:

2000 *RM* für das Biographische Jahrbuch;

durch die physikalisch-mathematische Klasse:

2500 *RM* zur Ausführung einer petrographischen Reise des Hrn. Dr. F. K. Drescher in Darmstadt nach Westgrönland;

durch die philosophisch-historische Klasse:

3000 *RM* für die Fortführung der Kirchenväter-Ausgabe,

500 *RM* für die Fortführung der Arbeiten des Hrn. Prof. Dr. C. Schuchhardt auf dem Gebiet der germanisch-slawischen Altertumskunde.

Bemerkungen über die meteorologischen Verhältnisse Teneriffas.

Von H. v. Ficker.

Seit Leopold von Buch vor mehr als 100 Jahren — im Jahre 1825 — in den Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften eine physikalische Beschreibung der Kanarischen Inseln veröffentlicht hat, haben sich viele Autoren mit dem Klima der Kanaren, insbesondere Teneriffas beschäftigt. J. v. Hann hat in seinem Handbuch der Klimatologie (3. Auflage 1911) eine ausgezeichnete Zusammenfassung gegeben, aber zugleich darauf hingewiesen, daß im Verhältnis zur Zahl der Beschreibungen der Umfang des verfügbaren Zahlenmateriales sehr gering sei. Immerhin gibt Hann schon Temperaturwerte für 6 Stationen, Niederschlagswerte für 4 Stationen, was für ein so kleines Gebiet zunächst ausreichend erscheint, zumal die regelmäßigen Beobachtungen in Laguna auf Teneriffa (547 m) bis auf das Jahr 1869, die Beobachtungen von las Palmas auf Gran Canaria (10 m) bis auf 1882 zurückgehen. Eine Notwendigkeit, sich abermals mit den Witterungsverhältnissen der Kanaren zu befassen, würde demnach nicht vorliegen, wenn nicht seit dem Erscheinen von Hanns Handbuch das Beobachtungsmaterial sich erheblich erweitert hätte, und zwar in einer Richtung, die für die meteorologische Forschung im allgemeinen von großer Bedeutung ist. Was vor dem Jahre 1911 an Beobachtungen vorlag, bezog sich, von einigen ganz kurzen Messungsserien abgesehen, auf die Küstenregion und die anschließenden Gebiete bis etwa 500 m hinauf, also ausgesprochen auf jene Luftschichten, die während des größten Teiles des Jahres vom Nordostpassat beherrscht und klimatisch bestimmt werden. Daß über der unteren Passatströmung an den Abhängen und auf den Höhen des Gebirges außerordentlich abweichende, klimatische Verhältnisse vorhanden seien, war zwar seit Alexander von Humboldts Besteigung des Piks von Teneriffa von allen Besuchern des Berges bestätigt und durch gelegentliche Messungen bekräftigt worden, ohne daß regelmäßig beobachtende Stationen in diese Region hinauf verlegt worden wären. Man begnügte sich mit der Kenntnis, daß oberhalb der feuchtozeanischen, durch sehr gleichmäßige Verhältnisse ausgezeichneten Passatzone ein äußerst trockenes, im Gange aller meteorologischen Elemente sich sehr extrem verhaltenes Hochwüstenklima vorhanden sei, daß also auf Teneriffa zwei einander sehr entgegengesetzte Klimagebiete in unmittelbarer Nachbarschaft übereinander entwickelt seien. Zunächst waren es aber nicht die Klimatologen, sondern die Meteorologen, die an einer genaueren Kenntnis der hochgelegenen Trockengebiete inter-

essiert waren. In Teneriffa bietet ja der 3700 m hohe Pik die beste Gelegenheit, um die Strömungen des Passats und des Antipassats im Gebiete des Atlantischen Ozeans zu studieren und damit eines der wichtigen Glieder der atmosphärischen Zirkulation kennenzulernen. Da die Passate am besten und regelmäßigsten über den Ozeanen ausgebildet sind, bieten nur Inseln mit höheren Gebirgen die Gelegenheit zu eingehenden Untersuchungen. So gab es z. B. für die Existenz einer Antipassatströmung lange Zeit hindurch keine besseren Beweise als die Beobachtungen, die von gelegentlichen Besuchern des Piks von Teneriffa ausgeführt worden waren.

Daß seit 1910 auch in den höheren Lagen Teneriffas ständig beobachtet wird, ist deutscher Initiative zu verdanken. Im Herbst 1909 wurde auf Anregung des Meteorologen Hergesell und des Mediziners Pannwitz im alten Krater des Pik, in den sogenannten Cañadas, in einer Höhe von 2100 m ein Observatorium errichtet, dessen Kosten Kaiser Wilhelm II. und die durch ihn interessierte deutsche Industrie trugen und in dem der leider so früh verstorbene Wenger zwei Jahre hindurch beobachtet hat. Auch in Guajara, 2700 m, und auf dem Gipfel des Pik wurden wenigstens zeitweise Registrierinstrumente in Gang erhalten. Das von Wenger gewonnene Beobachtungsmaterial ist meines Wissens nur zum Teil bearbeitet worden. Später übernahmen die Spanier den Betrieb des Observatoriums, dessen Lage auf dem Grunde des Kraterbeckens allerdings sehr ungünstig war. Es muß deshalb als großer Fortschritt bezeichnet werden, daß das Spanische Meteorologische Institut die Station Cañadas im Jahre 1916 aufließ und dafür das Observatorium Izaña, 2367 m, in freier Lage auf dem Kraterrande errichtete. Die Jahrbücher des Spanischen Meteorologischen Instituts veröffentlichen die Ergebnisse wenigstens in Monatsmitteln, so daß jetzt auch für die Hochregion Teneriffas verläßliches, vergleichbares Zahlenmaterial vorhanden ist, das Hann für seine letzte zusammenfassende Klimadarstellung der Kanaren noch nicht zur Verfügung stand. Man kann jetzt den Gegensatz zwischen den beiden übereinanderliegenden Klimagebieten zahlenmäßig erfassen und damit eine nicht nur erwünschte, sondern notwendige Ergänzung der vorhandenen Klimabeschreibungen liefern.

Einer anderen, vielleicht noch wichtigeren Anforderung wird das Observatorium Izaña wohl erst in späterer Zeit gerecht werden können, wenn die Beobachtungen sich über mehrere Jahrzehnte erstreckt haben werden. Es wird in der Gegenwart viel davon gesprochen, daß die »Polarfront«, d. h. das arktische Kaltluftreservoir, durch ein Netz zirkumpolar gelegener Beobachtungsstationen ständig unter Kontrolle gehalten werden müsse, weil die hier vor sich gehenden Veränderungen für den Wetterverlauf bis in niedrige Breiten hinab maßgebend seien. Man darf aber über dieser Überwachung der Polarfront nicht vergessen, daß eine Kontrolle der Vorgänge und Veränderungen in niedrigen Breiten, also sozusagen im Heizraum der atmosphärischen Maschine, mindestens ebenso wichtig, wenn auch nicht so einfach ist. So wie man den Pulsschlag des menschlichen Herzens gewöhnlich nicht in der Herzgegend selbst abnimmt, sondern an einer bequemer liegenden Körperstelle, so fühlt man auch den Pulsschlag der atmosphärischen Zirkulation am bequemsten wohl nicht in der Nähe des Heizraumes selbst ab, sondern in höheren

Breiten, wo die Verschiebungen der zur Zirkulation gehörigen schweren Kaltluftmassen sich verhältnismäßig einfach gestalten. Steht man aber auf dem Standpunkt, daß die Bewegung dieser Kaltluftmassen nur eine Reaktion auf Vorgänge im Heizraum der Atmosphäre darstellt, so darf man sich auf die Dauer nicht mit einer Kontrolle der polaren Vorgänge begnügen, sondern muß die Überwachung dort vornehmen, wo der Kreislauf in Gang gesetzt wird. Leider kommt man hier mit den Beobachtungen in den unteren Schichten nicht aus. Da auch die Aerologie nur Stichproben aus der Höhe liefert und für Zwecke einer »Überwachung«, die ja in kontinuierlichen, regelmäßigen Beobachtungen zu bestehen hat, viel zu teuer arbeiten würde, so bleibt nichts übrig, als in niedrigen Breiten jede Gelegenheit zur Errichtung von Bergobservatorien auszunutzen. Mit der Errichtung des Observatoriums Izaña haben die Spanier einen guten Anfang gemacht, und die außerordentlich großen Temperaturschwankungen von Jahr zu Jahr, die bisher in Izaña festgestellt worden sind, zeigen an, wie irreführend in meteorologischer Beziehung die Gleichmäßigkeit der Witterung in den unteren Schichten ist[1]. Noch ist die Beobachtungsreihe von Izaña viel zu kurz, als daß man mit Aussicht auf Erfolg die Korrelationen zu den Witterungsvorgängen und Witterungsschwankungen höherer Breiten untersuchen könnte. Heute muß man sich damit begnügen, durch eine klimatologische Verarbeitung der achtjährigen Beobachtungen den Gegensatz zu der unterhalb liegenden Passatregion darzustellen.

Einer ausführlichen, mit dem ganzen Zahlenmaterial ausgestatteten Untersuchung über die klimatischen und meteorologischen Verhältnisse Teneriffas vorgreifend, möchte ich mich hier damit begnügen, auf einige charakteristische, namentlich meteorologisch beachtenswerte Ergebnisse hinzuweisen und dadurch auf den großen Wert der Höhenbeobachtungen auf Teneriffa aufmerksam zu machen.

1. Jährlicher Luftdruckgang.

Die bis in das Jahr 1869 zurückreichenden Luftdruckbeobachtungen von Laguna sind leider sehr lückenhaft. Der jährliche Gang des Luftdrucks ist durch ein Maximum im Winter (Dezember oder Januar) und ein zweites Maximum im Juni ausgezeichnet. Aber nicht nur einzelne Jahrgänge, sondern auch die Mittel aus den einzelnen Beobachtungsdekaden weisen beträchtliche Verschiedenheiten untereinander auf, die durch Vergleich mit den ebenfalls langjährigen Druckbeobachtungen in las Palmas als reell nachgewiesen werden können. In Fig. 1 ist der jährliche Gang in Laguna für drei verschiedene Beobachtungsdekaden mitgeteilt. Wie man sieht, variiert besonders die Lage der Minima, die hauptsächlich im März oder April und im August oder Oktober eintreten. Auch die Lage des winterlichen Hauptmaximums variiert, hingegen fällt ganz einheitlich ein sekundäres Maximum auf den Juni; dieses Junimaximum, das in der Dekade 1881—1890 als Hauptmaximum entwickelt ist,

[1] Temperaturveränderlichkeit in der nordatlantischen Passatzone. Meteor. Zeitschrift 1928, S. 222.

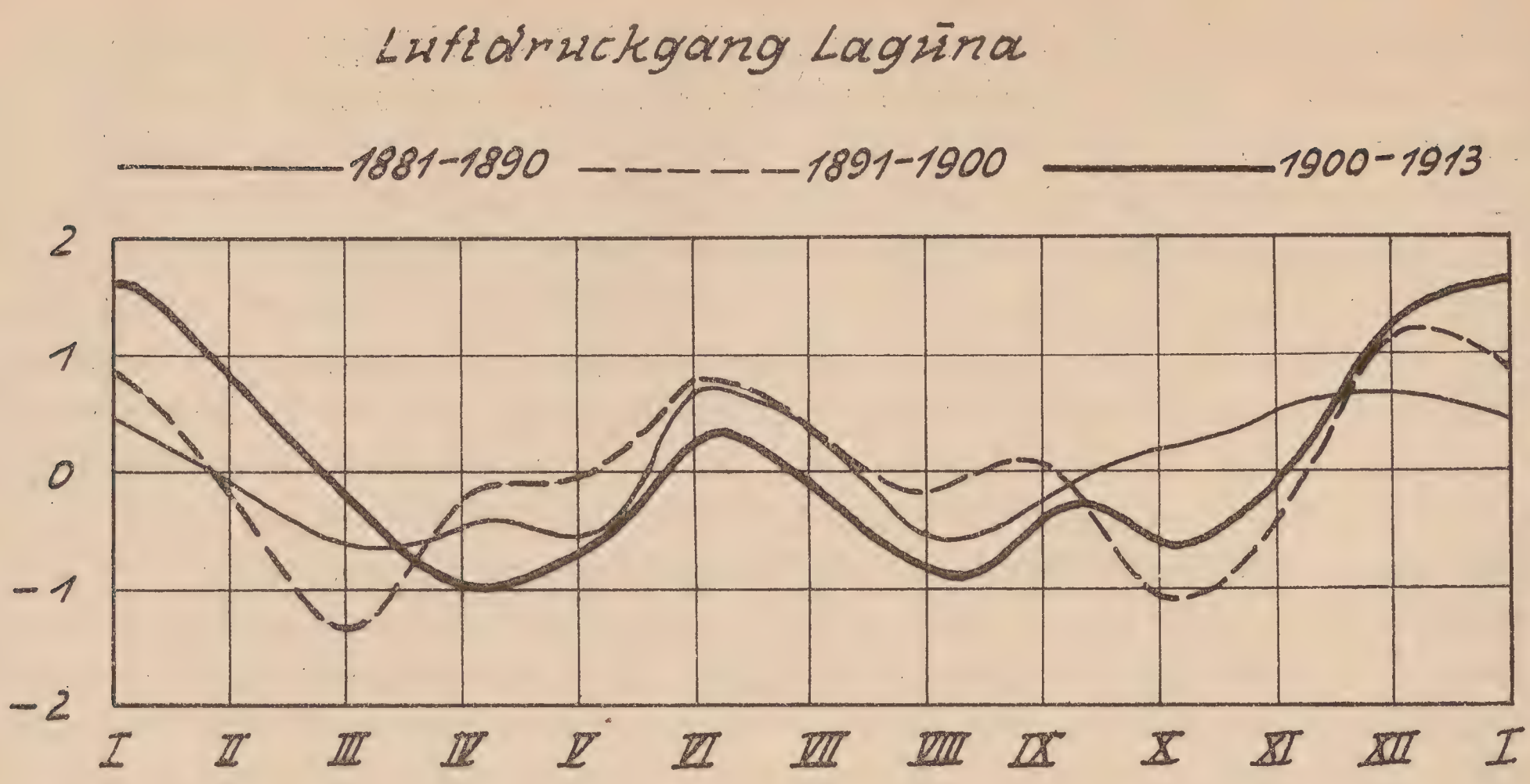


Fig. 1.

muß als das typische Merkmal des jährlichen Luftdruckganges betrachtet werden. Im allgemeinen erweist sich der Luftdruckgang als Doppelwelle, mit starken Unterschieden von Jahr zu Jahr.

In Fig. 2 ist der Luftdruckgang in Laguna für die Reihe 1917—1923 dargestellt, da nur für diese 7 Jahre Vergleichsbeobachtungen des Observatoriums Izaña, 2367 m, vorhanden sind. Die Kurve für Laguna, wie in Fig. 1 durch Abweichungen vom Jahresmittel dargestellt, zeigt alle oben als wesentlich bezeichneten Eigentümlichkeiten; sogar das schwache Septembermaximum ist keine Zufälligkeit dieser kurzen Reihe, sondern häufig vorhanden, ohne so charakteristisch wie das Junimaximum zu sein. Im allgemeinen liegt in niedrigen

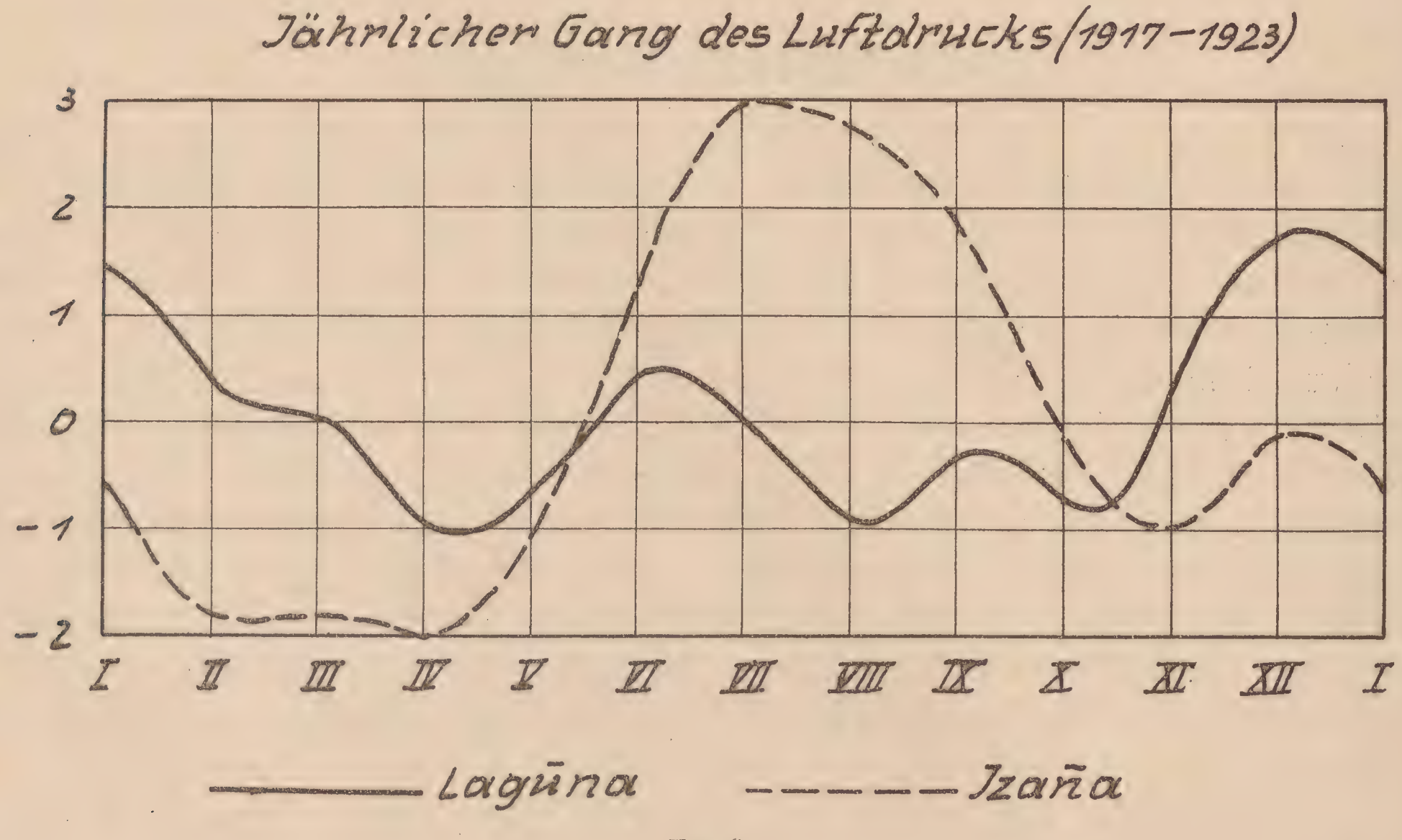


Fig. 2.

Lagen der Kanaren der Luftdruck im Winter (November—März) über, im Sommer (mit Ausnahme des Juni) unter dem Mittel. Im Winter sind die Kanaren zumeist in das Gebiet des Azorenhochs einbezogen, während im Sommer mit der Verschiebung des Azorenhochs nach Norden unter Entwicklung des Nordostpassats der Luftdruck sinkt, da sich die äquatoriale Tiefdruckzone näher an die Kanaren heranschiebt. Um so auffälliger ist deshalb die Tatsache, daß vom April zum Juni der Druck trotzdem steigt, um dann erst während der Hauptpassatmonate (Juni—August) wieder zu fallen. Die Entwicklung des Passats geht also mit steigendem Druck vor sich, und erst nach Vollentwicklung des Passats fällt der Druck. Der Druckanstieg vom April bis Juni geht gerade in der Zeit kräftigsten Temperaturanstieges vor sich, so daß Vorgänge in der unteren Troposphäre für diesen Druckanstieg nicht verantwortlich gemacht werden können. Um Entwicklung und Bedeutung des Junimaximums festzustellen, müßte man die Untersuchung weit über das Gebiet der Kanaren hinaus erstrecken. Man muß wohl annehmen, daß es sich um den Effekt hochtroposphärischer oder sogar stratosphärischer Vorgänge handelt, die ursächlich mit der Entwicklung der sommerlichen, durch starke Kontinentalheizung erzeugten Tiefdruckgebiete über den östlich und westlich gelegenen Festländern zusammenhängen. Das vom Winter zum Sommer eintretende Massendefizit über den Kontinenten muß zu Massenüberschüssen in der Umgebung der Festländer führen.

Betrachtet man nun den Luftdruckgang auf Izaña (Fig. 2), so ist von der Doppelwelle in niedrigen Lagen nicht mehr viel übrig. Das Wintermaximum ist nur mehr andeutungsweise vorhanden, dafür ist das Sommermaximum (Juli—August) um so mächtiger entwickelt — so mächtig, daß fast nur eine einfache Jahreswelle vorhanden ist. Von Oktober bis Mai liegt der Druck unter, in der warmen Jahreshälfte über dem Mittel, also ungefähr umgekehrt wie in der Niederung. Diese Umkehrung des jährlichen Ganges in der Höhe ist charakteristisch für alle Hochstationen und eine Wirkung der Erwärmung, nicht etwa ein besonderes Merkmal des Luftdruckganges in den Hochlagen der Kanaren. Da in warmer Luft der Druck mit zunehmender Höhe langsamer abnimmt als in kalter Luft, ist im allgemeinen der Druck auf Berggipfeln im Sommer höher als im Winter. Zu diesem Druckeffekt der Erwärmung tritt dann noch die Druckwirkung der Vorgänge, die den Druck auch in der Niederung beeinflussen und sich im jährlichen Gange des Luftdruckes in der Niederung abspiegeln, die aber durch lokale Untersuchungen nicht geklärt werden können. In dieser Beziehung ist die bemerkenswerte Tatsache zu verzeichnen, daß in der Niederung und in der Höhe trotz der großen Verschiedenheit im jährlichen Luftdruckgang der tiefste Druck gleichzeitig, nämlich im April eintritt. Ein Vergleich beider Kurven läßt auch die Tatsache erkennen, daß der kräftige Druckanstieg, der auf Izaña vom April bis Juni eintritt, nur zum Teil der Erwärmung der Luftmassen zugeschrieben werden kann, sondern — wie der gleichzeitige, wenn auch viel schwächerere Druckanstieg in Laguna beweist — zum Teil wohl einer in großen Höhen erfolgenden Luftzufuhr von den erwärmten Kontinentalmassen her zuzuschreiben ist. Andererseits hat man von Juni bis August in der Niederung

beträchtlichen Druckfall, der in der Höhe nur deshalb nicht vorhanden ist, weil er durch die Wirkung der noch andauernden Erwärmung überkompensiert ist. Unklar bleibt zunächst auch die Entstehung des kräftigen Wintermaximums in der Niederung; daß es in der Höhe nur mehr in großer Abschwächung vorhanden ist, ist ohne weiteres aus dem Temperaturgang zu erklären. Nicht jene Zeitabschnitte, innerhalb derer der Kurvenverlauf in Niederung und Höhe einander entgegengesetzt ist, sind meteorologisch bemerkenswert, sondern gerade jene, in denen die Änderungen unten und oben gleichsinnig verlaufen und in denen die Erwärmungsvorgänge innerhalb der Luftmassen bis über die Höhenstation hinauf keine ausschlaggebende Einwirkung auf den Druckgang in der Höhe ausüben können.

2. Windverteilung in höheren Lagen Teneriffas.

In einer früheren Untersuchung[1] habe ich die Windverhältnisse von Teneriffa nach den Terminbeobachtungen der Stationen Puerto de Orotava, Guimar, Cañadas und Izaña dargestellt. Cañadas und Izaña liegen im allgemeinen bereits oberhalb der Passatzone. Guimar liegt bezüglich der Richtung des Passates leeseitig, so daß die Verhältnisse unübersichtlich werden. Aber auch auf der Passatseite, in Puerto de Orotava, ist der Passat nur im Sommer stark genug, um das lokale Windsystem der Land- und Seewinde gänzlich zu unterdrücken. Auf Izaña wieder dominieren während des ganzen Jahres Nordwestwinde von beträchtlicher Stärke, die in den Beobachtungen von Cañadas nicht angedeutet sind. Auch die Diskussion der von Wenger ausgeführten Wolkenbeobachtungen hat diese Nordwestwindschicht nicht erkennen lassen, die aber in der Regel bei aerologischer Erkundung des Nordostpassats festgestellt wurde. Nach den Beobachtungen von Izaña allein müßte man annehmen, daß diese Nordwestwinde ein wichtiges Glied der Passatzirkulation sind. Wenger und später Sverdrup haben die aerologisch ermittelten Westwinde durch Mischung des unteren Passats mit dem oberen Antipassat erklärt, wogegen allerdings die Konstanz und große Stärke der Nordwestwindströme auf Izaña sprechen, unter der Voraussetzung, daß diese Nordwestwinde auf Izaña nicht lokaler, sondern allgemeiner Herkunft sind. Aus allen diesen Gründen ist es notwendig, eine Klärung dieser Frage durch die Verwertung der von Cañadas aus durchgeführten Pilotaufstiege herbeizuführen. Vom März 1912 ab haben die Beobachter des spanischen Observatoriums in den Cañadas zahlreiche Pilotballons zum Aufstieg gebracht und dank der klaren Sicht meist bis in große Höhen verfolgt. Nach Jahresfrist sind diese Aufstiege viel seltener geworden, und gegenwärtig werden die Aufstiegsdaten nicht mehr veröffentlicht. Aber für die Zeit vom März 1912 bis Februar 1913 stehen rund 250 Aufstiegstage zur Verfügung, die eben ausführlich bearbeitet werden, die über die Windschichtung bis zu einer absoluten Höhe von 12 km hinauf orientieren und aus deren Ergebnissen hier einige Mitteilungen gemacht werden.

---

[1] Richtung von Wind und Wolken auf Teneriffa. Sitzungsber. der Wiener Akademie, 135. Band, Wien 1926.

Die Aufstiegswerte wurden auf die 8 Hauptrichtungen umgerechnet, so daß z. B. als Süd alle Richtungen zwischen S $22^1/_2$ W und S $22^1/_2$ E gezählt werden; als W alle Richtungen zwischen S $67^1/_2$ W und N $67^1/_2$ W. Die Berechnung wurde bis 2000 m für jede Höhenstufe von 500 m durchgeführt, von 2 bis 10 km für jede Kilometerstufe. Die Höhen beziehen sich auf Höhen über Cañadas. Die Häufigkeit der einzelnen Richtungen ist in Prozenten angegeben. In nachstehender Tabelle ist die Windverteilung im Jahresdurchschnitt angegeben; auf die jahreszeitlichen Unterschiede wird später in Kürze eingegangen.

Tabelle 1.

Windverteilung (Prozent) in verschiedenen Höhen über Cañadas.

	0 m	500	1000	1500	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
N	18.5	25.8	17.2	16.0	22.0	16.8	9.8	8.2	5.8	8.5	5.0	6.8	3.0
NE	24.2	20.5	19.8	17.2	8.0	5.0	10.5	10.2	15.2	12.2	8.8	10.0	4.2
E	17.5	8.0	3.8	3.5	4.5	3.0	3.0	5.5	2.0	2.5	2.7	1.0	1.0
SE	12.2	7.2	5.0	4.8	4.0	2.5	2.2	1.8	2.8	2.8	2.5	9.0	0.0
S	5.5	7.7	8.5	8.8	8.0	5.2	5.2	3.5	4.2	2.5	1.8	1.5	0.0
SW	15.0	15.8	13.0	12.2	13.3	16.0	13.0	18.3	14.2	18.8	16.7	14,5	31.8
W	3.5	10.0	18.2	20.5	23.0	27.8	31.8	32.5	35.8	38.0	46.0	40.7	50.5
NW	3.5	5.0	14.5	17.0	17.2	23.7	24.5	20.0	20.0	14.7	16.5	16.5	9.5
Zahl der Fälle:	245	248	249	248	243	235	225	212	189	171	131	83	50

In der Schicht bis 500 m findet man vorwiegend N, NE und SW, im großen und ganzen in Übereinstimmung mit den aus Terminbeobachtungen in Cañadas 1910 – 1915 gewonnenen Ergebnissen[1]. Aus den Abweichungen kann man schließen, daß die Bestimmung der Windrichtungen bei Pilotballonaufstiegen auch in Bodennähe genauer erfolgt als bei gewöhnlichen Terminen. In 1500 m Höhe, also bereits über Izaña und dem unmittelbaren Einflusse des Kraterbeckens entrückt, bemerkt man ein Anschwellen der Nordkomponente auf Kosten der östlichen Winde und bereits eine Verstärkung der Westwinde. Nordwestwinde, die in Izaña fast ausschließlich zur Beobachtung kommen, fehlen fast ganz und sind offenbar durch die nördlichen bis westlichen Winde ersetzt, die für sich als Resultierende einen NNW ergeben würden. Man muß die Annahme machen, daß in Izaña trotz seiner freien Lage auf der Kraterumwallung die Beobachtungen der Windrichtung irgendwie lokal — vielleicht durch das Massiv des westlich aufragenden

[1] Man erhält folgende Verteilung (Prozent) im Jahresmittel für Cañadas selbst:

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calm.
Pilotaufstiege	18.5	24.2	17.5	12.2	5.5	15.0	3.5	3.5	—
Terminbeob. 1910/11	5.2	30.3	11.2	4.8	5.5	25.3	2.5	2.3	13.0
» 1912/15	3.6	32.4	3.2	2.6	3.0	22.2	0.8	1.5	30.6
Izaña 1916	7.6	7.2	6.3	9.2	2.3	6.4	7.1	50.1	3.8

Pik — in der Weise beeinflußt sind, daß bei Wind von NE über N bis SW fast durchweg NW notiert wird. Auf keinen Fall deuten die Pilotaufstiege an, daß in der Höhe von Izaña fast nur Nordwestwinde vorhanden sind. Sowohl die Terminbeobachtungen in Cañadas wie die Pilotballons legen vielmehr den Schluß nahe, daß auf Teneriffa der Passat noch recht häufig bis zu Höhen von etwa 2500 m über dem Meere beobachtet wird.

Mit zunehmender Höhe gelangt man dann zunächst in Schichten, in denen NW und W immer häufiger werden, während eine Zunahme von SW zunächst nicht eintritt. Bis zu Höhen von 6000 m über Cañadas ist NW häufiger als SW, also eine äquatorwärts gerichtete Komponente der Luftbewegung häufiger als eine polwärts gerichtete Komponente, da W, der an sich am häufigsten ist, in dieser Beziehung als neutral zu betrachten ist. Erst in den größten Höhen, in die aber nur verhältnismäßig wenige Aufstiege gereicht haben, wird SW häufiger als NW, bei andauernder Zunahme der Westwinde, die mit dem SW zusammen den Antipassat darstellen. Schaltet man W aus der Betrachtung aus, d. h. macht man die Annahme, daß W ungefähr gleich häufig mit einer leichten südlichen oder nördlichen Komponente ausgestattet ist[1], so ergibt sich die Auffassung, daß die als »Mischungszone« bezeichneten Schichten zwischen unterem Passat und oberem Antipassat von großer vertikaler Mächtigkeit und durch sehr häufige Nordwestwinde ausgezeichnet sind, wenn auch NW bei weitem nicht so stark vorherrscht, wie man nach den Terminbeobachtungen von Izaña im Jahre 1916 hatte annehmen müssen[2]. Sehr merkwürdig ist ferner die Tatsache, daß die NE-Winde, die in 2—3 km oberhalb Cañadas, also in der Höhe des Pik, fast gänzlich verschwunden sind, zwischen 4 und 9 km wieder verhältnismäßig häufig und im Winter sogar vorherrschend werden.

In sehr grober Annäherung kann man sich einen Überblick über die jahreszeitlichen Unterschiede verschaffen, wenn man für die ganze atmosphärische Schicht zwischen 1 und 10 km oberhalb Cañadas die prozentualen Häufigkeitszahlen mittelt, also diese ganze Luftmasse als einheitlich auffaßt, wobei natürlich nicht vergessen werden darf, daß die Zahl verfügbarer Beobachtungen mit zunehmender Höhe abnimmt. Des Vergleichs wegen sind auch die Häufigkeitswerte der Luftschichten zwischen 0 und 1 km ober Cañadas gemittelt.

---

[1] In W sind alle Winde zwischen WSW und WNW vereinigt. Es wurde genauer untersucht, ob die als W bezeichnete Resultierende noch mit einer leichten meridionalen Komponente ausgestattet ist. Man erhält als Resultierende: Winter W 2.6° N; Frühling W 2.3° S; Sommer W 2.5° S; Herbst W 1.1° S. Diese Resultierenden beziehen sich auf die ganze Luftmasse zwischen 1000 und 10000 m über Cañadas. Bezüglich meridionaler Luftversetzung sind also die in Tabelle 1 verzeichneten Westwinde im Mittel nahezu als neutral zu betrachten, wenn auch im allgemeinen die Westwinde, vom Winter abgesehen, noch einen geringfügigen Lufttransport nach Norden besorgen. Die Charakterisierung der Westwinde als »Antipassat« ist damit — wieder vom Winter abgesehen — gerechtfertigt.

[2] In den spanischen Jahrbüchern 1917—1923 ist für Izaña nie mehr die Windverteilung, sondern nur mehr die in jedem Monat vorherrschende Windrichtung angegeben, letztere durchaus als NW oder NNW, also in Übereinstimmung mit den im Jahre 1916 fast ausschließlich herrschenden Nordwestwinden.

Tabelle 2.

Mittlere Windverteilung in der Luftschicht:

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
a. Zwischen 0 – 1000 m (ober Cañadas).								
Winter	17.7	40.3	15.0	10.3	4.0	5.7	1.3	5.7
Frühling	27.3	24.3	7.7	8.0	7.7	8.3	9.0	7.7
Sommer	15.7	10.7	9.7	8.0	7.7	22.7	18.3	7.3
Herbst	21.3	10.7	6.7	6.3	9.7	21.7	13.7	10.0
Jahr	20.5	21.5	9.8	8.1	7.3	14.6	10.6	7.7
b. Zwischen 1000 – 10000 m (ober Cañadas).								
Winter	15.7	26.4	4.8	4.5	1.7	7.1	25.5	14.3
Frühling	8.2	6.7	1.1	2.2	3.5	17.5	35.7	25.1
Sommer	5.6	4.6	4.0	2.9	6.4	27.0	39.4	10.1
Herbst	11.7	3.9	1.7	3.4	4.6	16.2	37.3	21.4
Jahr	10.3	10.4	2.9	3.2	4.0	17.0	34.5	17.7

In dem ersten Kilometer oberhalb Cañadas dominieren stark Nord und Nordost, die vermutlich in der freien Atmosphäre den auf Izaña so häufigen Nordwest vertreten. NE ist in dieser unteren Schicht am häufigsten im Winter, und deshalb ist es sehr fraglich, ob man diese Nordostwinde als Passatwinde auffassen darf. In der eigentlichen Passatzeit (Sommer) werden nördliche Winde recht selten, woraus zu schließen ist, daß der Nordostpassat bei typischer Entwicklung nicht allzu häufig bis zu Höhen von 2—3 km über dem Meere hinaufreicht. Im Sommer wird vielmehr SW und W in diesen Höhen dominierend, die also im Sommer bereits in die Antipassatströmung einbezogen sind. Im Herbst werden N und SW gleich häufig, was aber nicht beweist, daß in den Übergangsjahreszeiten diese Schichten abwechselnd vom Passat und Antipassat beherrscht würden. Denn im Frühling, also in der Entwicklungszeit des Passats, ist SW in Höhen von 2—3 km außerordentlich selten. Muß man daraus schließen, daß im Frühling der Antipassat nur selten nach Cañadas herabsinkt, so ergibt sich der weitere Schluß, daß der Nordostpassat im Frühling und Herbst im Gebiete der Kanaren vertikal mächtiger entwickelt ist als im Sommer, der eigentlichen Passatzeit.

Betrachtet man nunmehr die mittleren Häufigkeitswerte für die Luftschichten zwischen 1 und 10 km über Cañadas, so sieht man sofort, daß im Jahresdurchschnitt NW ungefähr gleich häufig wie SW ist, und nur im Sommer, also in der ausgesprochenen Passatzeit gegenüber dem SW, dem ausgesprochenen Antipassat stark zurücktritt. Beschränkt man die Bezeichnung »Antipassat« nur auf solche Strömungen, die eine polwärts gerichtete Luftversetzung herbeiführen, und sieht man davon ab, daß bei den in der Tabelle verzeichneten Westwinden noch eine ganz geringfügige, von S nach N gerichtete Komponente vorhanden ist (vgl. Fußnote S. 310), so kann man das Verhältnis SW : NW als »Antipassatindex« bezeichnen. Dieser Index ist während drei Vierteln

des Jahres kleiner als 1.0, und nur im Sommer steigt er auf 2.7. Man hat mitunter den NW in der »Mischungszone« zwischen Passat und Antipassat auf niedrigen Luftdruck in Nordafrika zurückgeführt. Wäre diese Auffassung richtig, so müßten die Nordwestwinde gerade im Sommer am häufigsten sein, weil der Druck über Nordafrika wohl auch noch in der Höhe von Izaña im Sommer am niedrigsten ist. Tatsächlich sind aber diese Nordwestwinde gerade im Sommer am seltensten. Gegen die Auffassung von Wenger und Sverdrup[1], daß die Nordwestwinde durch Massenaustausch zwischen Passat und Antipassat verursacht seien, spricht die außerordentliche Mächtigkeit der Luftschichten, innerhalb derer der NW sehr oft zur Ausbildung kommt; der Nordwest entwickelt sich in viel höher reichenden Schichten, als ich früher lediglich nach den Beobachtungen auf Izaña angenommen hatte. Nun ist es nicht zweifelhaft, daß man die fast in jeder Jahreszeit vorherrschenden Westwinde als die eigentliche Antipassatströmung anzusehen hat, daß mithin die Antipassat-Indexzahlen sehr beträchtliche Werte annehmen würden, wenn man neben dem SW auch noch W als Antipassat mitzählen würde. Aber es handelt sich doch in erster Linie immer um die meridionalen Luftversetzungen, und deshalb ist es bemerkenswert und wichtig, daß im Gebiete der Kanaren bis in große Höhen hinauf äquatorwärts gerichtete Luftversetzungen häufiger sind als polwärts gerichtete. Allerdings besorgen auch die Westwinde, wie früher erwähnt, einen höchst geringfügigen Transport in höhere Breiten. Im übrigen ist aber im Jahresdurchschnitt nicht nur NW gleich häufig wie SW, sondern N und NE sind auch zwei- bis dreimal so häufig wie S und SE, so daß im ganzen also wohl eine äquatorwärts gerichtete Luftversetzung überwiegt. Daß nur sehr wenige Besteiger auf dem Gipfel des Pik nördliche Winde, hingegen die meisten SW gefunden haben, fällt gegenüber dem Ergebnis der zahlreichen Pilotaufstiege nicht ins Gewicht. Nicht wenige Berichte sprechen von starkem West auf dem Gipfel, entsprechend dem Ergebnis unserer Auszählung.

Sehr auffällig ist auch im Winter das Vorherrschen von Nordostwind in allen Höhen. Da sie gerade in Höhen zwischen 4 und 10 km im Winter sehr häufig sind, dürfen sie nicht als Nordostpassat aufgefaßt werden. Vielleicht sind sie zurückzuführen auf die Depressionen, die sich im Winter nahe an der Westküste Nordafrikas zeigen, die aber im Grunde genommen noch unbekannter Herkunft und Konstitution sind. Hoffentlich können mit Hilfe von Schiffsmeldungen die synoptischen Karten bald auch auf den Atlantischen Ozean südlich der Azoren ausgedehnt werden. Für das Jahr, aus dem die bearbeiteten Pilotaufstiege stammen, stehen genügende synoptische Behelfe leider nicht zur Verfügung. Vielleicht bringt aber die Bearbeitung des Pilotmateriales der deutschen atlantischen Expedition auf dem »Meteor« eine Erklärung für das komplizierte Windsystem im Gebiete der Kanaren.

---

[1] H. N. Sverdrup, Der nordatlantische Passat. — Veröffentl. des Geophysikalischen Instituts der Universität Leipzig, Bd. II, Heft 1, Leipzig 1917.

A. Peppler, Die Windverhältnisse im nordatlantischen Passatgebiet, dargestellt auf Grund aerologischer Beobachtungen. — Beitr. z. Phys. d. fr. Atmosphäre, Bd. IV, 1912.

3. Barometrische Mitteltemperatur der Luftschichten zwischen Laguna und Izaña; Temperaturzustandskurve zwischen Laguna und Izana.

Da von Laguna und Izaña gleichzeitige Luftdruckbeobachtungen vorhanden sind, und da der Höhenunterschied beider Stationen bekannt ist, kann man mit Hilfe der barometrischen Höhenformel die wahre Mitteltemperatur (T_b) der zwischenliegenden 1820 m mächtigen Luftschichten berechnen. Wenn einmal eine längere Beobachtungsreihe für Izaña vorliegen wird, kann man die Schwankungen der wahren Mitteltemperatur von Jahr zu Jahr verfolgen und wird dann wahrscheinlich ihre große Bedeutung für die nordatlantische Zirkulation erkennen. Vorerst hat aber eine Untersuchung dieser Schwankungen noch wenig Wert. Da aber für die Jahre 1921—23 Luftdruckmittel beider Stationen für die Termine 7^h, 13^h und 18^h vorhanden sind, soll hier kurz die tägliche mittlere Variation der barometrischen Mitteltemperatur betrachtet werden. Da man außerdem aus den Temperaturmonatsmitteln beider Stationen, die ebenfalls für die drei genannten Jahre und die gleichen Termine vorhanden sind, unter der Annahme einer linearen Temperaturabnahme nach oben durch arithmetische Mittelbildung eine Mitteltemperatur (T_m) der erwähnten Luftschicht ableiten kann, besteht die Möglichkeit, aus der Differenz der beiden Mitteltemperaturen ($T_b - T_m$) einen Schluß über den wahrscheinlichen Verlauf der Temperaturzustandskurve zwischen Laguna und Izaña zu ziehen. Nachstehende Tabelle gibt T_b, T_m und die Differenz $T_b - T_m$ im Verlauf des Jahres.

Tabelle 3.

Mitteltemperatur der Luftschicht zwischen Laguna (547 m) und Izaña (2367 m).

	Nach Beobachtung (T_m)				Barometrisch berechnet (Tb)				Differenz $Tb - T_m$			
	7^h	13^h	18^h	Tag	7^h	13^h	18^h	Tag	7^h	13^h	18^h	Tag
Januar	5.8	11.2	7.0	8.0	7.0	8.6	7.3	7.6	1.2	— 2.6	0.3	— 0.4
Februar	5.6	10.6	7.4	7.9	6.8	8.3	7.3	7.5	1.2	— 2.3	— 0.1	— 0.4
März	6.4	11.5	7.9	8.6	6.9	8.4	7.3	7.5	0.5	— 3.1	— 0.6	— 1.1
April	8.6	13.6	9.8	10.6	7.8	9.3	8.8	8.6	— 0.8	— 4.3	— 1.0	— 2.0
Mai	10.7	15.4	11.7	12.6	10.0	11.0	10.6	10.5	— 0.7	— 4.4	— 1.1	— 2.1
Juni	14.3	18.0	16.0	16.1	13.1	14.1	13.7	13.6	— 1.2	— 3.9	— 2.3	— 2.5
Juli	16.9	22.8	18.6	19.4	18.6	19.8	19.0	19.1	1.7	— 3.0	0.4	— 0.3
August	17.3	24.0	19.4	20.2	19.8	20.9	20.3	20.3	2.5	— 3.1	0.9	0.1
September	14.4	19.9	15.5	16.6	15.2	16.6	15.8	15.9	0.8	— 3.3	0.3	— 0.7
Oktober	12.2	17.6	13.5	14.4	13.5	15.1	14.3	14.3	1.3	— 2.5	0.8	— 0.1
November	8.9	12.6	9.8	10.5	10.4	11.6	10.7	10.9	1.5	— 1.0	0.9	0.4
Dezember	7.0	10.3	7.7	8.4	8.1	9.5	8.6	8.7	1.1	— 0.8	0.9	0.3
Jahr	10.7	15.6	12.0	12.8	11.4	12.7	11.9	12.0	0.7	— 2.9	— 0.1	0.8

Betrachtet man zunächst nur die Tagesmitttel, so sieht man, daß die barometrisch berechneten Mitteltemperaturen durchschnittlich etwas niedriger sind als die arithmetischen Mittel aus den unten und oben beobachteten Temperaturen. Nur im Frühling ist die Differenz sehr groß, und man muß

annehmen, daß die Temperaturverhältnisse in der freien Atmosphäre, wie sie durch die barometrische Temperaturberechnung angedeutet werden, besonders im Frühling erheblich von jenen abweichen, die sich aus den Oberflächentemperaturen in Laguna und Izaña bei linearem Verlauf der Zustandskurve ergeben. Es ist aber bemerkenswert, daß gerade in den wärmsten Monaten Juli und August die Differenz sehr klein ist. Was die Differenz zur Zeit der Einzeltermine anbelangt, so sind die Differenzwerte um 18^h durchschnittlich klein und dem Vorzeichen nach unbestimmt, morgens größer, unter starkem Überwiegen des positiven Vorzeichens, mittags sehr groß mit ausschließlich negativem Vorzeichen. Tagsüber ist das Inselmassiv unter dem Einfluß der starken Sonnenstrahlung in einen Mantel warmer Luft gehüllt, und die Temperaturen müssen in Laguna und wohl auch noch in Izaña höher sein als in gleicher Höhe der freien Atmosphäre. Umgekehrt in den Morgenstunden, in denen noch die durch nächtliche Ausstrahlung erkaltete Luft längs der Berghänge abwärts fließt und namentlich im Becken von Laguna sehr niedrige Morgentemperaturen erzeugt; nur von April bis Juni weisen die bereits morgens negativen Differenzwerte auf schon vorhandene Heizwirkung hin.

Während T_m sich im Laufe des Tages sehr stark ändert, weil nicht nur in Laguna, sondern auch noch oben in Izaña die Tagesschwankung der Temperatur sehr groß ist, ändert sich die barometrische Mitteltemperatur im Laufe des Tages nur sehr wenig. Durchschnittlich steigt die Temperatur von 7^h—13^h in Laguna um 6.1°, in Izaña um 3.8°, demzufolge T_m um 4.9°, während T_b nur um 1.3° steigt.

In einer früheren Untersuchung[1] wurde nach den Beobachtungen der Bodenstationen der Verlauf der Temperaturzustandskurve über Teneriffa (Nordseite) dargestellt. Es entsprach den Ergebnissen gelegentlicher aerologischer Untersuchungen in der Passatzone, daß auch die Bodenstationen für die untersten Hektometer von der Küste nach oben überadiabatische Gradienten ergaben. Auf diese unterste Schicht, die höchstwahrscheinlich zur Bildung der bekannten Passatwolken Veranlassung gibt, folgt dann bis Laguna im Sommer eine Inversion und über dieser sehr langsame Temperaturabnahme bis Izaña hinauf. Da aber zwischen Laguna und Izaña die Zone liegt, in der die Passatwolken sich bilden, ist anzunehmen, daß der Verlauf der Zustandskurve zwischen Laguna und Izaña kein einfacher ist. Einige Anhaltspunkte für den Verlauf der Zustandskurve bieten die barometrisch berechneten Mitteltemperaturen.

Als Basistemperaturen der 1820 m hohen Luftschicht haben die Temperaturen von Laguna zu dienen, obwohl hier stärkste, lokale Beeinflussung vorhanden ist: Morgentemperatur zu niedrig wegen Ansammlung kalter Luft und damit sehr wahrscheinlich eine starke Bodeninversion morgens; hingegen mittags starke Übererwärmung der untersten Luftschichten, in denen mittags äußerst rasche Temperaturabnahme nach oben anzunehmen ist. Izaña dürfte wohl nur mittags etwas höhere Temperaturen als die freie Atmo-

[1] Temperatur und vertikale Temperaturabnahme auf Teneriffa. — Köppenheft der Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 1926.

sphäre haben, da Izaña trotz seiner freien Lage und der kräftigen Ventilation tagsüber immerhin noch etwas durch die gewaltige Überheizung der Luftmassen im Cañadasbecken beeinflußt sein dürfte. Wir betrachten als Beispiel den Passatmonat August und stellen im folgenden die Temperaturwerte zusammen:

	Laguna	Izaña	T_m	T_b
7^h	18.0	16.7	17.3	19.8
13^h	26.8	21.2	24.0	20.9
Tagesmittel	22.1	18.2	20.2	20.3

Betrachtet man zunächst die Morgenwerte, so ergibt sich die erstaunliche Tatsache, daß die barometrische Mitteltemperatur nicht nur höher als T_m ist, sondern auch höher als die beiden für Ableitung des T_m benutzten Temperaturen am unteren und oberen Ende der betrachteten Luftsäule. Da die Temperatur in Izaña um 7^h nicht sehr verschieden von der Temperatur der freien Atmosphäre in gleicher Höhe sein kann, muß die in Laguna beobachtete Temperatur viel zu niedrig sein. Nimmt man an, daß — von einer Bodeninversion in Laguna abgesehen — zwischen Laguna und Izaña lineare Temperaturabnahme mit der Höhe vorhanden ist, so ergibt sich für T_x, das ist die Temperatur in Laguna, aber ober der kalten Bodenschicht, der Wert von 22.9°, d. h. die Zustandskurve muß durch eine sehr kräftige Inversion in den untersten Schichten ausgezeichnet sein. In Wirklichkeit wird sie wohl den berechneten Betrag noch übersteigen. Selbst wenn man für Laguna den berechneten Wert von 22.9° einsetzt, ist der Temperaturgradient bis Izaña hinauf nur 0.34°/100 m. Der wahre Gradient wird erheblich größer sein, und es wird dafür in den oberen Schichten der Luftsäule, oberhalb der Zone der Passatwolken, die im Mittel bis ca. 1700 m reichen,

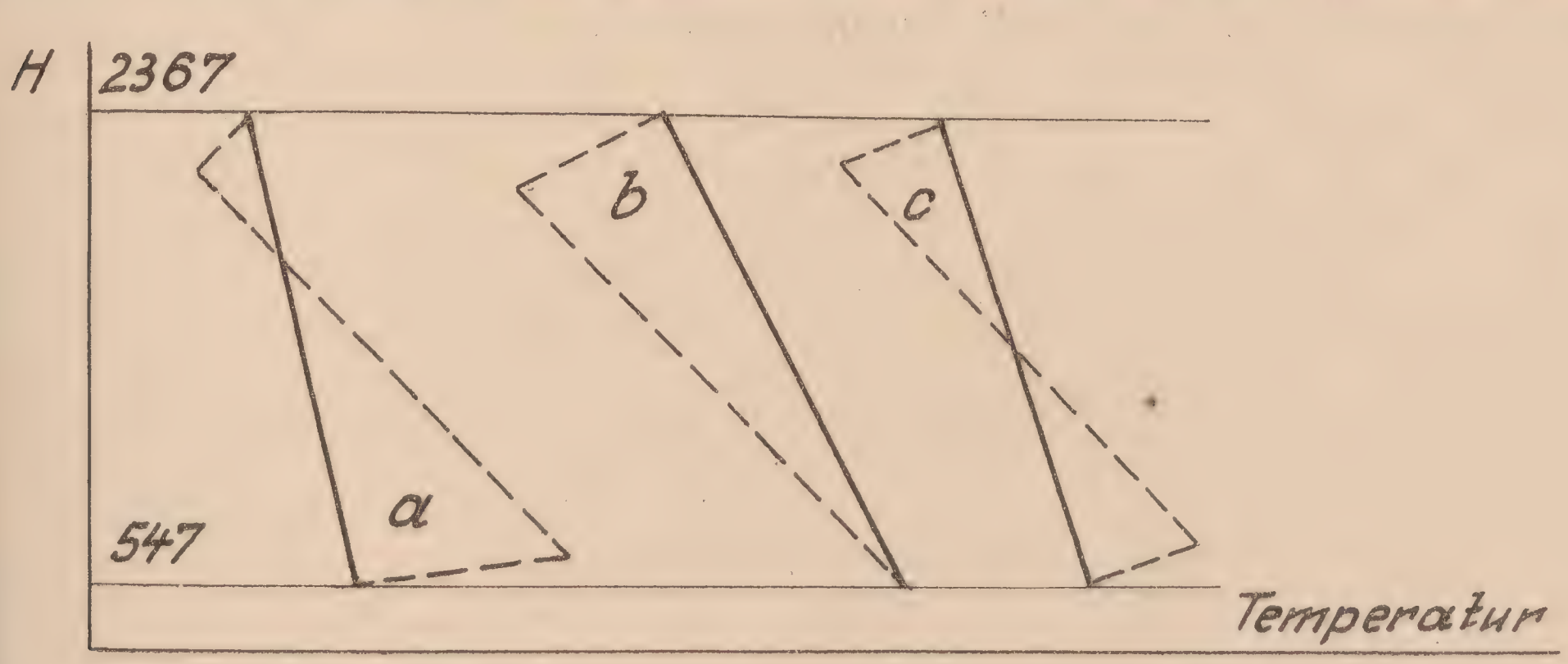


Fig. 3.

eine zweite Inversion eingeschaltet sein. In Fig. 3 a ist die ausgezogene Linie nach den wirklich beobachteten Temperaturen gezeichnet; es ist ganz ausgeschlossen, daß zwischen Laguna und Izaña morgens fast Isothermie vorhanden ist. Die gestrichelte Kurve gibt die wahrscheinliche Temperaturver-

teilung. Der genaue, d. h. der wirklichen Temperaturschichtung entsprechende Kurvenverlauf läßt sich natürlich nicht angeben, da unendlich viele Kurvenzüge der berechneten, barometrischen Mitteltemperatur angepaßt werden können. Die untere Inversion ist sicher vorhanden; die obere ist sehr wahrscheinlich und entspricht auch aerologischen Stichproben im Bereiche des Nordostpassats.

Bis 13^h steigt dann die Temperatur in Laguna und Izaña stark und T_b ist niedriger als die oben und unten beobachteten Temperaturen. Über Laguna muß in dieser Tageszeit die Temperaturabnahme äußerst rasch sein, und die in Izaña beobachteten Temperaturen werden wegen der Nähe des Kraterbeckens wohl etwas höher sein als in der freien Atmosphäre. Nimmt man zwischen Laguna und Izaña (freie Atmosphäre) lineare Temperaturabnahme an, so erhält man, da die wahre Mitteltemperatur 20.9° ist, für Izaña 15.0°, d. h. eine niedrigere Temperatur, als auf Izaña morgens beobachtet wurde, was nicht gut möglich ist. Man muß deshalb annehmen, daß um 13^h die obere Inversion sehr kräftig entwickelt ist; der wahrscheinliche Verlauf der Zustandskurve um 13^h ist in Fig. 3 b angedeutet.

Im Tagesmittel stimmen T_m und T_b genau überein, woraus jedoch nicht geschlossen werden darf, daß die wahre Zustandskurve zwischen Laguna und Izaña durch eine Gerade dargestellt werden könne oder müsse. Da das Tagesmittel sich aus den drei Terminmitteln zusammensetzt, muß auch im Tagesmittel in der Zustandskurve zunächst die große, morgens über Laguna vorhandene Inversion abgeschwächt vorhanden sein. Ist aber diese untere Inversion vorhanden, so muß man zwangsläufig auch eine zweite, höher liegende Inversion annehmen, weil sich sonst nie $T_b = T_m$ ergeben könnte. In Fig. 3 c zeigt die ausgezogene Linie die Zustandskurven zwischen Laguna und Izaña nach den oben und unten abgelesenen Temperaturen bei linearer Abnahme; die gestrichelte Kurve hingegen deutet den Verlauf an, der für die Zustandskurve in Wirklichkeit anzunehmen ist.

Zur Entwickelungsphysiologie des Periderms.

Von G. HABERLANDT.

Mit 16 Textfiguren.

I.

Seit den ausgezeichneten Untersuchungen SANIOS über den Bau und die Entwickelung des Korkes bzw. des Periderms, die 1860 erschienen sind, ist die Entwickelungsgeschichte dieses Gewebes, sofern bei ihr Zellteilungen eine Rolle spielen, nicht mehr genauer untersucht worden. Es hängt dies wohl damit zusammen, daß bei rein deskriptiv entwickelungsgeschichtlicher Fragestellung nach den Ergebnissen der SANIOschen Arbeit wesentlich neue Resultate nicht mehr zu erwarten waren. Nur wenn die Entstehung des Periderms als ein entwickelungsphysiologisches Problem aufgefaßt wird, sind neue Ergebnisse zu erhoffen.

Ich bin zu einer solchen Untersuchung durch den Widerspruch veranlaßt worden, der zwischen den Ursachen der Entstehung des sog. Wundkorkes und des im normalen Entwickelungsgange der Zweige der Holzgewächse und auch mancher krautartiger Pflanzen auftretenden Korkgewebes bzw. Periderms zu bestehen schien. Die Zellteilungen, die zur Entstehung des Korkes bzw. Phellogens führen, werden nach meinen Untersuchungen im ersteren Falle durch »Wundhormone« ausgelöst, die bei der Verletzung der betreffenden Pflanzenteile entstehen, während im letzteren Falle die Zellteilungen nach der bisherigen Auffassung autonom, aus »inneren Gründen« erfolgen sollen. Eine solche Verschiedenheit kann nicht befriedigen. Es liegt daher die Annahme nahe, daß auch die normale Korkbildung ein Vorgang ist, der auf der Einwirkung eines den sich teilenden Zellen zugeführten oder in diesen selbst entstehenden Reizstoffes, eines Teilungshormons, beruht. Da mechanische Verletzungen in diesem Falle ausgeschlossen sind, so kann es sich hauptsächlich nur um »Nekrohormone« handeln, die von absterbenden Zellen der Umgebung in die zur Teilung disponierten Zellen hineindiffundieren oder in diesen selbst durch äußere Schädigungen gebildet werden[1]. Wenn sich die Sache tatsächlich so verhält, so ist der obige Widerspruch aufgehoben.

Mit dieser Fragestellung ging ich daher im Sommer 1927 und im Frühjahr und Sommer 1928 an die Untersuchung junger Zweige verschiedener Pflanzen. Es galt festzustellen, ob die ersten Teilungen, die zur Entstehung

[1] Ich habe diesen Gedanken bereits in meiner Arbeit »Zur Entwickelungsphysiologie des Spaltöffnungsapparates« 1924 (S. 332) in Kürze ausgesprochen.

des Phellogens führen, in der Nähe abgestorbener oder im Absterben begriffener Zellen erfolgen. Schon Sanio (S. 41) hat beobachtet, »daß es gewöhnlich vereinzelte Zellen oder Zellgruppen sind, welche sich zuerst teilen, die benachbarten folgen, bis zuletzt alles davon ergriffen wird.« Es handelte sich also darum, diese ersten Zellteilungen auf Querschnitten durch die betreffenden Zweige aufzufinden und auf ihre Nachbarschaft zu achten. Die Querschnitte wurden mit dem Rasiermesser oder mit Hilfe eines einfachen Jungschen Mikrotoms hergestellt, mittels Javellescher Lauge aufgehellt und in 50proz. Glyzerin untersucht. Es ist oft vorteilhaft, die Schnitte nicht zu dünn anzufertigen, um feststellen zu können, ob sich nicht nur im Niveau der geteilten Zellen, sondern auch darunter oder darüber abgestorbene oder absterbende Elemente befinden. In manchen Fällen sind Schnittserien unerläßlich, doch war ich nur selten auf solche angewiesen. Die Auffindung der Region, in der die ersten Teilungen auftreten, ist freilich oft etwas mühsam und zeitraubend.

II.

Bevor ich zur Besprechung meiner Untersuchungsergebnisse übergehe, sind einige allgemeine Bemerkungen vorauszuschicken, die die Voraussetzungen und Bedingungen betreffen, unter welchen eine den ganzen Zweig rings umfassende Phellogenbildung stattfinden kann, wenn die ersten Zellteilungen an bestimmten Punkten von Nekrohormonen ausgelöst werden.

Die Zellwände, die in den Mutterzellschichten des Phellogens auftreten, zeigen bekanntlich einen periklinen Verlauf. Nun ist es eine von mir (I, S. 36) und später von Lamprecht und Reiche wiederholt festgestellte Tatsache, daß bei Teilungen, die unter dem Einfluß von Wundhormonen zustande kommen, die neu auftretenden Zellwände sich mehr oder minder senkrecht zur Diffusionsrichtung der aus den verletzten oder abgestorbenen Zellen heraustretenden Teilungsstoffe einstellen (»Diffusionsregel«). Wenn also Nekrohormone die Erreger der zur Phellogenbildung führenden Teilungen sind, so ist anzunehmen, daß dieselben eine radiale Diffusionsrichtung einschlagen. Das trifft, wie wir später hören werden, am deutlichsten zu, wenn die Nekrohormone aus abgestorbenen Epidermiszellen oder Haaren in die subepidermale Rindenzellage eintreten, die ja am häufigsten als die Mutterzellschicht des Phellogens fungiert.

Sind so die ersten periklinen Wände unter dem direkten Einfluß der Nekrohormone entstanden, so setzen sich von diesen lokalen Herden aus die periklinen Teilungen in der betreffenden Zellage nach allen Seiten fort. Das kann nur unter zweierlei Voraussetzungen stattfinden. Erstens muß von den schon geteilten Zellen ein Reiz auf die noch ungeteilten Nachbarzellen ausgeübt werden, der sicher auf den Übertritt eines Teilungshormons beruht. Daß die ursprünglichen Nekrohormone in perikliner Richtung weitergeleitet werden, ist im Hinblick auf die weiten Entfernungen, bis zu welchen sich die Teilungen erstrecken, so gut wie ausgeschlossen. Man hat also anzunehmen, daß die sich teilenden Zellen selbst ein Teilungshormon bilden, das

den Teilungshormonen der primären Meristeme an die Seite zu stellen ist und bei fortschreitender Phellogenbildung von Zelle zu Zelle neu entsteht. Da sich nun dieses Teilungshormon in der Mutterzellschicht des Phellogens in perikliner Richtung ausbreitet, so müßten nach obiger »Diffusionsregel« die neuen Zellwände antiklin, senkrecht zur Organoberfläche, gerichtet sein. Da dies nicht der Fall ist, sondern stets nur neue perikline Wände auftreten, so muß die »Diffusionsregel« durch einen anders gearteten Einfluß außer Kraft gesetzt werden. Dieser Einfluß besteht darin, daß, wenn von einer Zelle aus, die sich eben geteilt hat, die in gleicher Ebene liegenden Nachbarzellen sich sukzessive teilen, die neu auftretenden Wände einander mehr oder minder genau korrespondieren, so daß gewissermaßen eine einzige Wand eine ganze Zellreihe bzw. Zellfläche durchzieht (»Anschlußregel«). Ich habe diese auffallende Erscheinung bei meinen Untersuchungen über Zellteilungen nach Wundreizen immer wieder beobachtet und auch im Verfolg der Arbeiten meiner Schülerin Frl. Reiche oft genug feststellen können. Offenbar übt die sich teilende oder eben geteilte Zelle auf ihre Nachbarin einen richtenden Einfluß auf die Lage ihrer Kernspindel aus, so daß sich dieselbe unbekümmert um die Symmetrieverhältnisse so einstellen muß, daß die Zellplatte bzw. die neue Scheidewand ihren oft haarscharfen Anschluß an die vorher gebildete Wand findet. Wie dieser Einfluß zustande kommt, ist rätselhaft. Es wird sich wohl um einen chemotaktischen Vorgang handeln. Bei der Entstehung des Phellogens läßt sich die besprochene Erscheinung oft sehr schön beobachten.

Eine selbstverständliche Voraussetzung für die Entstehung des Phellogens in bestimmten Zellschichten besteht darin, daß nur diese oder hauptsächlich diese für den von den Teilungshormonen ausgeübten Reiz empfindlich sind. Diese besondere Disposition der Mutterzellschichten muß als gegeben hingenommen werden.

III.

Die Mutterzellschicht oder Initialschicht des Periderms ist entweder die Epidermis selbst oder noch häufiger die subepidermale Parenchym- oder Kollenchym-Zellage. In einigen Fällen (*Laburnum*, *Robinia*, *Gleditschia*) ist es die zweite Rindenzellschicht. So entstehen die Oberflächenperiderme (de Bary S. 563), während die inneren Periderme durch Teilungen in tiefer gelegenen Zellschichten zustandekommen, die entweder an der inneren Grenze des Sklerenchymringes bzw. eines sklerenchymähnlichen Gewebsringes der Außenrinde gelegen sind, oder an der Innenseite, seltener an der Außenseite von Bastbündeln, oder endlich, wenn letztere fehlen, an der Außengrenze der Gefäßbündel bzw. ihrer Leptomteile, wo sie den Perizykel bilden.

A. Oberflächenperiderme.

1. Die Initialschicht des Periderms ist die subepidermale Zellage.

Die Entstehung des Phellogens in ihrer nachweisbaren oder wenigstens wahrscheinlichen Abhängigkeit von Nekrohormonen läßt sich besonders deutlich in der subepidermalen Zellage verfolgen. Da dies zugleich der weitaus

häufigste Fall ist, soll damit der Anfang gemacht werden. Da genaue Untersuchungen langwierig sind, mußte ich mich hier sowohl wie in den anderen Fällen auf eine verhältnismäßig geringe Anzahl von Pflanzenarten beschränken.

Ligustrum vulgare. Die jungen Zweige sind mit sehr zahlreichen, kurzen, einzelligen, an ihren Enden meist schwach gekrümmten Haaren versehen. Der Haarkörper ist ziemlich stark, das Fußstück nur schwach oder gar nicht verdickt. Frühzeitig schon sterben die Haare ab und weisen einen krümeligen, grobkörnigen, zuweilen wurstförmigen Inhalt auf, der von den Wänden losgelöst

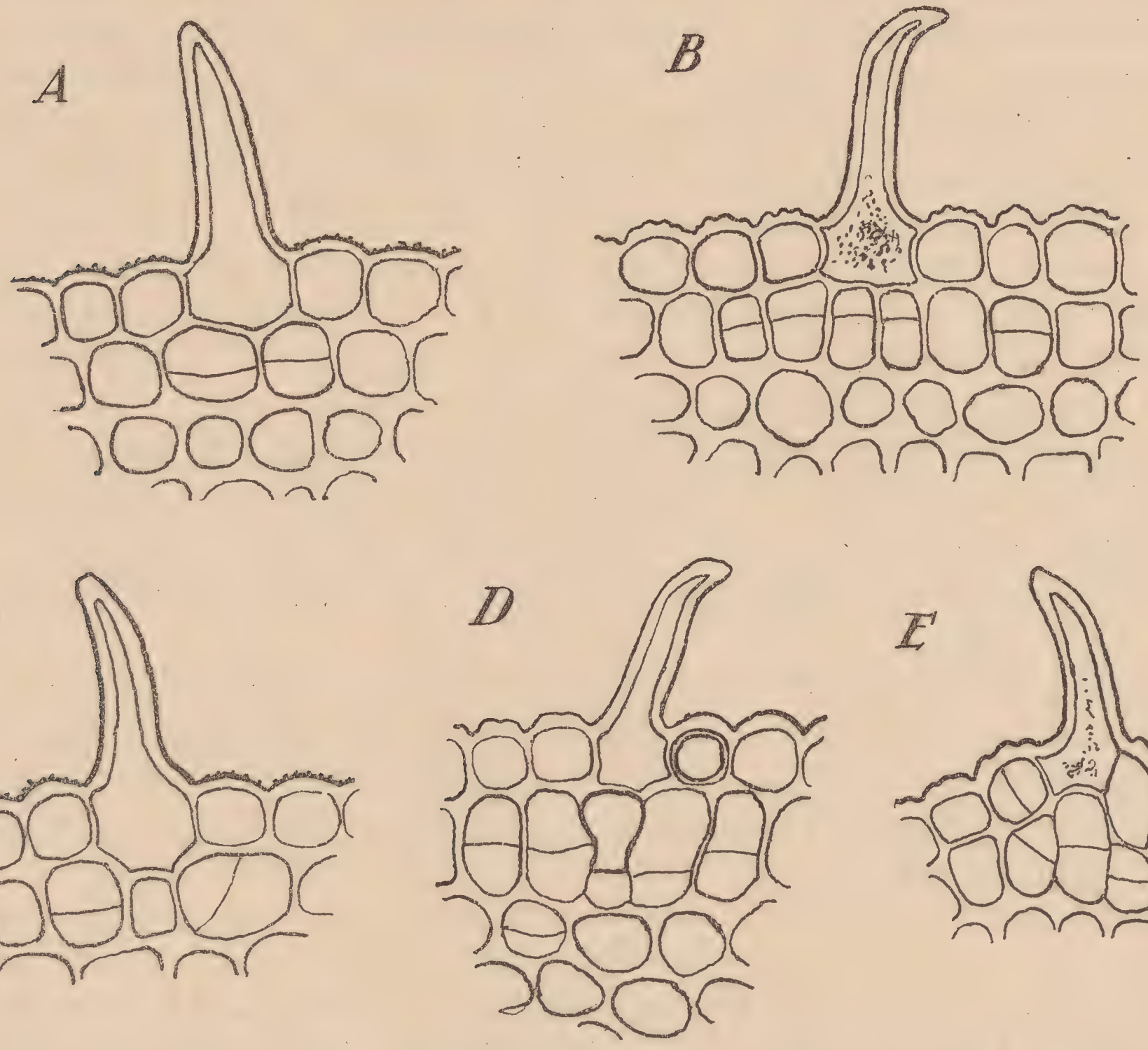


Fig. 1. Ligustrum vulgare. Teile von Zweigquerschnitten. *A* und *B* perikline Teilungen unter abgestorbenen Haaren; *C* eine perikline und eine schräge Teilung; *D* unter dem Haar eine Korkzelle (stärker konturiert), rechts vom Haar eine verkorkte Epidermiszelle; *E* Teilungen unter dem Haar und in der linken epidermalen Nachbarzelle.

ist. — Die ersten Teilungen treten in der subepidermalen Zellschicht unter den Haarbasen auf, und zwar sind es in der Regel, entsprechend der Diffusionsrichtung der aus den toten Haaren herausdiffundierenden Nekrohormone, perikline Wände, die gebildet werden (Fig. 1 *A*, *B*). Daß wirklich diese Wandorientierung durch die »Diffusionsregel« bestimmt wird, geht sehr deutlich daraus hervor, daß nicht selten, wenn die Fußstücke der Haare über das Niveau der Epidermis etwas erhoben sind, auch schräge Wände sich einstellen. In Fig. 1 *E* hat sich sogar eine Epidermiszelle der Diffusionsregel entsprechend antiklin geteilt. — Von den Haaren aus schreiten die Teilungen sehr rasch nach der »Anschlußregel« weiter, so daß bei dem Umstande, daß 260—300 Haare pro mm^2 vorhanden sind, die neuen Wände

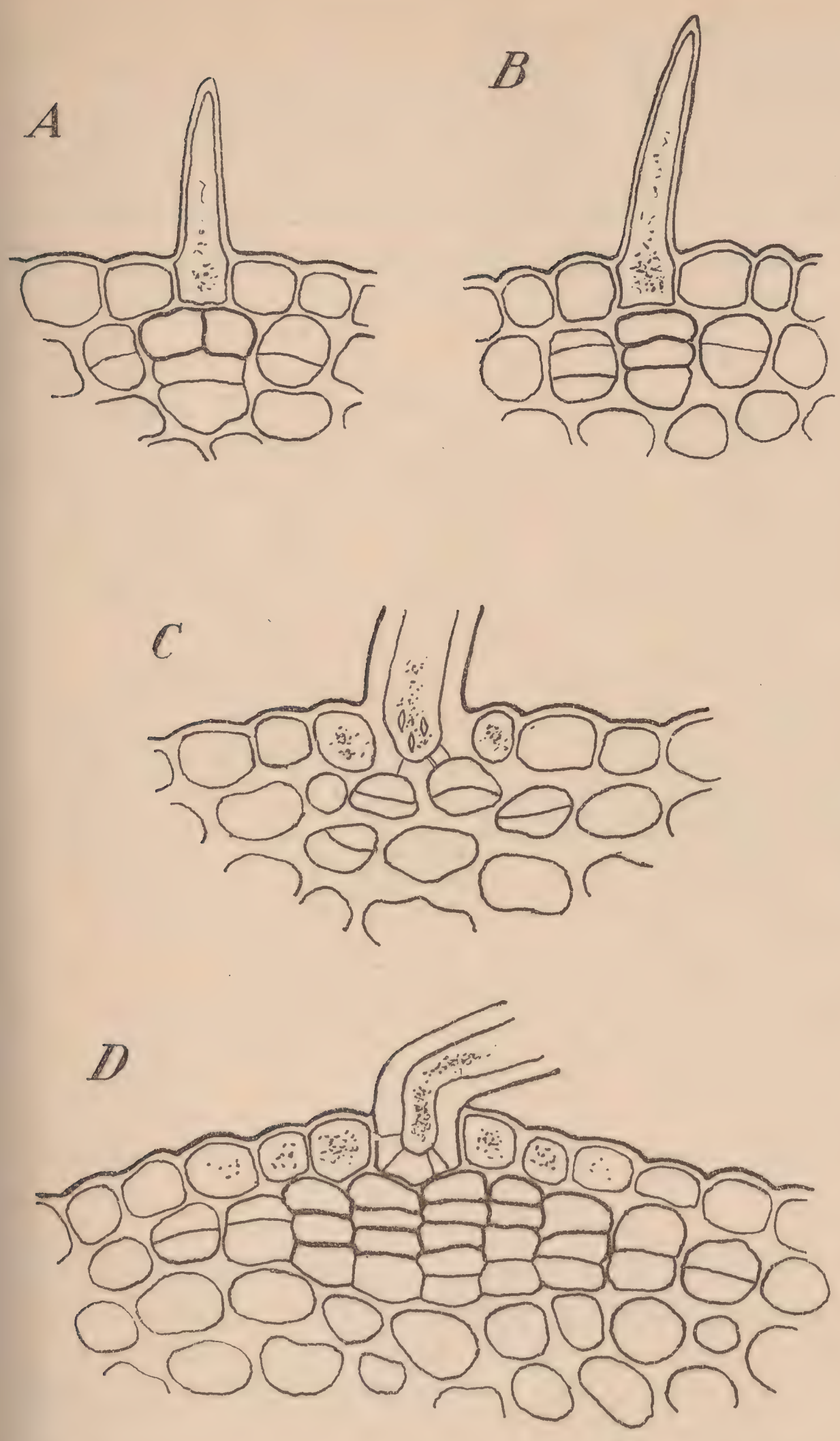


Fig. 2. Carpinus betulus. A und *B* Teilungen und Korkzellbildung unter schwächeren Haaren; *C* und *D* desgleichen unter stärkeren Haaren.

schon bald fast lückenlos über den Zweigumfang sich verbreiten. Aber auch jetzt noch läßt sich feststellen, daß die Phellogen- bzw. Korkbildung von den Haarbasen ihren Ausgang nimmt. Unter diesen treten nämlich die ersten Korkzellen mit ihren Suberinlamellen auf, wie die intensive Färbung mit Suden III erkennen läßt. In Fig. 1 *D* ist nicht nur eine an das Fußstück des Haares unten angrenzende Korkzelle vorhanden; auch die rechte epidermale Nachbarzelle hat, ohne sich vorher geteilt zu haben, eine Suberinlamelle erhalten. Daraus geht hervor, daß die Nekrohormone nicht nur den Zellteilungsmechanismus, sondern unter Umständen auch das Gen oder den Genkomplex für die Verkorkung der Zellwand zu aktivieren vermögen.

Carpinus betulus. Die jungen Zweige besitzen zweierlei einzellige Haare; sehr zahlreiche, kurze, senkrecht abstehende, teils mit dicken, teils mit dünnen Wänden (Fig. 2 *A*, *B*); und in weitaus geringerer Anzahl bedeutend stärkere und längere, deren Fußstücke stark verdickte, getüpfelte Wände aufweisen (Fig. 2 *C*, *D*). Die ersten Teilungen stellen sich unter den Basen der längeren Haare ein, die so wie ihre epidermalen Nebenzellen frühzeitig absterben. Auch unter den kurzen Haaren kommt es zu lokalen Zellteilungen, doch anscheinend nur unter den dünnwandigen, die nur in spärlicher Anzahl vorhanden sind. Es muß dahingestellt bleiben, ob diese dünnwandigen Haare, die frühzeitig absterben, sich zu dickwandigen Haaren entwickelt hätten, wenn sie am Leben geblieben wären, oder ob sie eine besondere Art der kurzen Haare vorstellen. Die ersten Korkzellen bilden sich unter den Basen der langen und der dünnwandigen kurzen Haare. Unter den ersteren entstehen so kleine Korkpusteln. Die Zellteilungen breiten sich nach allen Seiten rasch aus, so daß nur bei

sorgfältigem Suchen jene Zweigzone aufzufinden ist, bei der die Abhängigkeit des Teilungsbeginns von den Haaren festgestellt werden kann. Das erste Auftreten vollkommen ausgebildeter Korkzellen unter den Haarbasen erleichtert die Untersuchung (Fig. 2 *A*, *B*, *D*).

Zwischen den Haaren treten nicht selten abgestorbene, gebräunte epidermale Zellgruppen auf, unter denen ebenfalls frühzeitig Teilungen zu be-

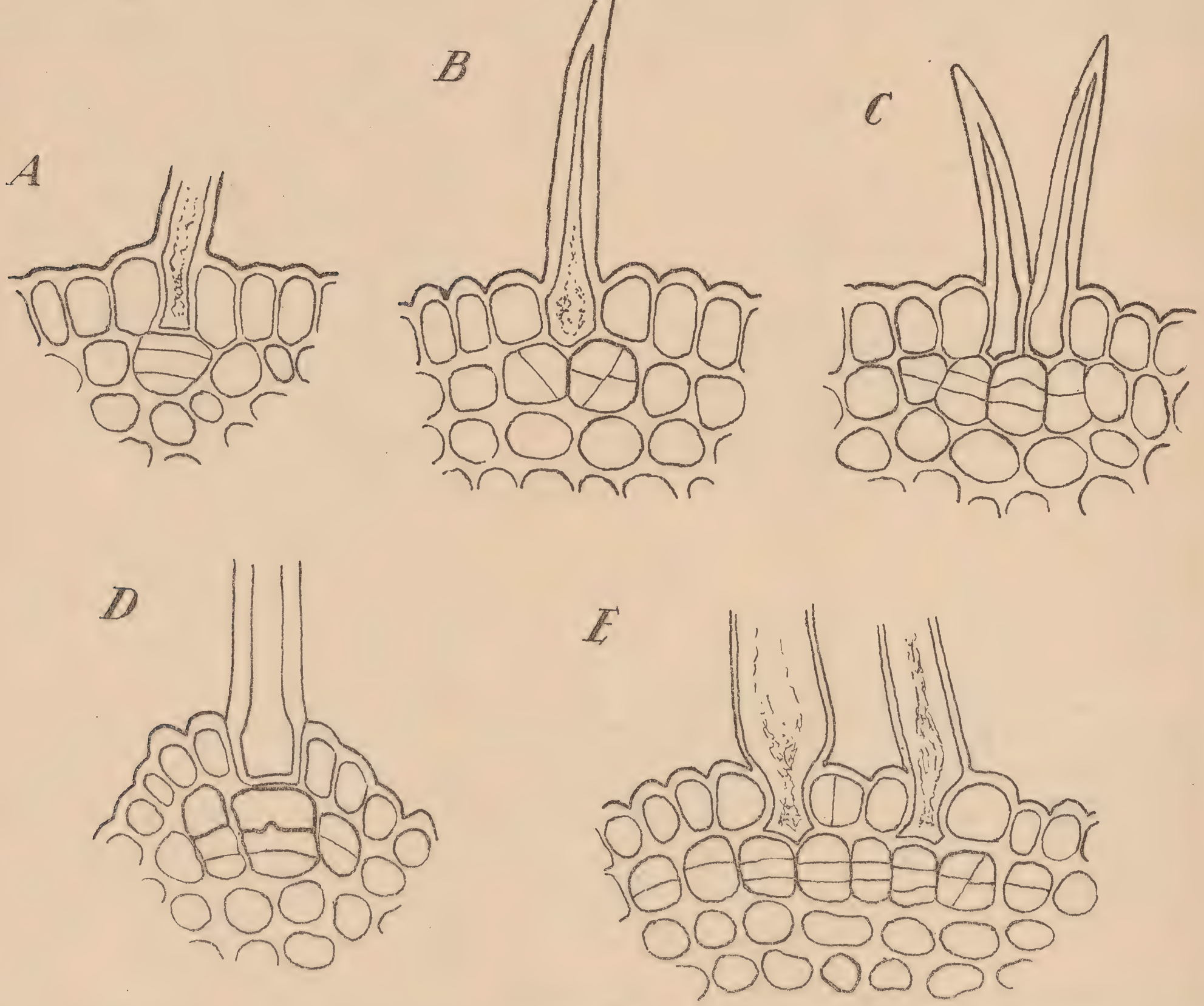


Fig. 3. Betula pubescens. *A* die subepidermale Zelle unter der Haarbasis hat sich zweimal geteilt; *B* schräge Teilungen; *C* Teilungen unter einem Doppelhaar; *D* Teilungen mit Korkzellbildung unter einem stärkeren Haar; *E* Teilungen unter zwei früh abgestorbenen größeren Haaren.

obachten sind. Ob diese Epidermiszellen von vornherein zu frühem Absterben bestimmt sind, oder ob sie einer äußeren Schädigung unterliegen, läßt sich nicht sagen.

Betula pubescens. Infolge der sehr dichten Behaarung der jungen Zweige fällt es nicht leicht, das Auftreten der ersten Teilungen unter den Haarbasen festzustellen. Doch geht aus den Abbildungen (Fig. 3) mit Sicherheit hervor, daß dies in der Tat zutrifft. Das ausnahmsweise Vorkommen schräger Wände unter Fußstücken, die keilförmig zwischen die subepidermalen Kollenchymzellen einspringen, entspricht der Diffusionsregel (Fig. 3 *B*). Die Haare sind von sehr verschiedener Länge und Dicke. Am frühesten

treten die Teilungen unter den starken Haaren ein; hier entstehen auch in den oberen Tochterzellen die ersten Suberinlamellen (Fig. 3 *D*). Manche Haare sterben sehr früh ab, bevor ihre Wände stärker verdickt sind; die Fußstücke derselben werden dann von den benachbarten Epidermiszellen stark zusammengepreßt (Fig. 3 *E*). Unter solchen Haaren stellen sich die Teilungen entsprechend früh ein. Zuweilen teilen sich auch einzelne epidermale Nachbarzellen, und zwar nach der Diffusionsregel durch antikline Wände.

Betula verrucosa. Die jungen Zweige sind unbehaart. Unter den mächtigen Drüsenschuppen treten keine Teilungen auf; die Phellogenbildung nimmt vielmehr ihren Ausgang von den sehr früh entstehenden Lentizellen. Ihre »Verjüngungsschicht« setzt sich allseits in das Phellogen fort, und an etwas älteren Stadien läßt sich sehr schön be-

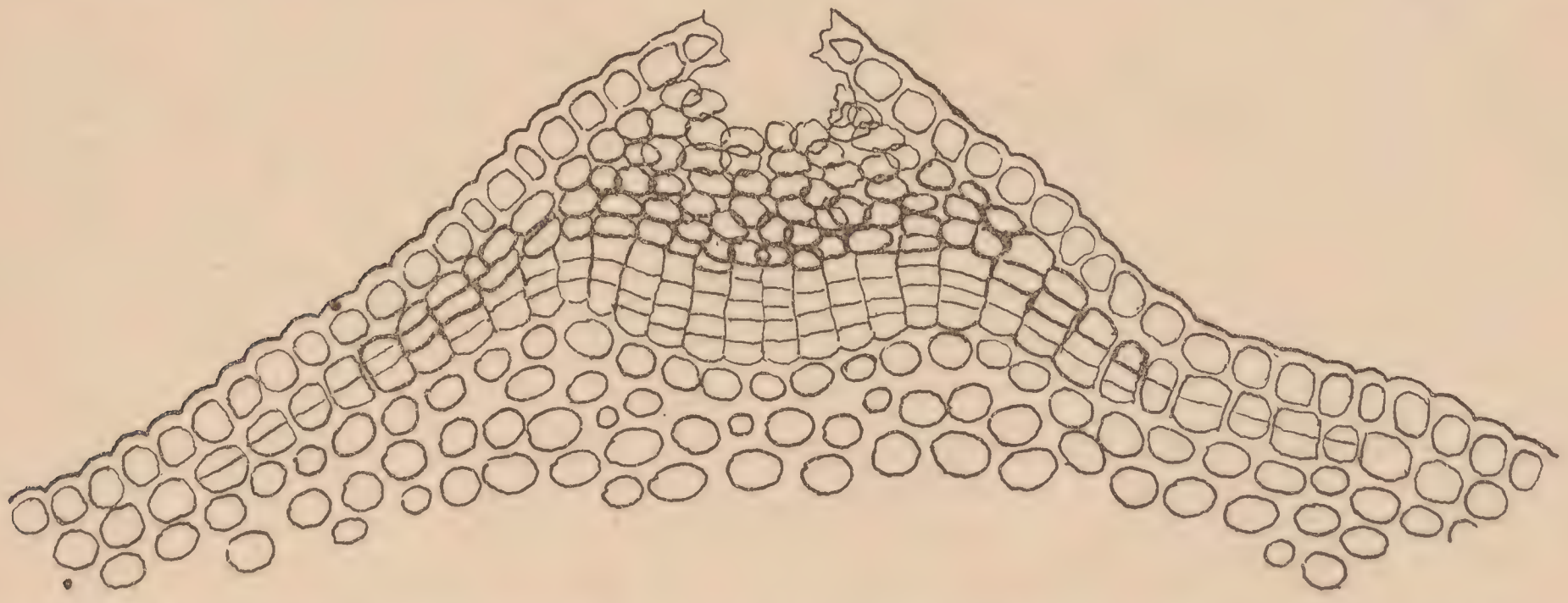


Fig. 4. Betula verrucosa. Junge Lentizelle. An die Verjüngungsschicht setzt beiderseits das Phellogen an, das in der Nähe der Lentizelle bereits Korkzellen gebildet hat.

obachten, wie letzteres in der unmittelbaren Nachbarschaft der Lentizelle bereits mehrere Korkzellen gebildet hat, während mit zunehmender Entfernung von der Lentizelle die Zahl der von jeder Phellogenzelle abgeschiedenen Korkzellen abnimmt, bis zuletzt nur noch 1 bis 2 Teilungen in der subepidermalen Zellage den Beginn der Phellogenbildung anzeigen (Fig. 4).

Die Spaltöffnungen, unter denen die Lentizellen entstehen, sind groß und anfänglich weit geöffnet. Sie sterben frühzeitig ab und sind dann geschlossen; auch einige epidermale Nachbarzellen sterben bald ab, und dann erst treten in den an die Atemhöhle angrenzenden Rindenzellen die ersten Teilungen ein. Man wird also auch die Anregung zur Lentizellenbildung auf den Einfluß von Nekrohormonen zurückzuführen haben.

Wahrscheinlich sind auch bei *Betula pubescens* nicht nur die Fußstücke abgestorbener Haare, sondern auch die jungen Lentizellen Entstehungsherde des Phellogens, doch habe ich auf diesen Punkt nicht näher geachtet.

Ulmus campestris. Die jungen Zweige besitzen sehr zahlreiche dickwandige kleine und große Haare, zwischen denen es viele Übergänge gibt. Die großen Haare weisen ein kolbig erweitertes Fußstück auf, das meist in ein niederes Postament eingesenkt ist (Fig. 5). Sie sind in ihren oberen Teilen häufig mit lokalen, polsterförmigen Wandverdickungen versehen, die

Plasmapartien abschnüren und zum Absterben bringen. — Mit Chlorzinkjod färben sich die Wände aller Haare an den Spitzen fast gar nicht, gegen die Basis zu immer intensiver goldbraun; unmittelbar über der Epidermis ist die Färbung bzw. die Kutinisierung am stärksten, was sich auch nach Behandlung mit Sudan III ergibt. Die Wände des Fußstücks, die gleichfalls stark verdickt sind, bleiben von der Kutinisierung verschont, sie färben sich gleich den angrenzenden Kollenchymwänden mit Chorzinkjod lichtblau und bestehen sonach aus relativ reiner Zellulose. Dem Durchtritt von Nekrohormonen beim Absterben der Haare werden sie sonach trotz ihrer beträchtlichen Verdickung keinen besonderen Widerstand entgegensetzen.

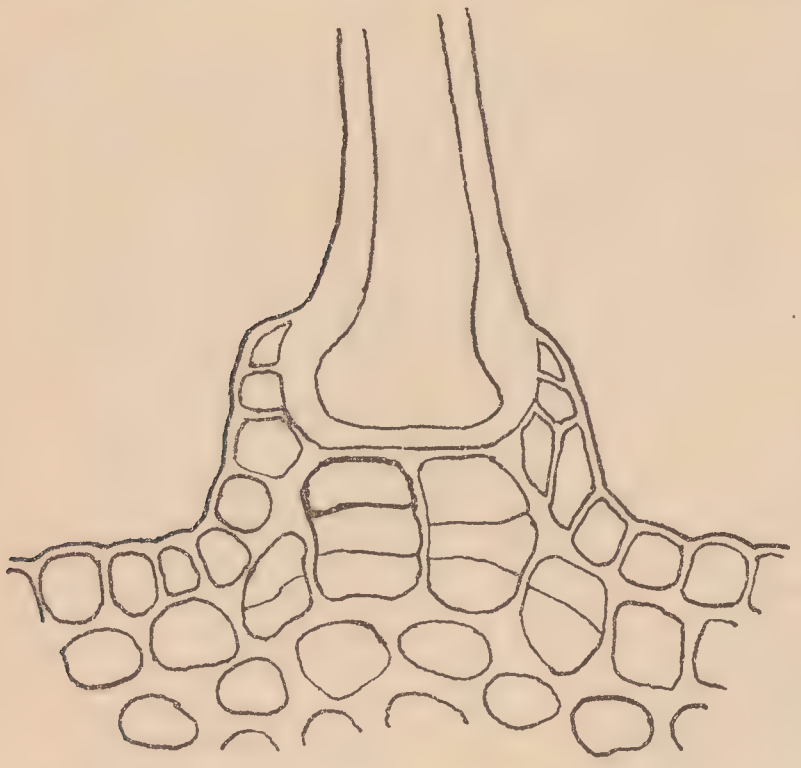


Fig. 5. Ulmus campestris. Emergenz mit einem starken Haar, unter dem sich die subepidermalen Zellen geteilt haben. Es ist bereits eine Korkzelle ausgebildet.

Die ersten Zellteilungen in der subepidermalen Kollenchymschicht beobachtet man unter den großen und mittelgroßen Haaren. Hier treten auch die ersten Korkzellen auf (Fig. 5). Unter den kleinen Haaren stellen sich Teilungen, wenn überhaupt, erst später ein. Es ist dann kaum festzustellen, ob diese Teilungen primär sind, oder ob sie sich als die seitliche Fortsetzung der von den größeren Haaren ausgehenden Teilungen erweisen.

Ptelea trifoliata. Die untersuchten Zweige stammten von zwei in geringer Entfernung voneinander befindlichen Sträuchern in den Anlagen an der Hindenburgstraße in Berlin-Wilmersdorf. Die Zweige des einen Strauches waren gedrungener, die Blätter kleiner, dunkler grün als die des anderen[1]. Erstere waren so dicht mit kleinen einzelligen Haaren versehen, daß es unmöglich war, den Beginn der Zellteilungen unter den Haarbasen festzustellen. Die Zweige des anderen Strauches zeichneten sich durch besonders kräftiges Wachstum aus und waren ganz kahl. Auffallend ist, daß einzelne Epidermiszellen oder auch Zellgruppen schon frühzeitig absterben und eine braune Farbe annehmen (Fig. 6 *A*, *B*). Die benachbarten lebenden, noch im Wachstum begriffenen Epidermiszellen wölben ihre Wände in die toten Zellen vor. Unter diesen letzteren treten die ersten Teilungen auf. Ist ein größerer Zellkomplex abgestorben, so kann es vorkommen, daß darunter nicht die erste, sondern die zweite Kollenchymzellschicht das Phellogen des betreffenden Areals bildet (Fig. 6 *B*). Die erste Zellschicht wird »überschlagen«, wie das auch bei der Wundkorkbildung der Kartoffel so häufig eintritt.

Auch von jungen Lentizellen, deren Anlage unter schon abgestorbenen Spaltöffnungsapparaten erfolgt, kann, wie die Fig. 6 *D* zeigt, die Phellogenbildung ihren Ausgang nehmen. Die Grenze zwischen Verjüngungsschicht der Lentizelle und Phellogen war in diesem Falle eine ganz scharfe.

---

[1] Wahrscheinlich handelt es sich um Standortsmodifikationen, was trotz der großen Nähe der beiden Standorte deshalb leicht möglich ist, weil die Sträucher in aufgeschüttetem Großstadtboden wurzeln.

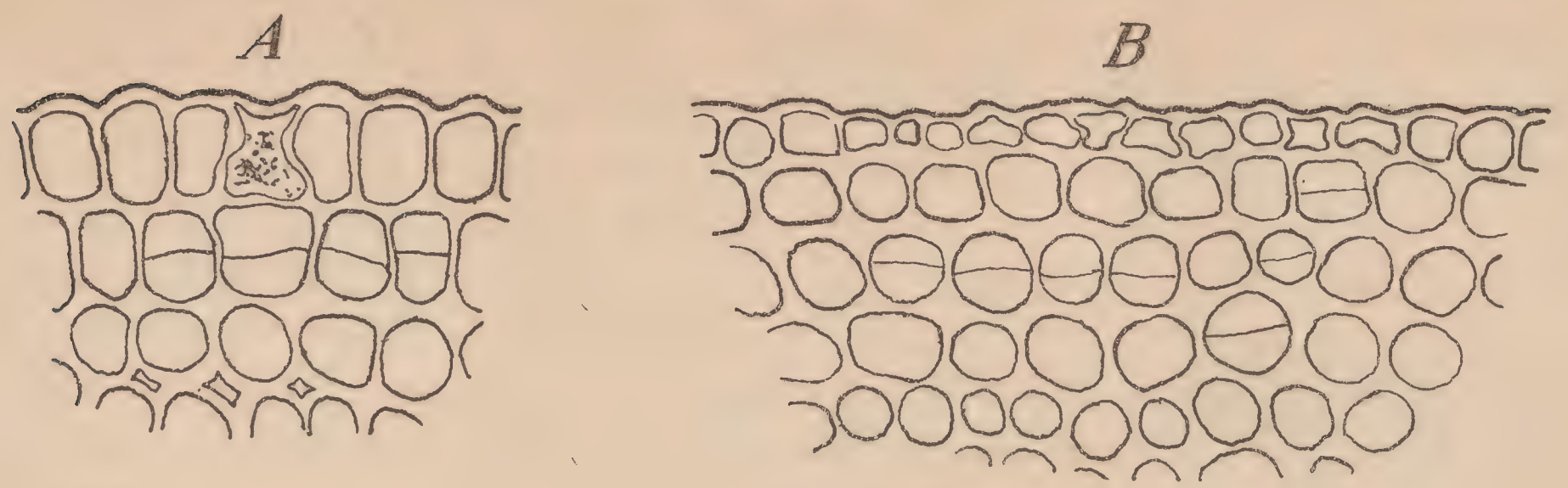


Fig. 6. Ptelea trifoliata. *A* Teilungen unter einer abgestorbenen Epidermiszelle; *B* Teilungen unter einer größeren Anzahl abgestorbener Epidermiszellen; die subepidermale Zellage wurde überschlagen; *C* Beginn der Lentizellenbildung; *D* junge Lentizelle; an die Verjüngungsschicht schließt sich beiderseits Phellogen an.

Acer Negundo. Bei vielen Holzgewächsen aus verschiedenen Familien überdauert die Epidermis die erste Vegetationsperiode und stellt noch an zwei- und mehrjährigen Zweigen und Ästen das alleinige Hautgewebe vor. Während es bei *Viscum* und anderen *Viscoideen* überhaupt nicht zur Korkbildung kommt, findet eine solche in der Regel früher oder später statt, wobei sich aber gewisse Besonderheiten einstellen, die an einem Beispiel, *Acer Negundo*, genauer besprochen werden mögen. Inwieweit sich andere Holzgewächse mit mehrjähriger Epidermis gleich oder ähnlich verhalten, bleibt näher zu untersuchen.

An zwei- bis dreijährigen Zweigen dieser Ahornart treten in der mit sehr dicken (13—15 μ), stark kutinisierten Außenwänden der Epidermis an zahlreichen Stellen Längsrisse auf, und zwar fast immer über den Seitenwänden, die bis zu den innersten Kutikularschichten reichen (Fig. 7). An diesen Stellen findet die mit dem Dickenwachstum verbundene Dilatation statt, die Risse werden zu immer breiteren Spalten, und die ihren Rändern benachbarten Epidermiszellen werden so stark in die Breite gedehnt, daß dieselbe das Zwei- bis Dreifache des ursprünglichen Breitendurchmessers beträgt. Bei weiter zunehmender Dilatation können aber diese Epidermiszellen an Breite nicht mehr zunehmen, sondern werden in ihren Mittellamellen auseinandergerissen.

Auch die unter den Rissen und Spalten gelegenen Kollenchymzellen verbreitern sich natürlich entsprechend stark, und bald

treten in ihnen die ersten Teilungen auf. Zuerst in der subepidermalen Schicht, wobei es auffällt, daß die neu auftretenden Wände weder periklin noch antiklin, sondern schräg gerichtet sind (Fig. 7 *B*, *C*). Liegt unter der Spalte auf dem Querschnitt nur eine einzige breite Kollenchymzelle, so treten in ihr zwei schräge Wände auf, die so orientiert sind, daß sie von außen nach innen zusammenneigen (Fig. 7 *B*). Wenn unter der Spalte zwei Kollenchymzellen liegen, teilt sich jede Zelle zunächst nur einmal, wobei die Wände wieder so orientiert sind wie im ersten Falle (Fig. 7 *C*). Nur ausnahmsweise kommt es vor, daß die erste Wand periklin ist (Fig. 7 *A*).

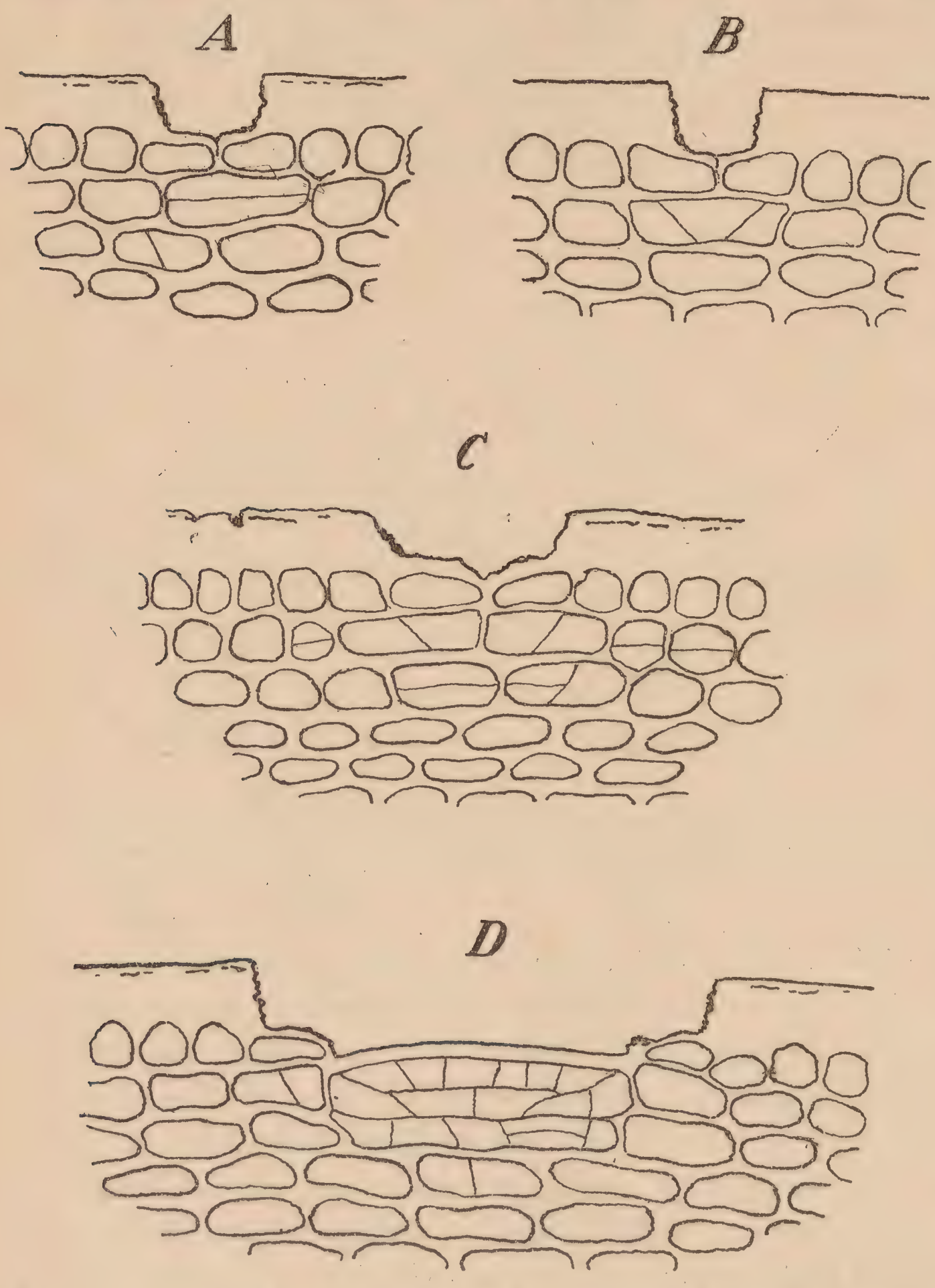


Fig. 7. Acer Negundo. A Spalte in der Außenwand der Epidermis; die darunter gelegenen Epidermiszellen sind infolge der Dilatation stark verbreitert, die angrenzende subepidermale Zelle periklin geteilt. *B* desgleichen; die subepidermale Zelle durch zwei schräge Wände geteilt; *C* desgleichen, etwas älteres Stadium. *D* noch älteres Stadium; die verbreiterten Epidermiszellen sind weit auseinandergewichen, die subepidermale Zelle ist an die Oberfläche getreten; ihre mittlere Tochterzelle ist in zwei mehrzellige Etagen geteilt; auch in der darunterliegenden, stark verbreiterten Zelle sind mehrere Teilungen eingetreten.

Die schräge Stellung der ersten Wände ist viel zu stark, als daß sie als eine mechanische Folge der Dilatation aufgefaßt werden könnte. Letztere kann nur in sehr geringem Maße an dem Zustandekommen der Schrägstellung beteiligt sein. Diese ist vielmehr zweifellos eine resultierende Stellung, bewirkt durch den Einfluß der Diffusionsrichtung von Nekrohormonen und des Prinzips der minimae areae, wie ein solches Kompromiß beider Tendenzen von mir auch schon in anderen Fällen nachgewiesen wurde (I, S. 37). Von dem am Grunde der Spalte liegenden, durch die Bloßlegung ihrer innersten Kutikularschichten und wohl auch durch die starke Dilatation geschädigten, im Absterben begriffenen oder schon abgestorbenen Epidermiszellen werden Nekrohormone in die darunterliegenden Kollenchymzellen abgeschieden, die diese zur Teilung veranlassen. Die Schrägstellung der Wände ist ein Indizienbeweis dafür.

Wenn die Spalte sich bereits sehr stark verbreitert hat und infolge des Auseinanderweichens der unter ihr gelegenen Epidermiszellen die subepidermalen Kollenchymzellen bzw. ihre Deszendenten an die Oberfläche gelangen, so verdicken diese zunächst ihre Außenwände nach Art der Epidermiszellen, nur nicht so stark; zugleich werden sie kutinisiert (Fig. 7 *D*). Durch perikline Teilungen kommt es zur Verdoppelung der Schichten. In Fig. 7*D* sieht man sehr deutlich, wie nach dem Auftreten zweier schräger Wände in der subepidermalen Kollenchymzelle die mittlere Tochterzelle sich durch eine perikline Wand geteilt hat, worauf in den beiden Enkelzellen weitere antikline Teilungen aufgetreten sind. Auch die unter der Spalte gelegene stark verbreiterte Zelle der zweiten Kollenchymzellage hat sich mehrmals geteilt und beginnt bereits in zwei Etagen zu zerfallen.

Im weiteren Verlauf der Entwickelung treten auch in den zu beiden Seiten der Spalte gelegenen subepidermalen Kollenchymzellen schräge oder häufiger perikline Wände auf, doch setzt sich dieser Teilungsprozeß nicht weiter fort als bis zur 6.—8. Epidermiszelle. Gleichzeitig oder schon früher verkorken die Wände der durch die Teilungen der Kollenchymzellen entstandenen Zellgruppe, mit Ausnahme der innersten Lage, die zum Phellogen wird und nun erst eine Korkhaut erzeugt, die aus stark zusammengepreßten Zellen besteht. Die verdickten Außenwände der am Grunde der Spalte gelegenen Zellen werden gesprengt, und das Korkgewebe tritt zutage[1].

Das Korkgewebe besteht nicht nur aus dünnwandigen Zellen; in einzelnen Schichten, die periodisch gebildet werden, sind die Zelluloselamellen innenseitig stark verdickt und verholzt, mit zahlreichen Tüpfelkanälen versehen.

Auf diese Weise kommen zahlreiche Korkpusteln verschiedenen Alters zustande, die auf Querschnitten sehr an Lentizellen erinnern, nur daß an Stelle des Füllgewebes echter Kork auftritt. Eine nennenswerte Verbreiterung dieser Pusteln findet nicht statt. Eine zusammenhängende Korkhaut wird vielmehr dadurch gebildet, daß die immer zahlreicher auftretenden Korkpusteln miteinander verschmelzen.

Aus den vorstehenden Beispielen geht hervor, daß die Teilungen in der subepidermalen Zellage, die die Entstehung des Phellogens einleiten, 1. unter den Fußstücken abgestorbener Haare erfolgen können, oder 2. unter abgestorbenen gewöhnlichen Epidermiszellen, mögen diese einzeln oder gruppenweise auftreten; oder daß 3. diese Teilungen von den Rändern der Verjüngungsschicht junger Lentizellen aus sich verbreiten. Es ist sehr wahrscheinlich, daß diese Entstehungsweise des Phellogens auch für die große Anzahl der übrigen Fälle gilt, in denen das Phellogen subepidermal angelegt wird. Künftige Untersuchungen müssen lehren, ob diese Annahme richtig ist.

---

[1] Bei *Acer striatum*, dessen Epidermis besonders langlebig ist, soll die Peridermbildung in dieser erfolgen (DE BARY S. 563). Nach meinen Beobachtungen an *Acer Negundo* ist dies zu bezweifeln.

2. Die Initialschicht des Periderms ist die Epidermis.

Die Fälle, in denen das Phellogen durch Teilungen in der Epidermis entsteht, sind weniger häufig (Beispiele bei Sanio und de Bary) und weisen eine größere Mannigfaltigkeit auf als bei Entstehung des Phellogens in der subepidermalen Zellage.

Nerium Oleander. Die Außenwände der Epidermiszellen sind in der Zone, in der die Korkbildung beginnt, sehr stark verdickt und kutinisiert. Zahlreiche einzellige Haare, in denen infolge der enormen Wandverdickung das Lumen zu einem engen Kanal verengt und nur das Fußstück weiter ist, bedecken die Zweige. Es sei hier gleich bemerkt, daß zwischen diesen Haaren und dem Auftreten der ersten Teilungen keinerlei Beziehungen bestehen.

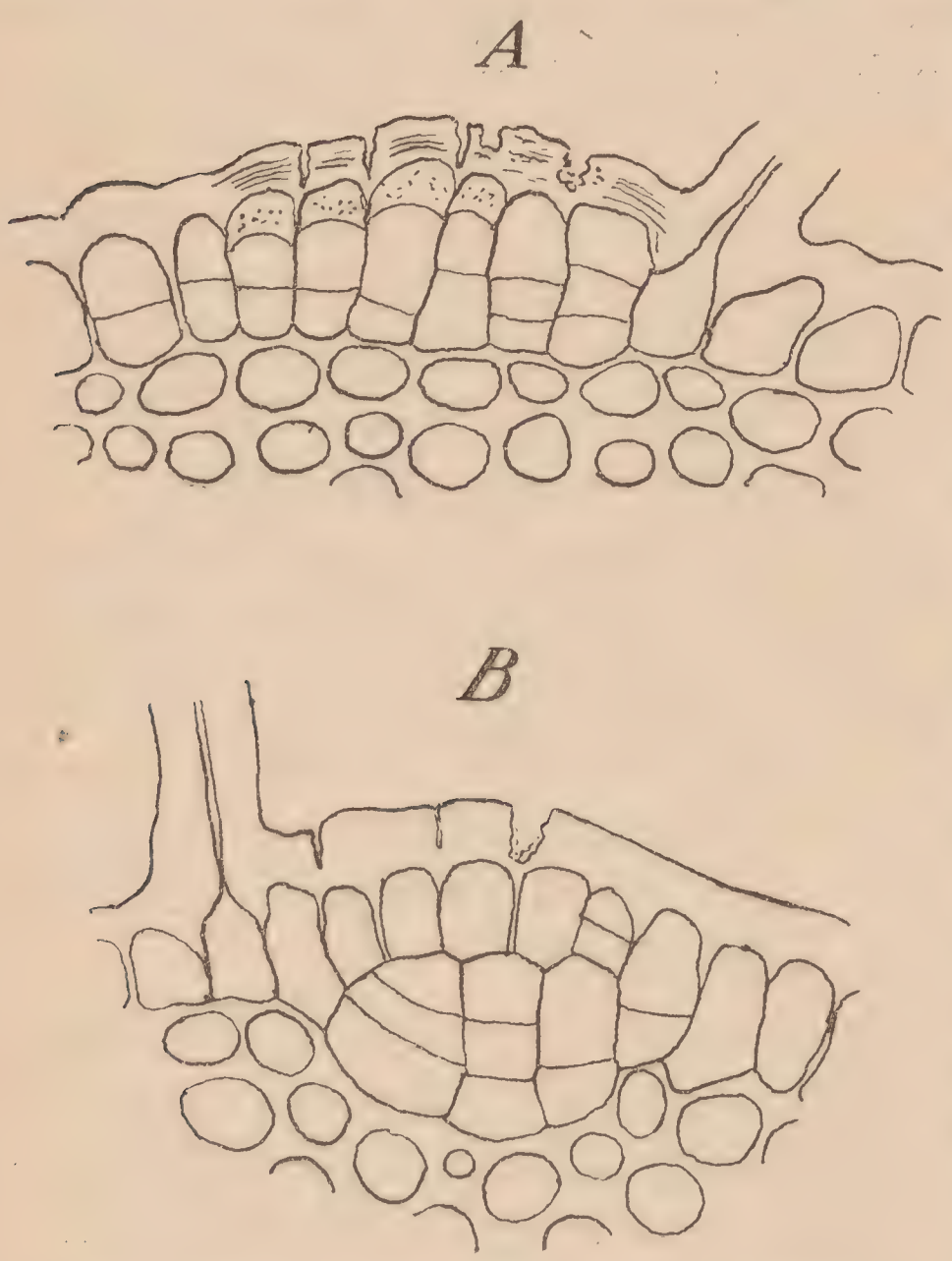


Fig. 8. Nerium Oleander. A unter der zerklüfteten und zerbröckelten Außenwand mehrerer Epidermiszellen haben sich diese periklin geteilt; punktierte Zellen abgestorben. *B* unter Spalten in der Epidermisaußenwand haben sich drei subepidermale Zellen periklin geteilt.

Auf Querschnitten, die im richtigen Niveau angefertigt sind, beobachtet man zwischen den der großen Mehrzahl nach noch ungeteilten Epidermiszellen winzige flache Korkpusteln von 0.1—0.14 Breite, die an der Zweigoberfläche mit freiem Auge nicht oder kaum wahrnehmbar sind. Es fällt sofort auf, daß die Epidermisaußenwände an der Mehrzahl dieser Pusteln fehlen. Daß es sich nicht um junge Lentizellen handelt, erkennt man daran, daß statt der bogigen Verjüngungsschicht ein gradliniges Phellogen vorhanden ist, und daß keine lockeren Füllzellen, sondern lückenlos zusammenschließende Korkzellen darüber liegen. An etwas jüngeren Stadien der Pusteln sieht man, daß die Außenwände der Epidermiszellen zwar noch vorhanden, aber mit radialen Spalten versehen, unregelmäßig korrodiert und in Abbröckelung begriffen sind (Fig. 8 *A*). Sie erscheinen substanzärmer und stellenweise sehr deutlich geschichtet, was bei den normalen Außenwänden nicht der Fall ist. Unter diesen halb zerstörten Wänden haben sich die Epidermiszellen ein- bis zweimal geteilt, die obersten Tochterzellen besitzen bereits verkorkte Wände und sind abgestorben. Seitlich setzen sich die Teilungen in den Epidermiszellen mit normalen Wänden zwei bis drei Zellen weit fort. — An noch jüngeren Stadien sind die Epidermisaußenwände zwar noch intakt, allein ihre auch nach Behandlung mit Javellescher Lauge intensiv braune Färbung läßt auf beginnende Zersetzungsprozesse schließen.

Wir haben hier also einen Fall vor uns, der klar erkennen läßt, daß den Teilungen von Epidermiszellen an verschiedenen Punkten einsetzende mechanische und chemische Zersetzungen ihrer Außenwände vorausgehen. Die Entstehung von Nekrohormonen in ihnen ist nicht zu bezweifeln. Daß nicht etwa die Entstehung der Korkpusteln das Primäre ist, die durch ihre Vorwölbung die Epidermisaußenwände sprengen, geht schon daraus hervor, daß die Abbröckelung und Zersetzung bereits vor einer nennenswerten Vorwölbung der Pusteln weit vorgeschritten ist. Natürlich wird, wenn die älteren Pusteln sich stärker vorwölben, die mechanische Dehnung der schon geschädigten Außenwände ihre völlige Zerstörung beschleunigen.

In seltenen Fällen sterben einige Epidermiszellen, deren Außenwände anfangen gesprengt und korrodiert zu werden, ab, ohne sich vorher geteilt zu haben. Dann ist es eine kleine Gruppe von darunter befindlichen Kollenchymzellen, die sich radial strecken und periklin teilen (Fig. 8 *B*). Seitlich davon setzen sich dann die Teilungen in der Epidermis fort. Wir werden diesem Modus weiter unten bei *Solanum dulcamara* nochmals begegnen.

Solanum dulcamara. Die Zweigoberfläche ist mit zahlreichen kleinen Emergenzen versehen, die am Scheitel ein längeres, mehrzelliges, oft schon früh absterbendes und an der Basis abbrechendes Haar tragen, und in deren Inneres einige kollenchymartige Rindenzellen hineinragen. Zwischen diesen Emergenzen kommen zerstreut sehr zahlreiche ganz kurze Haare vor, deren toter zäpfchenförmiger Haarkörper durch eine Wand von der lebenden großen Fußzelle abgegliedert ist.

Die Entstehung des Phellogens in der Epidermis geht auf eigentümliche Art vor sich. Sie beginnt an den Emergenzen in der Weise, daß eine oder zwei Rindenzellen, die unmittelbar unter dem ein- bis zweizelligen, abgestorbenen, gebräunten Fußstück des Haares liegen, sich periklin teilen, und daß von ihnen aus der Teilungsprozeß nach der Anschlußregel auf die benachbarten Epidermiszellen überspringt und sich in diesen fortsetzt (Fig. 9 *C*). Es war naheliegend, anzunehmen, daß auch die lebenden Fußzellen der kurzen, abgestorbenen Haare Initialzellen für die Korkbildung werden könnten, doch ist das nur sehr selten der Fall (Fig. 9 *B*).

Nicht selten begegnet man einer anderen, ebenfalls recht sonderbaren Art der Phellogenbildung. Einzelne, mehr- oder sogar recht vielzellige Epidermiszellgruppen sterben so frühzeitig ab, daß sie von den darunterliegenden Rindenzellen ganz flach zusammengepreßt werden (Fig. 9 *A*). Sie sind intensiv braun gefärbt; auch Haare mit ihren toten Fußzellen befinden sich auf diesen Arealen. Die darunter befindlichen Rindenzellen, die ihre Außenwände verdickt haben, zu einer Art sekundärer Epidermis geworden sind und nun in einer Flucht mit den benachbarten lebenden Epidermiszellen liegen, teilen sich, offenbar unter dem Einfluß der Nekrohormone, die aus den toten Epidermiszellen herabdiffundieren, in perikliner Richtung, und diese Teilungen setzen sich dann in den angrenzenden lebenden Epidermiszellen

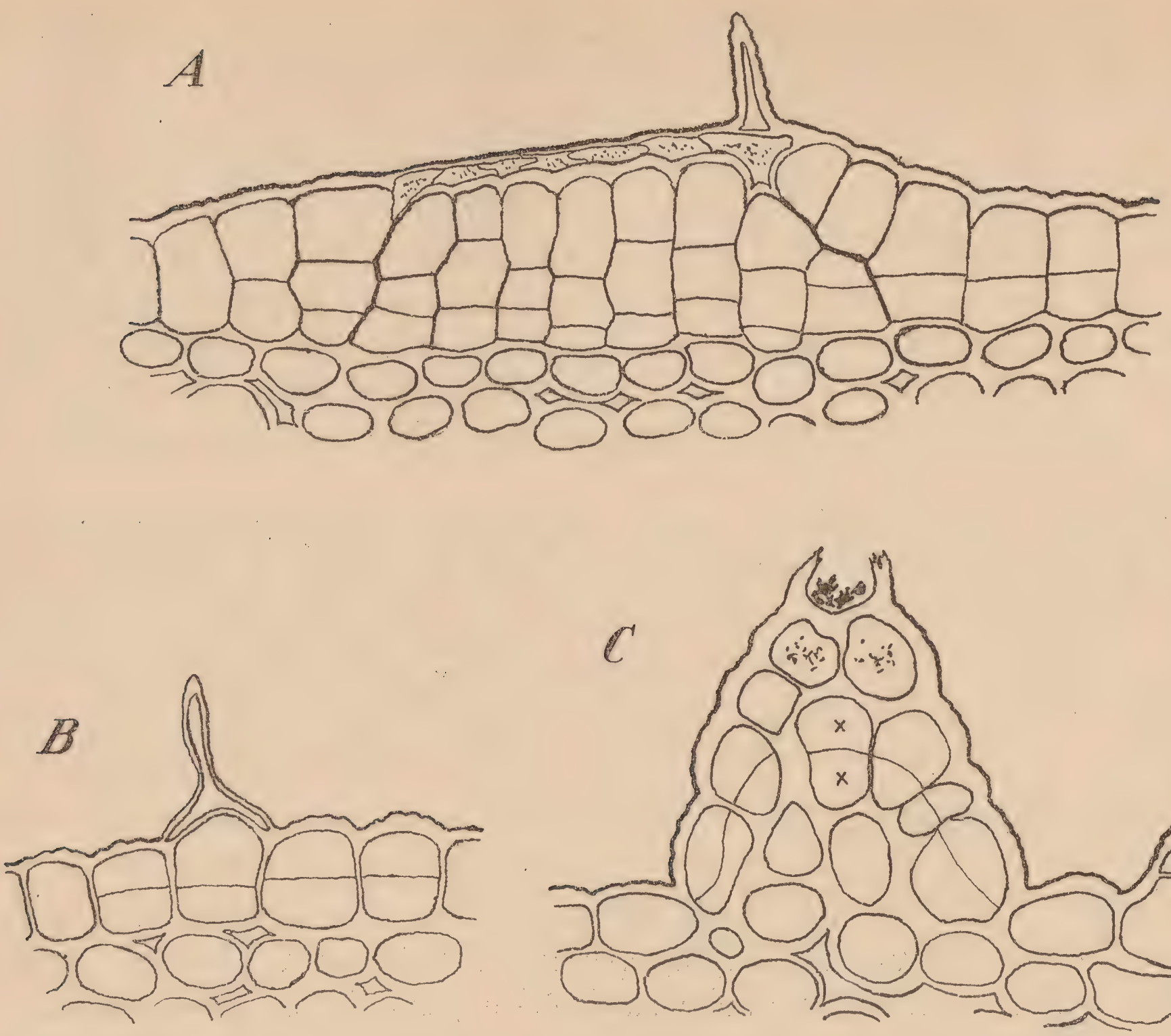


Fig. 9. Solanum dulcamara. *A* unter einer Reihe abgestorbener, zusammengepreßter Epidermiszellen und einem toten Haar haben sich die subepidermalen Zellen radial gestreckt und mehrmals periklin geteilt. Die stark ausgezogenen Linien geben die Grenzen zwischen dieser Zellgruppe und den benachbarten Epidermiszellen an, in denen sich die periklinen Teilungen fortsetzen. *B* Teilungen im Fußstück und den benachbarten Epidermiszellen eines abgestorbenen Haares. *C* Emergenz mit einem abgebrochenen Haar und den beiden Fußzellen am Scheitel; die darunterliegende Zelle in zwei mit × bezeichnete Tochterzellen geteilt. Anschließend Teilungen in den epidermalen Nachbarzellen.

fort. In Fig. 9 *A* ist rechts und links durch stärker ausgezogene Linien die Grenze zwischen sich teilendem Parenchym und der benachbarten Epidermis angegeben. Diese Entstehungsweise des Phellogens ist nicht so häufig wie die in den Emergenzen, doch gar nicht selten. Worauf das frühe Absterben einzelner Epidermiszellgruppen beruht, läßt sich nicht sagen. Irgendein Parasit wurde nicht gefunden.

Pirus malus. Die Zweige sind dicht mit mehr oder minder dickwandigen einzelligen Haaren bedeckt. Die Teilungen beginnen nicht in der Epidermis, sondern in den unter den Haarbasen gelegenen kollenchymartigen Rindenzellen, die sich radial etwas strecken, wobei ihre Wände dünner werden. Auf Querschnitten sind es zunächst 1—3 Rindenzellen, die sich tangential teilen (Fig. 10 *A*, *B*). Nicht selten wird eine Reihe von 6—7 Zellen vom Teilungsprozeß ergriffen, namentlich dann, wenn nicht nur das betreffende Haar, sondern auch seine epidermalen Nachbarzellen abgestorben sind. Von den geteilten subepidermalen Rindenzellen greift der Teilungsprozeß auf die benachbarten Epidermiszellen über und setzt sich in

diesen rasch fort (Fig. 10 *A*, *C*). Die ersten ausgebildeten Korkzellen findet man unter den Fußstücken der Haare.

Ziemlich häufig kommen in der Epidermis Areale vor, wo die Außenwände schwach gebräunt, zart geschichtet und weniger lichtbrechend sind als die homogenen Wände der normalen Epidermiszellen. Man darf wohl annehmen, daß jene Zellwandveränderungen auf chemische Zersetzungserscheinungen hinweisen, wobei Nekrohormone entstehen, die in die Zellumina hineindiffundieren. Tatsächlich treten in diesen Epidermiszellen viel früher als in den Nachbarzellen mit intakten Außenwänden tangentiale Teilungen auf, die sich dann auf die übrigen Epidermiszellen ausdehnen. — Wodurch die chemischen Umsetzungen in den Außenwänden hervorgerufen werden, ist ungewiß. Vermutlich handelt es sich um einen Einfluß der Atmosphärilien. Bei dem Umstande, daß in den Zellwänden nicht nur verschiedene Zellulosen, sondern, abgesehen vom Kutin, auch noch andere organische Stoffe, insbesondere Phosphatide, vorkommen, ist die Annahme nicht unberechtigt, daß beim Eintritt chemischer Umsetzungen mancherlei Produkte entstehen, die als Nekrohormone wirksam werden können.

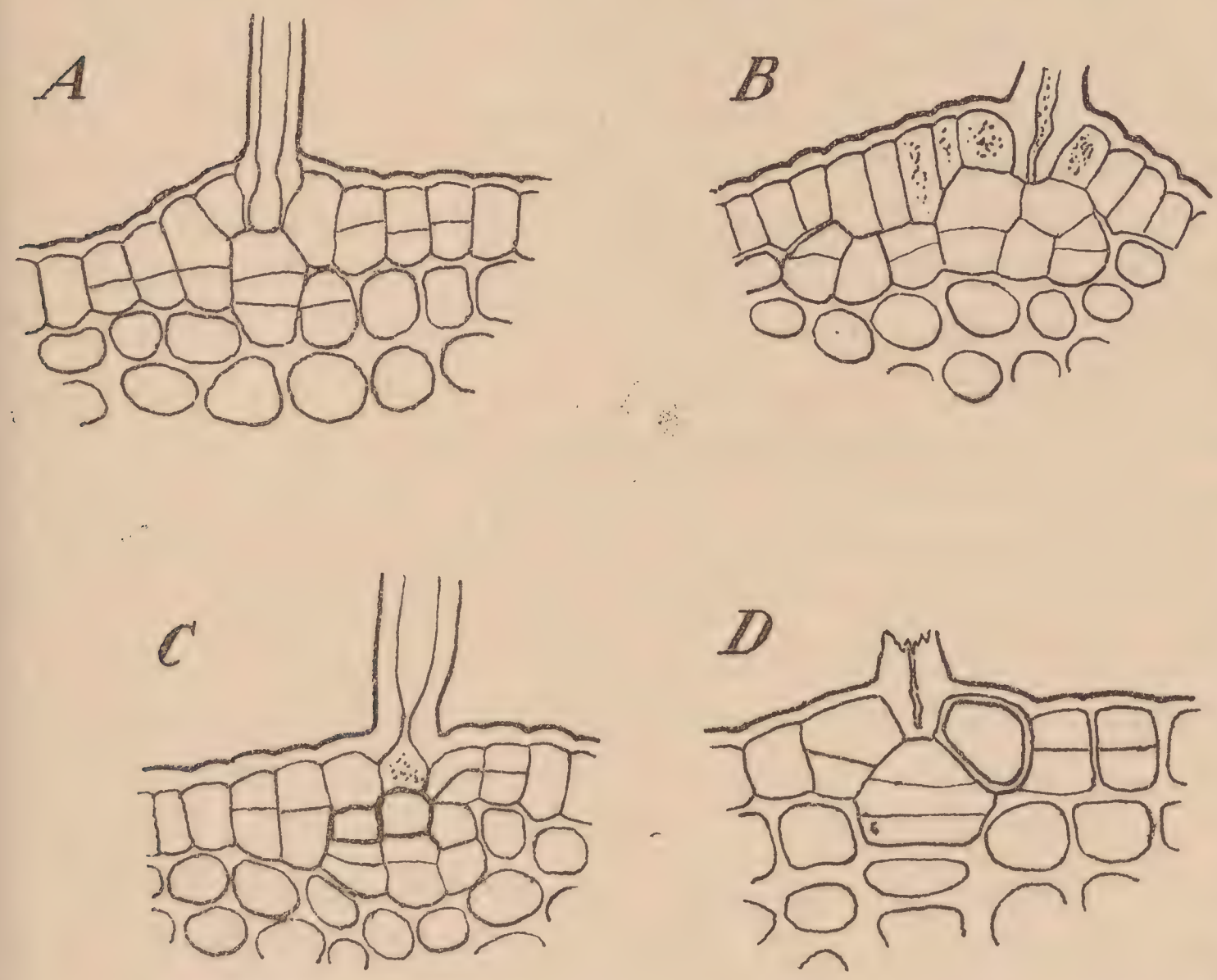


Fig. 10. Pirus malus. *A* Teilungen in den zwei unter der Haarbasis gelegenen subepidermalen Zellen und in den angrenzenden Epidermiszellen. *B* unter der Haarbasis und den angrenzenden abgestorbenen, punktierten Epidermiszellen haben sich mehrere subepidermale Zellen geteilt. *C* desgleichen; die beiden obersten Tochterzellen besitzen bereits verkorkte Wände; die benachbarten Epidermiszellen geteilt. *D Pirus vulgaris*, die unter der Haarbasis gelegene Zelle zweimal geteilt; die an das Fußstück des Haares rechts angrenzende Epidermiszelle besitzt eine Suberinlamelle.

Pirus vulgaris. Der junge Birnenzweig ist nur mit ganz spärlichen Haaren versehen, die überdies schon sehr früh absterben und abbrechen. Unter den basalen Resten dieser Haare teilen sich, wie beim Apfelzweig, eine oder auch mehrere Rindenzellen, und von ihnen greift der Teilungsvorgang auf die angrenzenden Epidermiszellen über (Fig. 10 *D*). — Auf kleineren und größeren Arealen stirbt die Epidermis schon frühzeitig ab, ihre Zellen kollabieren und werden von den sich teilenden subepidermalen Rindenzellen in radialer Richtung zusammengepreßt. An den Rändern dieses unter den toten Epidermiszellen entstandenen Phellogens setzt sich seine Bildung in der lebenden Epidermis fort.

Ich habe nur je eine Apfel- und Birnsorte untersucht. Ob die beschriebenen Vorgänge auch für andere Sorten gelten, muß dahingestellt bleiben, ist aber wohl wahrscheinlich.

Cydonia vulgaris. Die Teilungen in der Epidermis des ziemlich stark behaarten jungen Zweiges erfolgen schon außerordentlich früh, in den jüngsten, noch unausgewachsenen Internodien. Mitte Mai waren sie schon reichlich vorhanden. Eine örtliche Beziehung der ersten Teilungen zu den Fußstücken der einzelligen, abgestorbenen Haare ließ sich im allgemeinen nicht feststellen. Nur hin und wieder treten in den epidermalen Nachbarzellen der Haare schräge Wände auf, was für Nekrohormonausscheidung spricht. Teilungen in den unter den Haarbasen gelegenen Rindenzellen, wie bei *Pirus malus* und *vulgaris*, wurden nicht beobachtet. Ebensowenig Areale abgestorbener Epidermiszellen, unter oder neben welchen die Teilungen beginnen. Man findet vielmehr, daß in der ringsum lebenden, unversehrten Epidermis die Teilungen an zahlreichen Punkten gleichzeitig einsetzen und sich rasch ausbreiten. Ihre Abhängigkeit von Nekrohormonen läßt sich nicht nachweisen, wenn es auch möglich ist, daß in den scheinbar ganz intakten, nur wenig verdickten Außenwänden der Epidermis unter dem Einfluß der Atmosphärilen frühzeitig Zersetzungsprodukte gebildet werden; wenn die Zellen sehr empfindlich sind, wird schon eine ganz geringe Menge derselben teilungsauslösend wirken können. Dafür scheint der Umstand zu sprechen, daß an horizontalen Zweigen, die an der Südseite des Strauches direkter Besonnung ausgesetzt waren, die Teilungen auf der Oberseite früher auftraten als auf der Unterseite. So zählte ich in einem Falle auf 10 oberseitigen Zweigquerschnitten im Durchschnitt $21 \cdot 4$, auf den zugehörigen unterseitigen Querschnitten nur $7 \cdot 8$ geteilte Epidermiszellen. Der Unterschied kann darauf beruhen, daß die Protoplasten der Oberseite stärker erwärmt wurden, es kann aber auch sein, daß durch die höhere Temperatur die Bildung von Nekrohormonen in den Epidermisaußenwänden beschleunigt wurde. Übrigens ist zuzugeben, daß die Annahme der Wirksamkeit von Nekrohormonen bei *Cydonia* wenig befriedigt. Man wird vielleicht eher geneigt sein anzunehmen, daß die jungen Epidermiszellen, die sich schon so früh teilen, noch von der Vegetationsspitze her ihr primäres Meristemteilungshormon besitzen, das dann, wenn die Zellen ein gewisses Entwickelungsstadium erreicht haben, wirksam wird. Freilich bleibt in diesem Falle die perikline Wandrichtung unerklärt. Für *Cydonia* ist sonach die ganze Frage nach der Ursache der Phellogenbildung noch offen.

Viburnum lantana. Die Teilungen in der Epidermis treten schon ungemein früh auf und sind schon in den jüngsten Internodien der heurigen Zweige reichlich vorhanden. Die sehr zahlreichen sitzenden oder gestielten Büschelhaare sind an diesen Internodien in allen Entwickelungsstadien vertreten: von den ersten ganz zartwandigen Anlagen an (Fig. 11) bis zu den ausgewachsenen Stadien, in denen die einzelnen Strahlen der Büschel sehr stark verdickt sind. Auch diese besitzen noch lebende Protoplasten. Die Abhängigkeit der Zellteilungen in der Epidermis von Nekrohormonen ist hier ausgeschlossen. Wenn man die ganz jungen Entwickelungsstadien der Haare beobachtet, so findet man häufig, aber nicht immer, daß die benach-

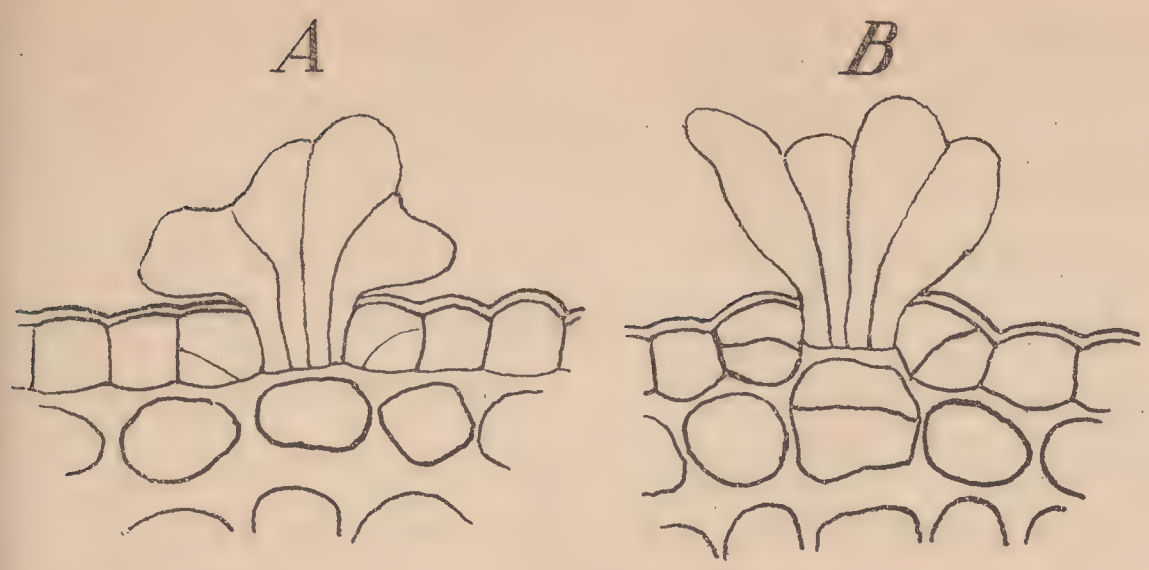


Fig. 11. Viburnum lantana. A ganz junges Büschelhaar; die epidermalen Nachbarzellen durch schräge Wände geteilt. *B* desgleichen; auch die subepidermale Zelle geteilt.

barten Epidermiszellen sich durch schräge Wände geteilt haben (Fig. 11 *A*); zuweilen ist auch die unter der Haaranlage gelegene Kollenchymzelle periklin geteilt (Fig. 11 *B*). Das erinnert sehr an die analogen Verhältnisse bei der Bildung der Nebenzellen der Spaltöffnungen (Haberlandt II) und beweist, daß von den Haaranlagen als winzigen embryonalen Herden Zellteilungsstoffe ausgeschieden werden. Für die Entstehung des gesamten Phellogens ist das aber augenscheinlich nur von geringer Bedeutung, denn an zahlreicheren Stellen treten die Teilungen der Epidermiszellen unabhängig von den Haaranlagen ein. Daraus ist zu folgern, daß die sehr jungen Epidermiszellen noch von ihrem meristematischen Stadium her das Teilungshormon besitzen. Wie es kommt, daß die neuen Wände nicht wie früher antiklin, sondern periklin orientiert werden, bleibt freilich ungewiß.

3. Die Initialschicht des Periderms ist die zweite Rindenzellage.

Bei einigen Holzgewächsen ist von Sanio die Entstehung des Periderms in der zweiten oder auch dritten Rindenzellschicht beobachtet worden; er nennt *Robinia pseudoacacia, Gleditschia triacanthos, Cytisus Laburnum* (*Laburnum vulgare*). Ich habe nur *Robinia* und *Laburnum* untersucht.

Robinia pseudoacacia. Unter der Epidermis, die nur äußerst spärliche Haare aufweist, befindet sich zartwandiges Rindenparenchym. Eine Anzahl kräftiger Kollenchymrippen umgibt ringsum den Zweig. An diesen treten zunächst ganz kurze 0.5—2 mm lange braune Streifen auf, die bei mikroskopischer Untersuchung sich als aus abgestorbenen, kollabierten Epidermiszellen und etwas später aus toten Kollenchym- und Korkzellen bestehend erweisen. Diese Streifen werden länger und verschmelzen zu je einem einzigen langen Streifen. Unter ihnen treten im Kollenchym, und zwar in der 2., manchmal erst in der 4.—5. Zellschicht, die ersten Teilungen auf, und hier kommt es auch zuerst zur Korkzellbildung (Fig. 12 *A*). Von hier aus setzen sich die Teilungen nur langsam seitlich fort, beim Auftreten in größerer Tiefe immer mehr gegen die Peripherie des Zweiges strebend, bis sie schließlich die zweite Zellage erreicht haben. Es liegt hier der auffallende Fall vor, daß die Wirkung der von der abgestorbenen Epidermis ausgehenden Nekrohormone zuweilen erst in verhältnismäßig größerer Entfernung eintritt, daß mehrere Zellagen überschlagen werden. Das spricht für eine sehr große Empfindlichkeit der Kollenchymzellen für die Teilungsstoffe.

Die Phellogenbildung nimmt ferner in noch ausgiebigerer Weise von den zahlreichen jungen Lentizellen ihren Ausgang, ganz ähnlich wie bei *Ptelea trifoliata* und *Betula verrucosa*. Es erübrigt sich, darauf näher einzugehen.

In seltenen Fällen sterben einzelne Epidermiszellen in den zwischen den Kollenchymrippen gelegenen Arealen ab. Darunter stellen sich dann früher als sonst in der zweiten Rindenzellage die periklinen Teilungen ein (Fig. 12 *B*).

Laburnum vulgare. Die jungen Zweige sind überaus dicht mit anliegenden, spitzenwärts gekehrten Haaren versehen. Sie sind dreizellig (Fig. 12 *C*); der Haarkörper besteht aus einer langen, mäßig verdickten, schon frühzeitig luftführenden Zelle, die einer ganz kurzen, dickwandigen, mit reichlichem grobkörnigen, toten Inhalt versehenen Basalzelle aufsitzt; diese wieder wird von der über das Niveau der Epidermis emporragenden Fußzelle durch eine nur schwach verdickte Wand getrennt. Das Lumen der im oberen Teil sehr dickwandigen Fußzelle ist hier ein enger Kanal, der unten in den weiten Teil des Lumens mündet. Die Epidermiszellen besitzen sehr stark verdickte Außenwände. Unter ihnen liegt eine Kollenchymzellage, der dünnwandiges Rindenparenchym folgt. Bei der so dichten Behaarung ist es unmöglich, lokale Beziehungen zwischen den Haarbasen und den ersten Teilungen in der zweiten Rindenzellschicht festzustellen. Solche werden wohl auch kaum vorhanden sein. Aus der mittleren, an toten Resten reichen Haarzelle werden Nekrohormone durch die schwach verdickte Wand leicht in das Fußstück und von da aus in die benachbarten Epidermis- und die darunterliegenden Kollenchymzellen diffundieren, die von den Nekrohormonen sozusagen überschwemmt werden, so daß eine fast gleichzeitige Teilung der Zellen der zweiten Rindenschicht eintreten muß; sie ist auch tatsächlich zu beobachten. So erweist sich der Goldregen als ein zur Prüfung unserer Annahme ungeeignetes Objekt und nur per analogiam darf man schließen, daß auch bei dieser Pflanze Nekrohormone wirksam sind.

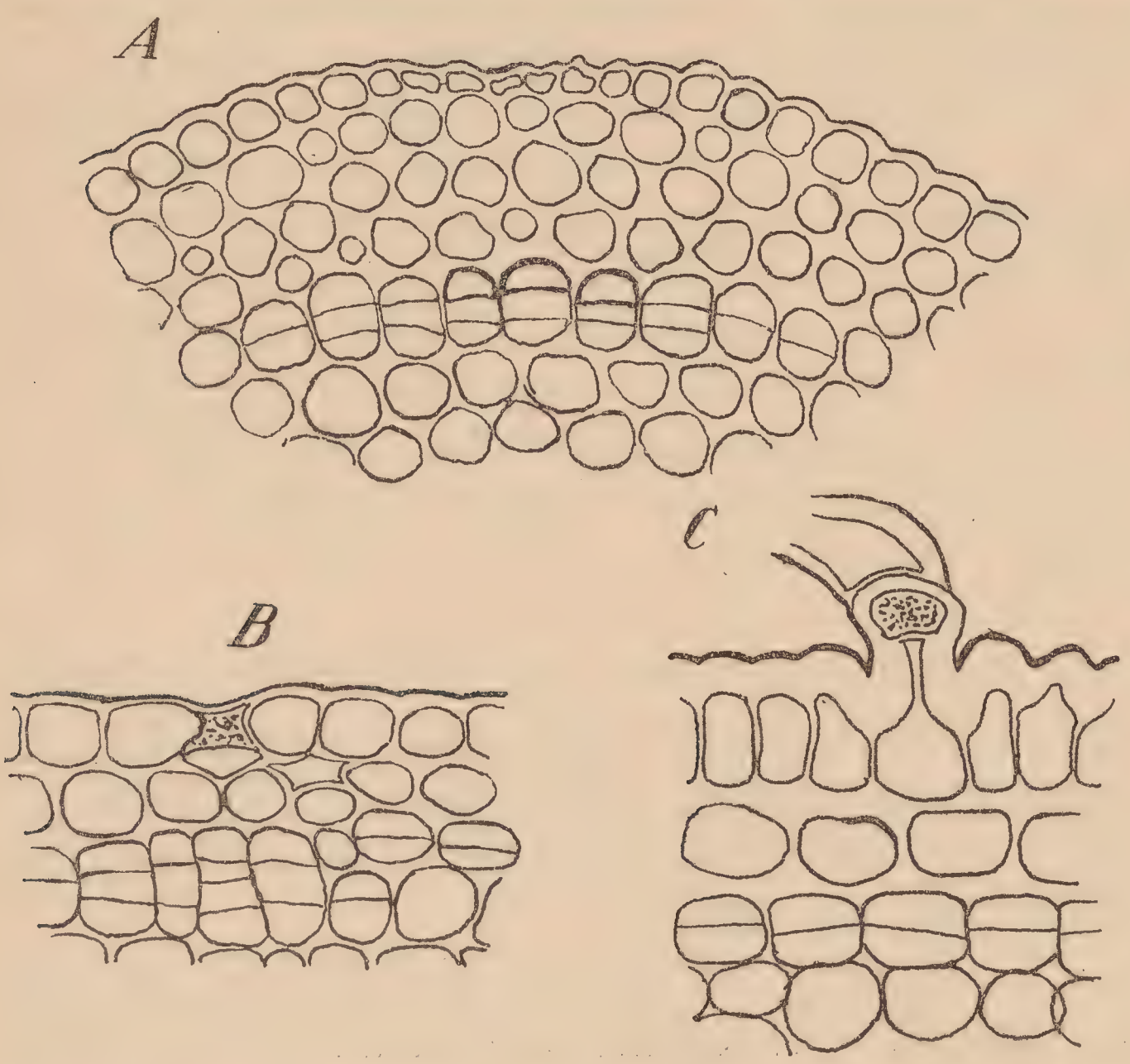


Fig. 12. Robinia pseudoacacia. A in der Kollenchymrippe haben sich unter den abgestorbenen Epidermiszellen die Zellen der vierten Lage geteilt; drei Tochterzellen besitzen bereits verkorkte Wände. *B* unter einer abgestorbenen Epidermiszelle Teilungen in der zweiten Rindenzellage. *C Laburnum vulgare* unter einem Haare Teilungen in der zweiten Rindenzellage.

B. Innere Periderme.

Ribes aureum. Das bekannteste Beispiel für die Bildung eines inneren Periderms bietet die Gattung *Ribes*. Die Abbildung aus dem Lehrbuch der

Botanik von Sachs ist den meisten Pflanzenanatomen bekannt und in manche andere Lehr- und Handbücher übergegangen. Es wird hier für *Ribes nigrum* dargestellt, wie unter dem »vertrockneten und verzerrten Parenchym der Außenrinde« (de Bary, S. 567) ein bereits mehrschichtiges Periderm mit Korkhaut, Phellogen und Phelloderm auftritt. Allgemein wird angenommen, daß zuerst das Periderm bzw. die Korkhaut entsteht und daß dann das außerhalb gelegene Rindenparenchym, von der Saftzufuhr abgeschnitten, vertrocknen muß (vgl. z. B. de Bary S. 567).

Tatsächlich verhält sich aber die Sache, wie ich zu meiner Überraschung feststellen konnte, gerade umgekehrt: zuerst stirbt das Rindenparenchym ab, und dann erst erfolgen unter demselben die ersten Teilungen, die zur Phellogenbildung führen.

Bei *Ribes aureum* tritt in den jungen Zweigen unter der Epidermis ein mehrschichtiges Kollenchym auf, dann folgen 7 bis 8 Lagen von Parenchymzellen, die nur wenige kleine blasse Chloroplasten enthalten und deren Wände schwach verdickt sind. Anfänglich schließen die Zellen ziemlich dicht zusammen und weisen zwischen sich nur enge Interzellularen auf. Bald aber weichen sie so weit auseinander, daß größere Interzellularlücken entstehen, worauf die weißliche Farbe der Zweige beruht. Gleichzeitig beginnen die Rindenzellen abzusterben, sie kollabieren, ihre Wände werden vielfach verbogen, und ihr Inhalt besteht, abgesehen vom Zellsaft, aus grobkörnigen, krümeligen Plasmaresten (Fig. 13). — Dieses absterbende und abgestorbene Rindenparenchym grenzt unmittelbar an die Stärkescheide. Ihre Zellen sind aber für die aus dem Rindenparenchym herausdiffundierenden Nekrohormone unempfindlich. Die Teilungen treten erst im angrenzenden Perizykel ein, und zwar stets erst dann, wenn das Rindenparenchym im Absterben begriffen oder schon tot ist. — Bemerkenswert ist, daß auf ein und demselben Querschnitt das Rindenparenchym nicht ringsum gleichmäßig abstirbt. An manchen Stellen ist es schon mehr kollabiert als an anderen. Darunter ist dann auch die Peridermbildung schon weiter vorgeschritten. — Die Abhängigkeit der Zellteilungen von den Nekrohormonen der Rinde ist ganz klar.

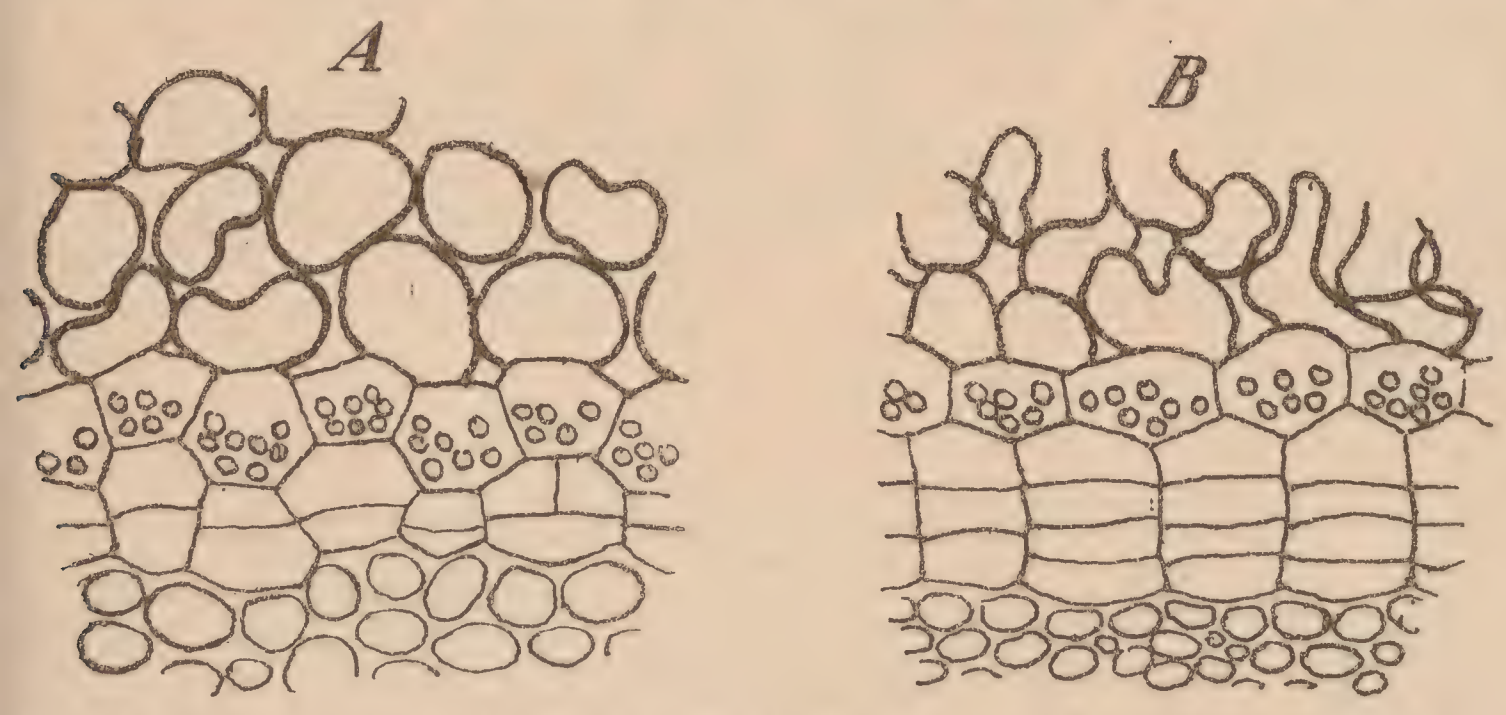


Fig. 13. Ribes aureum. A unter den im Absterben begriffenen Rindenzellen die Stärkescheide; unter dieser der Perizykel mit periklinen Teilungen. *B* desgleichen; älteres Stadium.

Lycium barbarum. Unter der Zweigepidermis tritt ein zwei- bis dreischichtiges, schwach kollenchymatisches Rindenparenchym auf, dann folgen 2 bis 3 Zellagen eines weitlumigen Rindengewebes, das man auf dem Querschnitt, da die Wände nur schwach verdickt sind, für gewöhnliches Rinden-

parenchym halten möchte, das nur durch seinen Chlorophyllmangel auffällt (Fig. 14). Die in früheren Entwicklungsstadien blaßgrünen Chloroplasten sind nämlich zu winzigen Leukoplasten reduziert. Auf Längsschnitten sieht man, daß es sich um langgestreckte Zellen mit spaltenförmigen, linksschiefen Tüpfeln handelt. Die Wände färben sich mit Phlorogluzin und Salzsäure schön rot, sind also verholzt. Schon vor der Phellogenbildung besteht der Inhalt dieser Zellen, die mit ihren schrägen oder senkrecht gestellten Querwänden eine Übergangsform zwischen Parenchymzellen und Stereiden darstellen, aus Zellsaft mit abgestorbenen Plasmaresten. Plasmolytische Versuche lehren, daß kein zusammenhängender, intakter Plasmaschlauch mehr vorhanden ist. Der

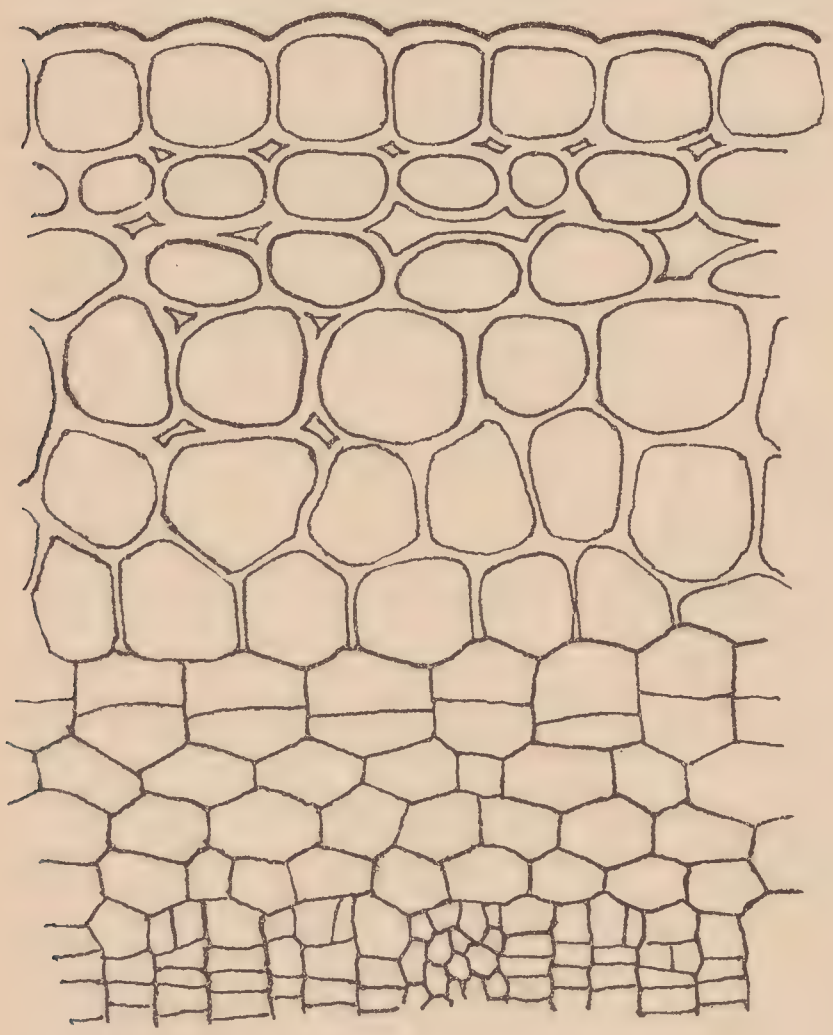


Fig. 14. Lycium barbarum.
Erste Teilungen im Perizykel.

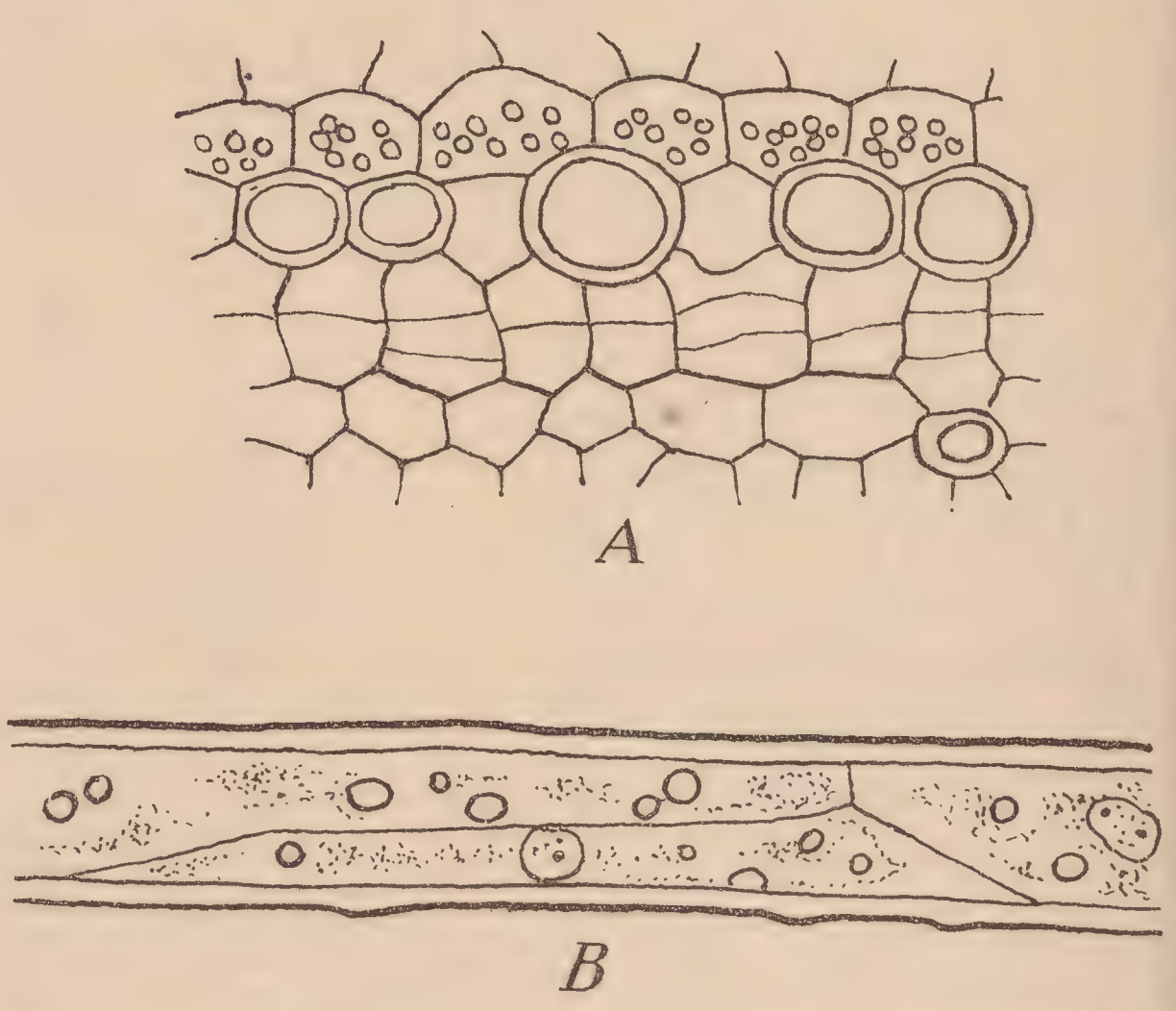


Fig. 15. Diervilla rosea. A unter der Stärkescheide eine Lage im Absterben begriffener Bastzellen; zwischen ihnen zartwandige Zellen; im angrenzenden Perizykel perikline Teilungen. *B* Teil einer gefächerten Bastzelle.

Zellkern läßt sich oft noch nachweisen; er ist sehr groß, blasig, substanzarm, sichtlich in Degeneration begriffen. An die innerste Schicht dieses Gewebemantels, deren innere Tangentialwände nicht verholzt sind, grenzt eine ziemlich großzellige, zartwandige Schicht, die wohl als Perizykel anzusprechen ist. Eine Stärkescheide war in den untersuchten, bogig herabhängenden, anscheinend ageotropischen Zweigen nicht vorhanden. Erst wenn der besprochene Gewebemantel abgestorben oder wenigstens im Absterben begriffen ist, beginnen die Zellteilungen im Perizykel.

Diervilla (Weigelia) rosea. Unter der Stärkescheide befindet sich eine einzige Lage von Bastzellen, die sehr weit sind und nur mäßig verdickte Wände besitzen (Fig. 15 *A*). Dieser mechanische Ring wird stellenweise von zartwandigen Zellen unterbrochen. Die Bastzellen enthalten in der Regel noch einen zarten Plasmabelag, zuweilen ist aber ihr Inhalt schon stark gebräunt, flockig, abgestorben. Öltröpfchen (A. Meyers »Mesekret«) sind in größerer Anzahl vorhanden. Die Kerne sind oft blasig aufgetrieben, sehr chromatinarm. In den meisten Zellen treten in unregelmäßigen Abständen sehr zarte,

quergestellte, zuweilen auch ganz schief verlaufende Wände auf (Fig. 15 *B*), eine Fächerung, die ja auch sonst in Bast- und Libriformzellen nicht selten vorkommt und von mir als eine durch Nekrohormone bewirkte Alterserscheinung gedeutet worden ist (Haberlandt I, S. 43. 44). — An diese absterbende Bastzellage grenzt innen der Perizykel, in dem dann die zur Phellogenbildung führenden Teilungen auftreten.

Philadelphus coronarius. Die jungen Zweige sind mit kräftigen Bastbündeln versehen, die, an den Perizykel grenzend, den Gefäßbündeln vorgelagert sind (Fig. 16). Die mechanischen Zellen sind Mittelbildungen zwischen echten Bastzellen und stabförmigen Sklerenchymzellen, ziemlich kurz, an den

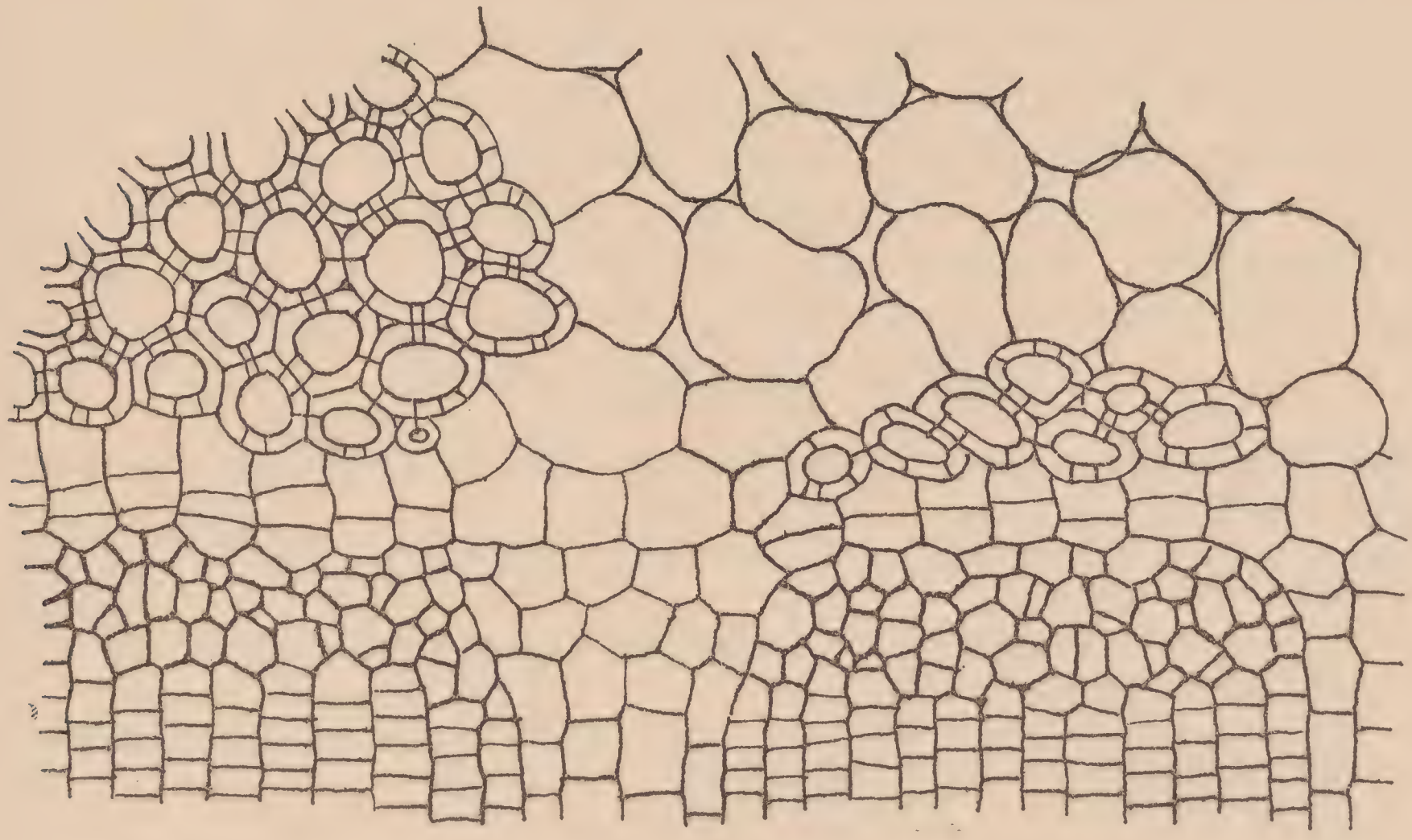


Fig. 16. *Philadelphus coronarius.* Unter den Bastbündeln Teilungen im Perizykel. Der Markstrahl noch nicht durch Teilungen überbrückt.

Enden stumpf oder kaum zugespitzt. Die dicken Wände besitzen zahlreiche linksschiefe, spaltenförmige Tüpfel. Ein Plasmabelag läßt sich durch Plasmolyse nur selten mehr nachweisen, meist ist als Zellinhalt nur noch Saft mit körnigen Flocken und Öltropfen vorhanden. Ein Zellkern ist nur noch selten aufzufinden; er ist dann langgestreckt und sehr chromatinarm. Also wieder absterbende oder schon abgestorbene Zellen. Die Zellteilungen im Perizykel erfolgen am frühesten unter den stärksten Bastbündeln, später erst unter den schwächeren und beschränken sich zunächst auf die Nachbarschaft der mechanischen Stränge. Erst zuletzt werden dann die Markstrahlen überbrückt.

Die vier Pflanzenarten, für die im vorstehenden die Entstehung des Phellogens in seiner Abhängigkeit von Nekrohormonen beschrieben wurde, sind Repräsentanten der wichtigsten Typen der Bildung innerer Periderme. Es ist anzunehmen, daß auch bei anderen hierhergehörigen Holzgewächsen sich die Sache so verhält, was weitere Untersuchungen zu bestätigen oder zu widerlegen haben.

Alles in allem genommen glaube ich wie für den Wundkork nunmehr auch für die normale Kork- bzw. Peridermbildung als Erreger der ersten Zellteilungen Teilungsstoffe, vor allem Nekrohormone, die aus absterbenden und abgestorbenen Epidermiszellen, Haaren, Rindenparenchymzellen oder mechanischen Elementen stammen, nachgewiesen oder wenigstens wahrscheinlich gemacht zu haben. In einigen Fällen sind junge Lentizellen die Entstehungsherde des Phellogens[1]. Damit ist der Widerspruch, der bisher zwischen den Ursachen der Entstehung des Wundkorkes und des normalen Korkes zu bestehen schien, beseitigt. —

Bei den nach dem Dikotylentypus in die Dicke wachsenden Wurzeln ist es der Perizykel, der als Initialschicht für das Periderm fungiert. Es ist wohl anzunehmen, daß die in der absterbenden Wurzelrinde entstehenden Nekrohormone durch die Durchlaßzellen der Endodermis in den Perizykel hineindiffundieren. Demgemäß wird man unter diesen Zellen die ersten Teilungen zu erwarten haben. Untersuchungen hierüber habe ich nicht angestellt.

Literatur.

A. de Bary, Vergleichende Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen und Farne, Leipzig 1877.

G. Haberlandt, I, Wundhormone als Erreger von Zellteilungen, Beiträge zur allgemeinen Botanik, II. Bd. 1921.

Derselbe, II, Zur Entwicklungsphysiologie des Spaltöffnungsapparates, Sitzungsberichte der Preuß. Akad. d. Wissenschaften, 1924.

C. Sanio, Vergleichende Untersuchungen über den Bau und die Entwickelung des Korkes, Jahrbücher f. wissensch. Botanik II. Bd. 1860.

[1] Daß ich die Wirkungsweise der Nekrohormone gleich der der Wundhormone als eine rein chemische auffasse, brauche ich nicht erst zu betonen. Gurwitsch's »mitogenetische Strahlen«, die ja, wie die Untersuchungen von Guttenberg und seines Schülers Rossmann überzeugend lehren, durchaus noch hypothetischer Natur und unbewiesen sind, werden wohl bei der Phellogenbildung keine Rolle spielen. Daß eine einzige absterbende Epidermiszelle, ein einziges Haar mitogenetische Strahlen von genügender Intensität aussenden soll, ist wenig plausibel.

Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante.

Von E. Landau
in Göttingen.

Zweite Abhandlung.

Erster Teil.

Zur Rittschen Verallgemeinerung des Picard-Schottkyschen Satzes auf Dirichletsche Reihen.

Hr. Ritt[1] bewies mit Hilfe der Modulfunktion folgende Verallgemeinerung meines Satzes III und des Schottkyschen Satzes IV meiner ersten Abhandlung[2]:

Die Dirichletsche Reihe

$$a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \cdots \qquad (0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \lambda_n \to \infty)$$

habe ein absolutes Konvergenzgebiet. Es sei $a_0 \neq 0$, $a_0 \neq 1$.

I. Ist $a_1 \neq 0$,[3] so gibt es eine nur von a_0, a_1 und λ_1 abhängige reelle Zahl $P = P(a_0, a_1, \lambda_1)$ mit folgender Eigenschaft: Ist die durch die Reihe definierte Funktion $F(s)$ für $\sigma \geqq P$ regulär, so nimmt $F(s)$ dort einen der Werte 0 und 1 an.

II. Ist $\vartheta > 0$, so gibt es eine nur von a_0, λ_1 und ϑ abhängige Zahl $Q = Q(a_0, \lambda_1, \vartheta)$ mit folgender Eigenschaft: Ist $F(s)$ für $\sigma \geqq R$ regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$, so ist

$$|F(s)| \leqq Q \text{ für } \sigma \geqq R + \vartheta.$$

I. ist natürlich in II. enthalten. Denn wäre $F(s)$ für

$$\sigma \geqq P(a_0, a_1, \lambda_1) = -2 + \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{|a_1|}{Q(a_0, \lambda_1, 1)}$$

regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$, so wäre für $\sigma \geqq P + 1$

$$|F(s)| \leqq Q(a_0, \lambda_1, 1),$$

[1] On Certain Points in the Theory of Dirichlet Series, American Journal of Mathematics, Bd. 50 (1928), S. 73—86; Teil I (Picard's Theorem), S. 73—77.

[2] Diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1926, S. 467—474.

[3] Hr. Ritt vergißt in seinem Wortlaut diese Voraussetzung (ohne die schon bei Potenzreihen der Satz nicht gilt).

also, da $e^{\lambda_1 s} F(s)$ auf $\sigma = P + 1$ den Mittelwert a_1 hätte,

$$|a_1| \leqq e^{\lambda_1 (P+1)} Q(a_0, \lambda_1, 1) = e^{-\lambda_1} |a_1| < |a_1|.$$

Hr. Valiron[1] hat kürzlich im Rittschen Satz I die Voraussetzung eines absoluten Konvergenzgebietes durch die schwächere eines Konvergenzgebietes ersetzt. Er ließ die Frage offen (und legte sie mir vor), ob dies auch beim Rittschen Satz II möglich sei. Ich werde diese Frage bejahen. (Aus dem verschärften Satz II folgt natürlich der verschärfte Satz I.) Wie Hr. Valiron benutze ich statt der Modulfunktion nur den Blochschen Satz VII meiner ersten Abhandlung[2]. Wie Hr. Rogosinski[3] und Hr. Valiron benutze ich den Phragmén-Lindelöfschen[4] Satz: Es sei $0 < \alpha < \pi$, $0 \leqq \varkappa < \frac{\pi}{2\alpha}$. Es sei $g(s)$ in einem Winkelraum der Öffnung 2α regulär; auf den Randstrahlen sei

$$|g(s)| \leqq M. \tag{1}$$

Es sei im Winkelraum gleichmäßig

$$g(s) = O\left(e^{|s|^{\varkappa}}\right).$$

Dann gilt (1) im ganzen Winkelraum.

Wie Hr. Valiron bei seiner Verschärfung von I spreche ich überhaupt nicht von Dirichletschen Reihen, sondern beweise alsbald den

Satz: Es sei $\lambda > 0$, $\vartheta > 0$, $F(s)$ für $\sigma \geqq R$ regulär, $\neq 0$ und $\neq 1$. Es sei $e^{\lambda s} F'(s)$ für $s \geqq R$ beschränkt; der hiernach vorhandene Grenzwert a von $F(s)$ bei reellem $s \to \infty$ sei weder 0 noch 1. Dann ist

$$|F(s)| \leqq Q(a, \lambda, \vartheta) \text{ für } \sigma \geqq R + \vartheta.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $R = 0$, $\lambda = 1$ $\left(\text{sonst betrachte man } F\left(\frac{s}{\lambda} + R\right)\right)$.

Die Funktion

$$f(s) = \log\left(\sqrt{\frac{\log F(s)}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\log F(s)}{2\pi i} - 1}\right)$$

---

[1] Sur une généralisation d'un théorème de M. Landau, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 186 (1928), S. 1815—1817.

[2] S. 468. Natürlich genügt auch der schwächere Satz VI.

[3] Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Mathematische Zeitschrift, Bd. 20 (1924), S. 280—320; S. 287. Diese Arbeit ist Hrn. Ritt unbekannt geblieben. Insbesondere die Sätze III und IV (Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas auf Dirichletsche Reihen), die Hr. Ritt zum Beweise von II aufstellt, stehen bei Hrn. Rogosinski (Satz VI, S. 290; Satz VII, S. 292—293); sogar ohne die Rittsche Voraussetzung eines *absoluten* Konvergenzgebietes.

[4] Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta Mathematica, Bd. 31 (1908), S. 381—406; S. 385. Unter den Rittschen Annahmen ist die Heranziehung dieses Satzes unnötig.

ist für $\sigma \geqq 0$ regulär und nimmt von keiner Kreisfläche mit passendem absolut konstantem Radius p alle Werte an. Für $\sigma > 0$ ist also nach dem Blochschen Satz

$$|f'(s)| \leqq \frac{p}{\mathfrak{B}\sigma}, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{B}$ die Blochsche Konstante bezeichnet. (In der Tat ist im Falle $f'(s) \neq 0$ die Funktion

$$\frac{f(s+\sigma x)-f(s)}{\sigma f'(s)} = x + \cdots$$

für $|x| \leqq 1$ regulär und nimmt dort von keiner Kreisfläche mit dem Radius $\frac{p}{\sigma|f'(s)|}$ alle Werte an.)

$f(s)$ strebt bei positivem $s \to \infty$ gegen die nur von a abhängige Zahl

$$b = \log\left(\sqrt{\frac{\log a}{2\pi i}} - \sqrt{\frac{\log a}{2\pi i} - 1}\right).$$

Bei jedem festen t ist also

$$\lim_{\sigma = \infty} f(\sigma + ti) = b;$$

denn nach (2) ist für $\sigma > 0$

$$|f(\sigma+ti)-f(\sigma)| \leqq \frac{p|t|}{\mathfrak{B}\sigma}.$$

Ferner ist für $s \geqq 0$

$$e^s f'(s) = -\frac{e^s F'(s)}{4\pi i F(s)\sqrt{\frac{\log F(s)}{2\pi i}}\sqrt{\frac{\log F(s)}{2\pi i} - 1}}$$

beschränkt, weil der Zähler beschränkt ist und der Nenner bei $s \to +\infty$ gegen $4\pi i a \sqrt{\frac{\log a}{2\pi i}}\sqrt{\frac{\log a}{2\pi i} - 1} \neq 0$ strebt.

Nach (2) ist

$$|e^s f'(s)| \leqq \frac{p e^{\vartheta}}{\mathfrak{B}\vartheta} \text{ für } \sigma = \vartheta,$$

$$|e^s f'(s)| \leqq \frac{p e^{|s|}}{\mathfrak{B}\vartheta} \text{ für } \sigma \geqq \vartheta.$$

Der Phragmén-Lindelöfsche Satz gibt also zunächst mit $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\varkappa = 1$, daß $e^s f'(s)$ in jeder der beiden Viertelebenen $\sigma \geqq \vartheta$, $t \geqq 0$ und $\sigma \geqq \vartheta$, $t \leqq 0$ beschränkt ist; alsdann mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\varkappa = 0$, daß

$$| e^s f'(s) | \leqq \frac{p e^{\vartheta}}{\mathfrak{B}\vartheta} \text{ für } \sigma \geqq \vartheta$$

ist. Für $\sigma \geqq \vartheta$ ist also

$$| f(s) - b | = | \int_0^{\infty} f'(s+u)\, du | \leqq \frac{p}{\mathfrak{B}\vartheta} \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+u-\vartheta)}\, du \leqq \frac{p}{\mathfrak{B}\vartheta},$$

$$| f(s) | \leqq | b | + \frac{p}{\mathfrak{B}\vartheta} = Q_1(a, \vartheta),$$

$$| F(s) | = \left| \frac{\frac{\pi i}{e^2}\left(e^{2 f(s)} + e^{-2 f(s)}\right)}{} \right| \leqq Q_2(a, \vartheta).$$

Zweiter Teil.

Zur Valironschen Verallgemeinerung des Blochschen Satzes auf Dirichletsche Reihen.

Satz: Die Dirichletsche Reihe

$$a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 s} + \cdots \qquad (0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \lambda_n \to \infty)$$

habe ein Konvergenzgebiet. Die durch sie dargestellte Funktion $G(s)$ sei für $\sigma > \alpha$ regulär. Es sei $a_m \neq 0$ für ein bestimmtes $m \geqq 1$. Dann liegen auf der Riemannschen Fläche von $G(s)$ $(\sigma > \alpha)$ für jedes $\rho < \frac{2}{e} | a_m | e^{-\lambda_m \alpha} \mathfrak{B}$ unendlich viele getrennte Kreisflächen des Radius ρ.

Vorbemerkungen: 1. Für $m = 1$ hat schon Hr. Valiron[1] dies mit einer kleineren Konstanten als $\frac{2}{e}$ bewiesen. Ich verdanke ihm den Hinweis darauf, daß in meinem ursprünglichen Wortlaut des Satzes für beliebiges $m \geqq 1$ eine Voraussetzung unnötig war.

2. Für $a_m = 1$, $\alpha = 0$ ist die obere Grenze der zulässigen ρ eine Weltkonstante

$$W \geqq \frac{2}{e} \mathfrak{B}.$$

3. Auch für $\lambda_n = n$ ist der Satz neu[2].

---

[1] S. 1815—1816.

[2] Übrigens läßt sich dann der Faktor $\frac{2}{e}$ durch die größere Zahl $\frac{2m}{m+1}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^{\frac{m-1}{2}}$ (sic bedeute 1 für $m = 1$) ersetzen $\left(\text{die bei } m \to \infty \text{ gegen } \frac{2}{e} \text{ strebt}\right)$. Beweis (bei Potenzreihen genügt es natürlich, *einen* schlichten Kreis mit vorgegebenem Radius aufzufinden): Ohne Beschränkung der All-

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_m = 1$, $\lambda_m = 1$, $\alpha = 0$ (sonst betrachte man $\dfrac{G\left(\dfrac{s}{\lambda_m}+\alpha\right)}{a_m e^{-\lambda_m \alpha}}$).

Entweder gibt es zu jedem $\omega > 0$ ein $s_0 = \sigma_0 + t_0 i$ mit

$$\sigma_0 \geqq 1, \quad |t_0| \geqq \omega, \quad |G'(s_0)| \geqq \frac{1}{e}.$$

Oder es gibt ein $\tau > 0$, so daß für $\sigma \geqq 1$, $|t| \geqq \tau$

$$|G'(s)| < \frac{1}{e}.$$

Im zweiten Fall ist $G'(s)$ für $\sigma \geqq 1$ beschränkt; $e^s G'(s)$ hat dann für $\sigma = 1$ den Mittelwert -1, und es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\omega > 0$ ein s_0 mit

$$\sigma_0 = 1, \quad |t_0| \geqq \omega, \quad |G'(s_0)| > \frac{1-\varepsilon}{e}.$$

In beiden Fällen gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\omega > 0$ ein s_0 mit

$$\sigma_0 \geqq 1, \quad |t_0| \geqq \omega, \quad |G'(s_0)| > \frac{1-\varepsilon}{e}.$$

Die Funktion

$$g(x) = G\left(s_0 - \frac{2x}{1+x}\right)$$

ist in $|x| < 1$ wegen $\Re\left(s_0 - \dfrac{2x}{1+x}\right) > \sigma_0 - 1 \geqq 0$ regulär, und es ist

$$|g'(0)| = 2\,|G'(s_0)| > \frac{2(1-\varepsilon)}{e}.$$

---

gemeinheit sei $a_m = 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $|x| < 1$ regulär (sonst betrachte man $\dfrac{f(e^{-\alpha}x)}{a_m e^{-m\alpha}}$). Aus

$$m r^{m-1} < \operatorname{Max}_{|x|=r} |f'(x)| \text{ für } 0 < r < 1$$

folgt die Existenz eines ξ mit

$$|\xi| = r, \quad |f'(\xi)| \geqq m r^{m-1}.$$

Da

$$f\left(\frac{x+\xi}{1+\bar{\xi}x}\right) = f(\xi) + (1-|\xi|^2) f'(\xi) x + \cdots$$

für $|x| < 1$ regulär ist, liegt also in der Bildebene ein schlichter Kreis mit jedem Radius $\varrho < (1-r^2) m r^{m-1} \mathfrak{B}$. Das beste r ist $\sqrt{\dfrac{m-1}{m+1}}$ und liefert jedes $\varrho < \dfrac{2m}{m+1}\left(\dfrac{m-1}{m+1}\right)^{\frac{m-1}{2}} \mathfrak{B}$.

Nach dem Blochschen Satz VII meiner ersten Abhandlung ist also für $0 < \varepsilon < 1$ ein schlichter Kreis mit dem Radius $\frac{2(1-\varepsilon)}{e}\mathfrak{B}(1-\varepsilon)$ Bild eines Gebiets in $|x| \leqq 1-\varepsilon$, also in $\sigma > 0$, $|t-t_0| < \frac{2}{\varepsilon}$. Die ω lassen sich sukzessive so wählen $\left(\text{jedes } \omega = \frac{4}{\varepsilon} + \text{voriges } |t_0|\right)$, daß diese Halbstreifen getrennt liegen. Die Riemannsche Fläche enthält also für jedes $\rho < \frac{2}{e}\mathfrak{B}$ unendlich viele getrennte Kreise des Radius ρ.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen.

(Zweite Mitteilung: Allgemeines und niedere Raumformen.)

Von Paul Koebe
in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

IV. Allgemeines über Raumformen und Fundamentalgruppen, insbesondere hyperbolische Raumformen und Fundamentalgruppen. Vorkommen aller topologischen Typen. (Nr. 25—31).

V. Niedere Raumformen: Sphärische und elliptische Raumform, parabolische Raumformen, zyklische hyperbolische Raumformen; Elementarmodelle und Konformmodelle. (Nr. 32—36).

Der Gesamtplan meiner in mehrere Mitteilungen zerlegten Abhandlung über Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen macht es notwendig, die Gegenstände a fundo zu entwickeln, auch manches bekannte Elementare wieder vorzubringen, um neues Elementare von Interesse zuzufügen. Ich glaube insbesondere mit meiner im folgenden gegebenen Entwickelung der in Betracht kommenden Grundlagen dem Ideal der Klarheit und Einfachheit vollkommen zu genügen.

So ergeben sich naturgemäß schon von vornherein enge Berührungen mit Arbeiten anderer Mathematiker, insbesondere mit den bekannten einschlägigen Entwickelungen von Poincaré, Klein, Fricke. Weiterhin ergeben sich besondere Beziehungen zu Arbeiten von Hadamard und Killing, ferner zur Dissertation des Hrn. Gieseking, eines Schülers von Dehn, »Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen« (Münster 1912), zur Dissertation des Hrn. Löbell, eines Schülers von F. Schur und Hessenberg, »Die überall regulären unbegrenzten Flächen fester Krümmung« (Tübingen 1927), schließlich zu einer Arbeit von H. Hopf »Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem« (Math. Ann. Bd. 95 [1925]).

Von Poincaré und Klein stammen der Begriff unserer Fundamentalgruppen, die (impliziten) Zykelnbedingungen, betreffend die Natur der endlichvielseitigen Fundamentalpolygone, die geeignet sind, solche Gruppen zu erzeugen, die Idee nichteuklidisch geometrischer Deutung und die Verwendung dieser Deutung als Beweismittel.

Von Fricke haben wir besonders zu erwähnen, daß er zuerst, ausführlich in Fricke-Klein »Automorphe Funktionen« Bd. 1, eine vollständige Syn-

these (Elementarsynthese) der Fundamentalgruppen mit endlich-vielseitigem »Normalpolygon«[1] gab, wobei jedoch bei den hyperbolischen Fundamentalgruppen die Gruppen zweiter Art, bei denen Substitutionen zweiter Art (Gleitspiegelungen) auftreten, außer Betracht gelassen, andererseits innere Fixpunkte zugelassen werden. Indem ich diese wichtige Leistung Frickes hervorhebe, will ich nicht unerwähnt lassen, daß Fricke m. E. diesbezüglich nicht zur vollen Einfachheit der Dinge durchgedrungen ist, was damit zusammenhängen dürfte, daß Fricke seine Aufmerksamkeit mit Poincaré stets mehr auf die ζ-Ebene (Ebene des Polygonnetzes) eingestellt hält, statt, wie ich es vom Anfang an meiner Untersuchungen zur Uniformisierungstheorie getan habe, vorwiegend auf die durch die Fundamentalgruppe definierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dieser Einstellung entsprechend bildet bei Fricke den ganzen Ausgangspunkt der Untersuchungen der Begriff seines »Normalpolygons«, eines Begriffs, von dem ich meinerseits niemals Gebrauch mache, unbeschadet der Bedeutung, die diesem Begriff zweifellos an sich zukommt.

Killings Studien (s. Math. Ann. 39, 1891) erstreckten sich besonders auf gewisse durch die Analogie zum zweidimensionalen Fall zunächst sich ergebende mehrdimensionale Raumformen, die wir hier ausschließen. Das Riemann-Helmholtzsche Postulat der frei beweglichen starren Körper wird von Killing für die mehrfach zusammenhängenden Räume in der Weise eingeführt, daß man um jeden Punkt der Raumform herum ein n-dimensionales (selbstverständlich schlichtes) Kugelgebiet von einem festen Mindestradius muß legen können, eine Forderung, die für nichtgeschlossene Raumformen eine unorganische Beschränkung einführt.

Hr. Löbell, der sich, wie wir, nur mit den zweidimensionalen Raumformen beschäftigt, übernimmt diese Forderung Killings. Er kommt dann in dieser Beschränkung zu Resultaten, welche sich mit gewissen unserer Resultate der dritten Mitteilung treffen. So führt Hr. Löbell den Gedanken der Zerlegung der Raumform in Doppelsechsecke durch für geschlossene und solche offenen hyperbolischen Raumformen endlichen Zusammenhanges, deren Öffnungen in unserer Sprache sämtlich hyperbolisch sind; diese Öffnungen werden vor der Zerlegung gesondert abgetrennt. Übrigens ist auch Fricke diesem Zerlegungsgedanken nahegekommen, wie z. B. die Art und Weise von Frickes Operieren mit den Polaren und sein Kompositionsverfahren zeigen. Von Gieseking erwähnen wir, daß er auf S. 130 seiner Arbeit ein reguläres seitenbezogenes Polygon der hyperbolischen Ebene benutzt, um eine Fundamentalgruppe zweiter Art zu erzeugen zur Veranschaulichung der topologischen Fundamentalgruppe geschlossener einseitiger Raumformen eines beliebigen Geschlechts. H. Hopf ersetzt in seiner Arbeit Killings unorganischen Begriff der Raumform durch den richtigen organischen Begriff, beachtet aber nicht, daß das dabei wesentliche Unendlichkeitspostulat für offene Raumformen (Axiom der unbeschränkten Streckenabtragung) bereits von mir in Phys.

[1] Das bedeutet, daß die durch die Fundamentalgruppe definierte Fundamentalmannigfaltigkeit ein endliches inneres Geschlecht p und endliche ideale Ränderzahl q besitzt. Allerdings ist zur Begründung dieser Bemerkung die Argumentation bei Fricke (S. 262 in Aut. Funkt. Bd. 1) ungeeignet. Man beachte vielmehr unsere Bemerkungen unten S. 357.

Zeitschr. S. 1064 (1911) und Annali di Mat. Ser. 3, Bd. 21, S. 57—64 (1913) formuliert ist. (Vgl. auch den letzten Absatz der Nummer 25).

HADAMARD hat sich mit offenen Flächen negativer Krümmung im dreidimensionalen Raum beschäftigt und den Verlauf der geodätischen Linien darauf, u. a. auch die Bestimmtheit geschlossener solcher Linien durch ihren topologischen Verlauf untersucht: Preisschrift »Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques« in Journal de math. pur. et appl., 5. série, t. 4 (1898) (s. auch einige kleine Noten in den Procès-verbaux soc. sciences phys., Bordeaux [1896—98]).

Anzuführen sind schließlich noch die inzwischen erschienenen »Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie« von F. KLEIN (Sammlung »Grundlehren« Bd. 26, Verlag Springer, Berlin 1928) sowie die literarischen Hinweise der ersten Mitteilung.

Den folgenden Mitteilungen liegt von mir selbst ein mittlerweile inhaltlich weiter ausgestaltetes und umgestaltetes Manuskript zugrunde:

Urmanuskript meiner in den Acta math. Bd. 50 erschienenen Preisschrift »Allgemeine Theorie der RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten«, insbesondere der bei der endgültigen Fassung der Preisschrift zur selbständigen Ausgestaltung herausgenommene »Dritter (nichteuklidisch-geometrischer) Teil« (S. 229 bis 349 des Manuskripts). Dieses Urmanuskript ist seit 1917 im Besitze des Mathematischen Instituts Mittag-Leffler zu Djursholm (Schweden). Einzelhinweise auf dieses Manuskript lese man am Schlusse nach.

Einen ferneren Niederschlag meiner Studien stellen die folgenden Anzeigen dar:

»Zur Geometrie der automorphen Fundamentalgruppen«, Gött. Nachr. 1918, S. 54—65.

»Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung. (Voranzeige, 2. Mitteilung)«, Gött. Nachr. 1916, S. 266—269. Diese Note betrifft, vom Standpunkte der Raumformen verstanden, die Raumformen mit Singularitäten.

Wir bedienen uns unten bei den Figuren einiger besonderer Bezeichnungen und Zeichen, die wir vorweg namhaft machen: El. Mod. ≡ Elementarmodell, Konf. Mod. ≡ Konformmodell, Top. Mod. ≡ Topologisches Modell; davor das Zeichen Nat. ≡ Natürliches, Id. ≡ Ideales. Das Zeichen × in einer Figur (Verheftungskreuzchen) deutet eine Überkreuzverheftung an; das Zeichen < (Falthäkchen) deutet eine faltebildende Verheftung an. Ein halbgespitzter Pfeil ⇀ oder ⇁ deutet eine Transformation zweiter Art (Gleitspiegelung) an.

IV. Allgemeines über Raumformen und Fundamentalgruppen, insbesondere hyperbolische Raumformen und Fundamentalgruppen. Vorkommen aller topologischen Typen.

25. Es sei M eine beliebige zweidimensionale, nur von inneren Punkten gebildet zu denkende topologische Mannigfaltigkeit, zweiseitig oder einseitig, endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängend. Eine solche topologische Mannigfaltigkeit nennen wir eine **RIEMANNsche Mannigfaltigkeit**, wenn in ihr eine Winkelmessung eindeutig erklärt ist, so, daß der Begriff der lokalen kon-

formen Abbildung auf schlichte τ-Gebiete sowie die Existenz solcher lokalen konformen Abbildungen für alle Stellen der Mannigfaltigkeit feststeht. Ferner nennen wir die M eine Raumform R, wenn außer der erwähnten Winkelmessung auch eine Längenmessung in ihr, und zwar in der Form $d\sigma = Q \cdot |d\tau|$ eindeutig so erklärt ist, daß: erstens die winkel- und längengemessene M im Unendlichkleinen überall euklidischen Charakter besitzt, was zur Folge hat, daß Q eine durchaus positive Ortsfunktion sein muß, deren Wert von der Richtung des Elementes $|d\tau|$ nicht abhängt; daß zweitens hinreichend klein gewählte Umgebungen irgend zweier Punkte P_1 und P_2 der Mannigfaltigkeit kongruent, d. h. winkel- und längentreu aufeinander bezogen werden können; daß drittens bei offenen Mannigfaltigkeiten die Länge jeder grenzstrebigen Linie unendlich groß ist (Unendlichkeitspostulat).

Gehen wir von dieser Definition der Raumformen aus, die von der Ausgangsdefinition der ersten Mitteilung, wie man bemerkt, abweicht, so können wir doch den Zusammenhang mit der Definition der ersten Mitteilung sogleich herstellen. Aus der kongruenten Abbildbarkeit der Umgebung von P_1 auf die von P_2 folgt, daß das aus der quadratischen Form $d\sigma^2 = Q^2 (dt^2 + dt'^2)$ mit $\tau = t + it'$ sich errechnende Gausssche Krümmungsmaß an den Stellen P_1 und P_2 übereinstimmen muß, daß es also überhaupt in der ganzen Mannigfaltigkeit konstant sein muß. Nach den Grundlehren der Differentialgeometrie kann dann das Linienelement $d\sigma$ mit einem solchen in der ganzen Mannigfaltigkeit konstanten Faktor multipliziert und dadurch normiert werden, daß das neue Linienelement $d\sigma$ für alle Stellen der Mannigfaltigkeit unter Beschränkung auf eine kleine Umgebung derselben in einer der folgenden drei Formen:

$$d\sigma = \frac{2\,|d\zeta|}{1 + |\zeta|^2} \quad \text{(Raumformen positiver Krümmung)},$$

$$d\sigma = |d\zeta| \quad \text{(Raumformen der Krümmung null)},$$

$$d\sigma = \frac{2\,|d\zeta|}{1 - |\zeta|^2} \quad \text{(Raumformen negativer Krümmung)}$$

dargestellt werden kann. Bei der Durchführung der Beweise werden bekanntlich gewisse Differenzierbarkeitsvoraussetzungen notwendig, auf deren nähere Formulierung hier nicht weiter eingegangen wird. Übrigens ist im mittleren Falle die Anwendung eines besonderen Eichungsfaktors nicht erforderlich. Im folgenden nehmen wir stets an, wenn es sich um eine positiv oder negativ gekrümmte Form handelt, daß die Längenmessung bereits in der angegebenen Weise normiert sei, während bei den Raumformen der Krümmung null von einer besonderen Normierung des Linienelementes abgesehen wird, sofern nicht ausdrücklich anderes gesagt wird (vgl. Nr. 20 der ersten Mitteilung).

Die mit dem erstgenannten Linienelement ausgestattete ζ-Vollebene nennen wir die sphärische Grundform oder Grundform positiver Krümmung; die mit dem zweiten Linienelement ausgestattete unendliche ζ-Ebene, bei Aus-

schluß des unendlich fernen Punktes, nennen wir die parabolische Grundform oder Grundform der Krümmung null, auch ebene Grundform oder euklidische Grundform; schließlich nennen wir die mit dem dritten Linienelement ausgestattete Fläche $|\zeta| < 1$ die hyperbolische Grundform oder Grundform negativer Krümmung, auch pseudosphärische Grundform oder BOLYAI-LOBATSCHEWSKYsche Grundform. Diese Grundformen sind Raumformen im Sinne unserer Definition. Ihre elementaren Eigenschaften setzen wir hier als bekannt voraus. Wir bemerken noch, daß wir die sphärische Grundform auch durch die euklidisch gemessene Einheitskugel mit dem Nullpunkt der ζ-Ebene als Mittelpunkt ersetzen können. Wir wenden auch für diese Raumform die Bezeichnung sphärische Grundform an und bemerken dazu, daß beide erwähnten sphärischen Grundformen unmittelbar durch stereographische Projektion ineinander übergehen, indem Längen- und Winkelmessungen sich dabei genau übertragen.

Wir können nun das erwähnte differentialgeometrische Ergebnis von vorhin auch so aussprechen: Wenn eine Raumform gemäß unserer Definition vorliegt, so kann man zwischen ihr und einer der drei Grundformen eine lokale Kongruenzbeziehung (eineindeutige winkel- und längentreue Abbildung) herstellen für jede Stelle der gegebenen Raumform. Die zu benützende Grundform kann dabei von Stelle zu Stelle nicht wechseln. Die solcherweise zu betrachtenden drei Arten von Raumformen können sinngemäß auch als sphärische, ebene, pseudosphärische Raumformen oder sphärische, parabolische, hyperbolische Raumformen bezeichnet werden.

Nachdem die lokale kongruente Übertragung auf die Grundform gesichert ist, ergibt sich nunmehr weiter folgendes: Man kann nicht nur, wie wir voraussetzten, je zwei genügend klein gewählte Umgebungen von P_1 und P_2 auf irgendeine Weise kongruent aufeinander beziehen, sondern es ist möglich, diese Beziehung dadurch näher festzulegen, daß man ein gerichtetes Linienelement der ersten Umgebung einem gerichteten Linienelement der zweiten Umgebung zuordnet. Es gibt dann immer gerade noch zwei Möglichkeiten der kongruenten Beziehung, die untereinander durch eine kongruente Spiegelung (Umklappung) zusammenhängen.

Damit sind wir nun aber zur alten Definition der Raumformen, wie wir sie in der ersten Mitteilung gegeben haben, zurückgelangt. Wir können das Hauptresultat der ersten Mitteilung dahin aussprechen: Es ist stets möglich und wesentlich nur auf eine Weise, eine in M gegebene Winkelmessung in solcher Weise durch eine Längenmessung zu vervollständigen, daß die Mannigfaltigkeit zu einer Raumform im Sinne unserer neuen Definition wird. Dieses Ergebnis stellt sich als eine wesenhafte Anwendung der transzendenten Uniformisierungstheorie dar.

Das Unendlichkeitspostulat hatten wir oben in der Form eingeführt: »Jede in der Raumform gezogene grenzstrebige Linie soll unendlich lang sein.« Hieraus folgt sofort, daß »jede Gerade (geodätische Linie) der Raumform entweder geschlossen in sich zurückläuft oder nach beiden Seiten unendlich lang ist«. Wir können diese Eigenschaft der Geraden geradezu an Stelle des Unendlichkeitspostulates in

der Definition der Raumformen treten lassen. Gehen wir nämlich unter dieser neuen Annahme die folgenden Entwickelungen (Nr. 26) durch, so bemerken wir, daß wir die eindeutige unbeschränkte Fortsetzbarkeit der Abwickelungsbeziehung zweier gleichartiger Raumformen längs einer beliebigen Linie auch jetzt schließen können, da wir an Stelle dieser Linie einen geradlinigen Polygonzug approximativ treten lassen können. Einem solchen ganz in der einen Raumform enthaltenen Polygonzug muß jedenfalls im Bilde auch ein geradliniger Polygonzug entsprechen, der sich nicht verflüchtigen kann. Damit kommen wir wieder zu der Einsicht, daß jede Raumform R auf ihre Grundform abgewickelt werden kann im Sinne einer eineindeutigen Übertragung der $R^{(\infty)}$ auf die vollständige Grundform. Nachdem dies aber festgestellt ist, ergibt sich, daß überhaupt jede grenzstrebige Linie der R unendlich lang sein muß; denn in der Grundform bildet sie sich notwendig auch als eine grenzstrebige Linie ab; deren Länge ist aber offenbar unendlich.

26. Wir wollen zwei Raumformen als von gleicher Art bezeichnen, wenn sie entweder beide positiv gekrümmt sind oder beide die Krümmung null haben oder beide negativ gekrümmt sind. Alsdann bemerken wir den Satz, daß durch Zuordnung zweier Richtungselemente eine ganz bestimmte Zuordnung zwischen den zwei gleichartigen Raumformen erklärt wird, die sich längs jeder in der einen oder anderen Raumform gezogenen Linie eindeutig fortsetzt, ohne irgendwie einen singulären Charakter darzubieten. Dieser Satz, der für geschlossene Mannigfaltigkeiten besonders leicht eingesehen werden kann, ist, wenn eine der beiden in Beziehung gesetzten Raumformen offen ist oder beide offen sind, eine wesentliche Folge unseres Unendlichkeitspostulates. Danach kann nämlich in einem solchen Falle das Bild einer in der einen Mannigfaltigkeit zwischen zwei Punkten gezogenen und daher endlich langen Linie sich in der anderen nicht in der Weise verflüchtigen, daß es allmählich jeden Hauptnäherungsbereich der Mannigfaltigkeit endgültig verläßt. Weiter kann man aber auch sagen, daß das Verhalten der Bildlinien nicht von der Art sein kann, daß sie zwar den Grenzen der Raumform beliebig nahe kommt, dabei jedoch immer wieder einen gewissen Hauptnäherungsbereich aufsucht. Wäre dies nämlich der Fall, so würde notwendigerweise mindestens einer der an den genannten Hauptnäherungsbereich außen angrenzenden Elementbereiche des baumartigen topologischen Aufbaus von der Linie unendlich oft durchkreuzt werden, wobei dann bei jeder Durchkreuzung offenbar ein Mindestzuwachs an Länge eintreten würde, im Widerspruch mit der endlichen Gesamtlänge der betrachteten Bildlinie. Es bleibt also nur übrig, daß die Bildlinie sich ganz in einem gewissen Hauptnäherungsbereich befindet. Dann muß sie aber wegen ihrer endlichen Länge offenbar in einem bestimmten Punkte dieses Hauptnäherungsbereiches endigen.

Die betrachtete Transformation können wir zweckmäßig als kongruente Übertragung oder **Abwickelung** der einen Mannigfaltigkeit auf die andere bezeichnen. Diese durch Zuordnung zweier Richtungselemente und örtlich gewählter Indikatrizen bestimmte Abwickelungsbeziehung zweier gleichartiger Raumformen aufeinander bzw. einer Raumform auf sich selbst wird

im allgemeinen von beiden Seiten her gesehen unendlich-vieldeutig ausfallen, so daß dabei eine gewisse Überlagerungsform der einen eineindeutig auf eine gewisse Überlagerungsform der anderen bezogen wird, welche beiden Überlagerungsformen durch ihre relative Blätterzahl über der ursprünglichen Raumform den Vieldeutigkeitsgrad der Abbildung von beiden Seiten her genau darstellen. Ist eine Abwickelungsbeziehung unmittelbar eineindeutig, so nennen wir sie eine kongruente Transformation der einen Raumform in die andere bzw. der Raumform in sich. Zwei solche Raumformen heißen dann kongruent, und von der einzelnen Raumform sagen wir gegebenenfalls, daß sie eine Transformation in sich zulasse oder auch eine Bewegung (präziser Ganzbewegung) in sich (Internbewegung) zulasse, im Gegensatz zu den erwähnten allgemeineren Abwickelungen.

Ist die eine, R_1, der beiden gleichartigen Raumformen R_1 und R_2 einfach zusammenhängend, so folgt aus dem Umstand, daß die Abbildungsbeziehung von R_1 auf R_2 innerhalb der einfach zusammenhängenden R_1 überall hin fortgesetzt werden kann, ohne sich je zu verzweigen oder auf Grenzstellen zu stoßen, unter Anwendung des sogenannten Monodromiesatzes, daß diese Beziehung durch eine in der ganzen R_1 eindeutige Abbildungsfunktion dargestellt wird. Die R_1 kann man sich dann etwa parzelliert denken und die Parzellen auf die R_2 übertragen. Diese Parzellen erfüllen über R_2 eine einfach zusammenhängende Überlagerungsform $R_2^{(\infty)}$, die als solche durch R_2 selbst völlig bestimmt ist. Wird hierbei das Linienelement $d\sigma$ der R_1 auf die $R_2^{(\infty)}$ übertragen, so ist das übertragene Linienelement in allen relativen Blättern identisch mit dem Linienelement der R_2. Abwickelung der R_2 auf die einfach zusammenhängende R_1 bedeutet demnach Bildung der Überlagerungsform $R_2^{(\infty)}$ mit dem Linienelement von R_2 in allen Blättern und eineindeutige kongruente Übertragung der $R_2^{(\infty)}$ auf die R_1. Sind insbesondere beide gleichartigen Raumformen R_1 und R_2 einfach zusammenhängend, so ist die besprochene Abbildung eine eineindeutige Beziehung der R_1 auf die R_2, d. h.: zwei gleichartige einfach zusammenhängende Raumformen sind kongruent.

Wir lassen jetzt an Stelle der R_1 die Grundform selbst treten. Dann erkennen wir nunmehr, das jede R auf die ihr gleichartige Grundform abgewickelt werden kann und daß diese Abwickelung durch Zuordnung zweier Linienelemente und lokaler Indikatrizen gerade bestimmt ist; daß ferner diese Abwickelung nichts anderes bedeutet als eine Kongruenztransformation zwischen der $R^{(\infty)}$ und der Grundform. Ist die gegebene R selbst einfach zusammenhängend, so ist sie mit der gleichartigen Grundform kongruent. Irgend zwei verschiedene Abwickelungen einer beliebigen Raumform R auf ihre Grundform hängen nun offenbar untereinander durch eine direkte oder indirekte Bewegung der Grundform in sich zusammen.

Im allgemeinen Falle ergibt sich sofort entsprechend den Decktransformationen der $R^{(\infty)}$ eine innerhalb der Grundform definierte Bewegungsgruppe ohne Fixpunkte **(die zur R gehörende Fundamentalgruppe)**, die offenbar eigentlich diskontinuierlich ist, d. h. keine infinitesimalen Bewegungen enthält. Aus dem Vorstehenden entnehmen wir ohne weiteres.

daß die Fundamentalgruppe ihrer Provenienz entsprechend bis auf Bewegungen der Grundform in sich völlig bestimmt ist. Die Fundamentalgruppe enthält offenbar dann und nur dann indirekte Bewegungen, wenn die zugrunde gelegte Raumform einseitig ist. In diesem Falle ist die Gruppe der in der Fundamentalgruppe vorkommenden direkten Bewegungen eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2; diese Untergruppe ist die Fundamentalgruppe der zur einseitigen Raumform R gehörenden zweiseitigen Raumform $\widetilde{R}$. Fassen wir die unendlich-vielen vermöge der Substitutionen der Fundamentalgruppe äquivalenten Punkte der Grundform als einen einzigen Punkt auf, so haben wir damit eine Raumform erklärt, die mit der gegebenen Raumform R kongruent ist. Nennen wir eine so definierte Raumform eine **Fundamentalform**, so können wir nunmehr sagen, daß jede Raumform einer Fundamentalform kongruent ist, daß daher das Studium der Raumformen hinsichtlich ihrer von der besonderen Erscheinungsform unabhängigen Eigenschaften unter dem Bilde der Fundamentalformen vorgenommen werden kann.

27. Ganz allgemein bezeichnen wir jetzt als **Fundamentalgruppe** jede Bewegungsgruppe einer Grundform in sich mit folgenden Eigenschaften: 1. Keine Bewegung der Gruppe hat einen Fixpunkt innerhalb der Grundform; 2. Die Gruppe enthält keine infinitesimalen Bewegungen.

Jede Fundamentalgruppe definiert dann eine Raumform in Gestalt einer **Fundamentalform**, und zwar gehört im Sinne der Abwickelungsdefinition zu dieser Raumform als Fundamentalgruppe eben die gegebene Fundamentalgruppe selbst. Zwei durch definierende Fundamentalgruppen erklärte Fundamentalformen sind dann und nur dann kongruent, wenn die definierenden Fundamentalgruppen durch Vermittlung einer direkten oder indirekten Bewegung der Grundform ineinander übergehen. Die genannten Sätze sind leicht zu erkennen. Vor allem muß festgestellt werden, daß jede Fundamentalgruppe tatsächlich eine Raumform definiert. Diese Raumform hat man nach unserem Mannigfaltigkeitsbegriff aus Zellen ordnungsmäßig aufzubauen.

Die so entstehende Frage beantwortet sich bei den niederen Fundamentalgruppen im Zusammenhang mit der direkten Aufstellung aller möglichen solchen Fundamentalgruppen. Haben wir zunächst eine Fundamentalgruppe erster Art (ohne Umlegung) der sphärischen Grundform, so kann diese, da Fixpunkte nicht vorkommen dürfen, nur aus der identischen Transformation bestehen. Und hier ist also der Fundamentalbereich durch die Grundform selbst gegeben. Kommt aber eine Bewegung zweiter Art vor, so muß ihre Wiederholung zur identischen Transformation führen, da auf diese Weise eine direkte Bewegung entsteht, die nun keinen Fixpunkt haben darf, es sei denn, daß sie mit der Identität zusammenfällt.

Sei $P \to P'$ die durch die gedachte Bewegung zweiter Art vermittelte Punktbeziehung der Kugel und sei $P \to P''$ die diametrale Zuordnung der Kugel, so wird die Zuordnung $P' \to P''$ durch eine direkte Transformation vermittelt, die nun jedenfalls einen Fixpunkt $P'_0 = P''_0$ hat. Sei P_0 der entsprechende Punkt P, so ordnet also $P \to P'$ dem Punkte P_0 seinen Diametralpunkt zu, läßt daher den zum Kugeldurchmesser $P_0 P''_0$ senkrechten Hauptkreis fest und tauscht die beiden durch diesen Hauptkreis bestimmten Kugelhälften aus.

Daraus sieht man, daß jede euklidische Bewegung zweiter Art der Kugelfläche in sich, allgemein zu reden, durch eine Gleitspiegelung (Spiegelung verbunden mit Gleitung) dargestellt wird. Eine solche führt nur dann bei Wiederholung zur Identität, wenn entweder die Gleitung wegfällt, also die gewöhnliche Spiegelung am Hauptkreis vorliegt, oder die Gleitstrecke die Länge π hat, in welchem Falle die Gleitspiegelung mit der diametralen Zuordnung identisch ist[1].

Da nun unsere gesuchte Bewegung zweiter Art keine festen Punkte haben darf, so ergibt sich, daß es sich nur um die diametrale Zuordnung handeln kann. Mit der identischen Bewegung zusammen bildet sie die einzige existierende sphärische Fundamentalgruppe zweiter Art. Die durch diese Gruppe definierte Fundamentalform nennen wir die elliptische Fundamentalform, die hier als Repräsentant des nach KLEIN so genannten elliptischen Raumes erscheint (Gegenstück zum sphärischen Raum). Als Fundamentalbereich der elliptischen Fundamentalgruppe haben wir sofort jede Halbkugelfläche, deren begrenzender Hauptkreis durch die diametrale Zuordnung auf sich bezogen wird. In der ζ-Ebene werden wir am einfachsten die Fläche $|\zeta| \leqq 1$ als Fundamentalbereich wählen mit der Randpunktbeziehung $\zeta' = -\zeta$, die als Gruppensubstitution in der Form $\zeta' = -\frac{1}{\bar{\zeta}}$ zu schreiben ist.

Die parabolischen Fundamentalgruppen haben wir sämtlich in den Nummern 10—12 (S. 179/180) der ersten Mitteilung aufgestellt und zugehörende Fundamentalbereiche angegeben: Parallelogramm mit zwei Translationen als Bezugssubstitutionen, Parallelstreifen mit einer Translation als Bezugssubstitution oder mit einer Gleitspiegelung als Bezugssubstitution, Rechteck mit einer Translation und einer Gleitspiegelung als Bezugssubstitutionen.

Zu den niederen Fundamentalgruppen rechnen wir schließlich noch diejenigen hyperbolischen Fundamentalgruppen, die durch eine Erzeugende geliefert werden (zyklische hyperbolische Fundamentalgruppen). Diese Erzeugende ist dann entweder eine parabolische ζ-Substitution (parabolische Schiebung) oder eine hyperbolische Substitution erster Art (Gleitung) oder eine Substitution zweiter Art (Gleitspiegelung); vgl. die Figuren S. 181—183 der ersten Mitteilung.

Um zu einer beliebig vorgelegten hyperbolischen Fundamentalgruppe die durch Zusammenfassen äquivalenter Punkte zu einem »Punkte« entstehende Raumform **(Fundamentalform, Fundamentalmannigfaltigkeit)** zu gewinnen, nehmen wir irgendeine Parzellierung (Triangulation) der Grundform vor, die im Innern singularitätenfrei ist und nur der Bedingung genügen soll, daß sie durch die Bewegungen der Fundamentalgruppe

---

[1] Allgemeiner stellt jede involutorische lineare Transformation zweiter Art $\zeta' = \frac{\alpha\bar{\zeta}+\beta}{\gamma\bar{\zeta}+\delta}$ der (ζ, ζ')-Ebene eine lineare Umgestaltung der genannten beiden Spezialtransformationen dar; vgl. S. 399 in der unmittelbar folgenden dritten Mitteilung.

derart in sich übergeht, daß keine Zelle bei einer solchen Bewegung sich selbst entspricht. Eine solche erhalten wir folgendermaßen:

Wir bestimmen um den Nullpunkt o unendlichviele Kreise mit absolut gemessen unbegrenzt wachsenden Radien: es seien K_1, K_2, $K_3 \cdots$ diese Kreise. Mit S_1, S_2, $S_3, \cdots$ bezeichnen wir das System der beziehungsweise mit K_1, K_2, $K_3, \cdots$ äquivalenten Kreisflächen. Wegen des Fehlens infinitesimaler Substitutionen in der Gruppe häufen sich die wahren Mittelpunkte der Kreisbilder nur gegen den Fundamentalkreis $|\zeta| = 1$; und es ist klar, daß die von dem System S_1, S_2, $S_3, \cdots, S_n$ bedeckte Gesamtfläche F_n einen in der gewünschten Weise parzellierten Teil der Grundform darstellt. Insbesondere kann die einzelne Parzelle niemals durch eine Bewegung der Gruppe in sich übergehen, da die fortgesetzte Wiederholung die Parzellen unter allen Umständen nach dem Fundamentalkreis hin verschiebt. Lassen wir nun n unbegrenzt wachsen und denken uns gleichzeitig für jedes n die gewonnene Parzellierung von F_n in der Weise abgeändert, daß sie nur in $(F_n - F_{n-1})$ bestehen gelassen wird, innerhalb F_{n-1} jedoch so belassen wird, wie sie vorher war, so findet sich eine leicht zu einer Triangulation weiter ausgestaltungsfähige Parzellierung der Grundform in der verlangten Weise. Indem wir jedes System äquivalenter Zellen nunmehr durch eine Zelle dieses Systems ersetzen, erhalten wir ein System von endlich oder unendlich vielen Grundzellen, die durch Bezugssubstitutionen zu einer Einheit verschmolzen sind und in dieser Einheit den Charakter der durch die Fundamentalgruppe definierten Fundamentalform deutlich erkennen lassen. Diese Fundamentalform ist offenbar geschlossen oder offen, je nachdem die Anzahl der Grundzellen endlich oder unendlich groß ist.

28. Von besonderer Wichtigkeit für die Erforschung und den Aufbau der Fundamentalgruppen sind die zugehörigen **Fundamentalbereiche** beziehungsweise **Fundamentalpolygone**. Der Begriff der zu einer Fundamentalgruppe Γ gehörenden Fundamentalpolygone steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Begriff der zu einer Fundamentalgruppe gehörenden **Diskontinuitätsnetze**. Ein Diskontinuitätsnetz definieren wir als ein in der Grundform gezogenes, innerhalb der Grundform selbst keine Häufungssingularität darbietendes Liniensystem, durch welches die Grundform in der Weise in Gebiete zerlegt wird, daß je zwei dieser Gebiete durch eine und nur eine Bewegung der Fundamentalgruppe ineinander übergehen, und daß aus jedem Gebiete vermöge jeder Bewegung der Fundamentalgruppe wieder ein Gebiet des Netzes entsteht. Das einzelne Gebiet heißt dann ein Fundamentalbereich, seine Begrenzung Fundamentalpolygon der Gruppe. Sieht man von dem trivialen Falle der Einheitsgruppe ab, so kann das Diskontinuitätsnetz einer Fundamentalgruppe offenbar nur dann aus endlich vielen Gebieten bestehen, wenn es sich um eine sphärische Fundamentalgruppe, d. h. also um die Fundamentalgruppe des elliptischen Raumes handelt.

Wir stellen zweckmäßig unsere Aufmerksamkeit auf die hyperbolischen Fundamentalgruppen ein.

Man erkennt aus der Definition sofort, daß die Begrenzung eines Fundamentalbereiches in Seiten zerfällt, die wir dadurch genau definieren, daß

die einzelne von Netzecke zu Netzecke läuft, wobei wieder unter Netzecke ein solcher Punkt des Diskontinuitätsnetzes verstanden wird, in dem mindestens drei Gebietszipfel zusammenstoßen; es kann dabei jedoch sein, daß eine einzelne Seite in beiden Richtungen oder auch nur in einer verfolgt unendliche Länge hat, also auf keine Netzecke trifft, in welchem Falle sie dann in der betreffenden Richtung verfolgt innerhalb der Grundform grenzstrebig ist. Ist sie nach beiden Richtungen unendlich lang, so ist sie für die Grundform ein diese durchsetzender, sie in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegender Querschnitt (Querschnittseite), der dabei auf dem Fundamentalkreis nicht bestimmt zu endigen braucht.

Die Seiten eines Fundamentalpolygons sind nun offenbar paarweise durch Substitutionen der Fundamentalgruppe aufeinander bezogen. Es ist ferner aus der Definition fast unmittelbar zu ersehen, daß ein Fundamentalbereich immer ein einfach zusammenhängendes Gebiet innerhalb der Grundform darstellt, da ja andernfalls eine geschlossene innere Kontur auftreten müßte, die offenbar einen singularitätenfrei sich abwickelnden Nebenlagerungsprozeß weiterer kongruenter Gebiete nach innen ausschließt.

Die Eckenzipfel eines Fundamentalbereiches sind zu endlich-gliedrigen Zykeln zusammengeordnet, und zwar können die Ecken eines Zykels durch Substitutionen der Fundamentalgruppe so transformiert werden, daß sie die volle Umgebung irgendeines an dem Zykel teilnehmenden Eckpunktes ausfüllen. Die Fundamentalgruppe selbst aber wird entsprechend dem Umstand, daß man von dem gewählten Fundamentalbereich Φ aus zu den übrigen Gebieten des Diskontinuitätsnetzes immer durch nur endlich viele Gebiete hindurch vermittels Seitenüberschreitungen gelangt, aus den Randsubstitutionen des Fundamentalbereiches erzeugt. Weiter ergibt sich aus dem Umstande, daß zwei von einem Punkte P_0 des gewählten Fundamentalbereiches Φ zu einem äquivalenten Punkte P_0' führende, verschiedene Seitenüberschreitungen benützende Wege zusammen einen geschlossenen Weg liefern, der auf P_0 zusammengezogen werden kann, der Satz, daß nur die von den Zykeln herrührenden Relationen zwischen den Erzeugenden als Fundamentalrelationen für die Gruppe Γ einzuführen sind, daß also die Identität zweier formal aus den Erzeugenden gebildeten Bewegungen dadurch formalgruppentheoretisch zum Ausdruck kommt, daß die beiden formalen Ausdrücke durch endlich vielmalige Anwendung der Fundamentalrelationen auch formal ineinander übergeführt werden können.

Nach der allgemeinen Analyse des Begriffes des Fundamentalbereiches einer Fundamentalgruppe erhebt sich die Frage nach der Existenz der Fundamentalbereiche. Dazu wollen wir aus unseren vorstehenden Erörterungen noch entnehmen, daß jeder Fundamentalbereich das Abbild der in bestimmter Weise zu einer einfach zusammenhängenden Fläche aufgeschnitten zu denkenden, durch die Fundamentalgruppe definierten Raumform ist. Diese Aufschneidung hat noch der Bedingung zu genügen, daß im Inneren der Mannigfaltigkeit keine Linienhäufung vorkommt; wohl aber sind Kreuzungsstellen zulässig, von denen dann stets nur endlich viele Äste des Schnittliniensystems ausgehen.

Beschränken wir zur Fixierung der Vorstellungen, wie gesagt, unsere Betrachtungen auf die hyperbolischen Raumformen, so bemerken wir zunächst die Möglichkeit der Anknüpfung an den gewonnenen Grundzellenaufbau der durch die Fundamentalgruppe definierten Fundamentalform. Da die Grundzellen in der Idee alle verbunden sind, können wir sie durch passende Auslese bzw. Ersetzung durch äquivalente so bestimmen, daß sie einen innerhalb der Grundform unmittelbar zusammenhängenden Bereich Φ ausmachen, der nun offenbar die Eigenschaften eines Fundamentalbereiches der Gruppe hat. Der Bereich Φ ist dabei notwendig einfach zusammenhängend.

Ist die Anzahl der Grundzellen endlich, so bekommen wir einen von einer geschlossenen Kurve begrenzten Fundamentalbereich mit Randsubstitutionen. Wir können dann aber die in der Idee geschlossene Raumform auch von einem ihrer Punkte aus durch Querschnitte aufschneiden, deren Anzahl $2p$ ist, wenn es sich um eine zweiseitige Raumform, hingegen p, wenn es sich um eine einseitige Raumform handelt. Das entsprechende Fundamentalpolygon hat $4p$ bzw. $2p$ Seiten. Die Ecken desselben bilden einen einzigen Zykel der Winkelsumme 2π. Wir können die einzelnen Seiten unseres Polygons aus gradlinigen Stücken (absolut verstanden) zusammengesetzt denken, die im ζ-Bereich als Orthogonalkreisbögen erscheinen. Berechnen wir dann den gesamten Flächeninhalt durch Entnahme des pseudosphärischen Defektes, so ergibt sich derselbe sofort gleich $4(p-1)\pi$, wenn es sich um eine zweiseitige Fundamentalform handelt, hingegen gleich $2(p-2)\pi$, wenn es sich um eine einseitige Raumform handelt. Daraus folgt, weil der Flächeninhalt positiv ausfallen muß, daß für zweiseitige geschlossene hyperbolische Raumformen $p \geqq 2$ ist, für einseitige geschlossene Raumformen hingegen $p \geqq 3$.

Ist die Anzahl der Grundzellen unendlich, so wird die Begrenzung des Fundamentalbereiches Φ von endlich oder unendlich vielen getrennten Linienzügen gebildet, von denen jeder einzelne den topologischen Charakter eines die Grundform in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegenden Querschnittes darbietet. Diese Begrenzungszüge sind nun ihrerseits, allgemein zu reden, in endlich oder unendlich viele Seiten zerlegt. Die Seiten des Polygons Φ sind durch Substitutionen der Fundamentalgruppe aufeinander bezogen. Die Ecken bilden nur endlichgliedrige Zykeln, deren Anzahl ebenso wie die der Seiten endlich oder unendlich groß sein kann. Die durch den triangulierten Bereich Φ mit seiner Ränderzuordnung definierte Fundamentalmannigfaltigkeit und Fundamentalform ist jetzt sicher eine offene Mannigfaltigkeit. Diese offene Mannigfaltigkeit erscheint in gewisser Weise zu einem einfach zusammenhängenden Bereich aufgeschnitten, dessen Bild eben unser Fundamentalbereich ist. Die Aufschneidung selbst bietet innerhalb der Mannigfaltigkeit keine Singularitäten im Sinne von Linienhäufungen dar. Dagegen treten, allgemein zu reden, Stellen innerhalb der Mannigfaltigkeit auf, die als Kreuzungspunkte der Aufschneidung erscheinen. Diese entsprechen den Eckenzipfeln des Bereiches Φ. Diese Auffassung läßt erkennen, daß die betrachtete Mannigfaltigkeit endlich-vielfach oder unendlich-vielfach zusammenhängend ist, je nachdem die Anzahl der Seiten des

Fundamentalbereiches endlich oder unendlich groß ist. Die Annahme des Gegenteils würde ja bedeuten, daß man z. B. eine offene Mannigfaltigkeit endlichen Zusammenhanges (p und q endlich) durch ein Liniensystem ohne Blindendigung einfach zusammenhängend machen könnte, ohne daß im Innern eine Linienhäufung oder Häufung von Kreuzungspunkten vorkäme. Aus einem solchen Liniensystem würde man aber eine Querschnittfolge von endlich vielen Querschnitten (evtl. unter Eingehen von Rückkehrschnitten) entnehmen können, die bereits den einfachen Zusammenhang bewirkt, so daß jeder weiter auszuführende Querschnitt notwendig Zerfall herbeiführen müßte.

Ist die Seitenzahl endlich, so haben wir eine offene Mannigfaltigkeit endlichen Zusammenhanges. Diese können wir aber, wenn q die Anzahl der Öffnungen, p das Geschlecht der Mannigfaltigkeit ist, durch $2p+q-1$ bzw. $p+q-1$ (bei einseitiger Mannigfaltigkeit) getrennte Querschnitte, die also keinen Kreuzungspunkt haben, einfach zusammenhängend machen. Daraus folgt, daß wir den Fundamentalbereich jetzt auch so wählen können, daß er von $4p+2q-2$ bzw. $2p+2q-2$ getrennten Querschnitten der Grundform begrenzt wird, deren jeder als Ganzes eben eine Seite liefert. Wir gewinnen so einen Fundamentalbereich ohne Eckenzykeln, und die Gruppe erscheint aus $2p+q-1$ bzw. $p+q-1$ unabhängigen Erzeugenden aufgebaut.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß dieser Satz auch bei den unendlichvielseitigen Fundamentalbereichen (Mannigfaltigkeiten unendlich hohen Zusammenhangs) sein Analogon hat. In der Tat hatten wir ja in der ersten Mitteilung (S. 173 ff.) gesehen, daß jede Mannigfaltigkeit unendlich hohen Zusammenhangs aus Elementbereichen baumartig aufgebaut werden kann, vermöge deren wir eine Ausschöpfung der Mannigfaltigkeit durch Hauptnäherungsbereiche M_n bewirkten. Wir behaupten, daß wir eine Aufschneidung der Mannigfaltigkeit durch lauter, nunmehr natürlich in unendlich großer Zahl vorhandene getrennte Querschnitte zu einem einfach zusammenhängenden Bereiche bewirken können. Das Verfahren ist folgendes:

Nehmen wir an, wir hätten bereits M_n durch getrennte Querschnitte von Rand zu Rand aufgeschnitten. Dann trifft auf jeden Rand von M_n mindestens einer dieser Querschnitte auf. Die beim Übergang von M_n zu M_{n+1} hinzukommenden neuen Elementbereiche verwandeln wir für sich in ähnlicher Weise durch Querschnitte, die die Trennungslinien zwischen M_n und M_{n+1} nicht treffen, je in einen zweifach zusammenhängenden Bereich und führen sodann jeden der in M_n bereits vorhandenen Querschnitte über seine beiden Enden fort durch die anschließenden zweifach zusammenhängend gemachten Elementbereiche bis zum Auftreffen auf eine Begrenzungslinie der M_{n+1}, wobei wir ein Zusammentreffen mit den vorher gezogenen Querschnitten der zusätzlichen Elementbereiche vermeiden. Es ergibt sich so eine Aufschneidung der M_{n+1} durch getrennte Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche, und zwar eine solche, die in dem Teilbereiche M_n von M_{n+1} mit der alten Aufschneidung der M_n in der ganzen Ausdehnung identisch ist. Indem wir dieses Verfahren sukzessive anwenden, finden wir die verlangten unendlich vielen Querschnitte, die die M in eine einfach zu-

sammenhängende M_0 verwandeln. Als Bild der M_0 ergibt sich ein Fundamentalbereich Φ, der nunmehr von unendlich vielen als Einzelseiten figurierenden Querschnitten der Grundform begrenzt wird, die paarweise durch Substitutionen der Fundamentalgruppe aufeinander bezogen sind. Diese Substitutionen liefern ein **unabhängiges Erzeugendensystem** der Gruppe; und die Ausübung der Gruppe auf den Fundamentalbereich führt, entsprechend dem zur universellen Überlagerungsmannigfaltigkeit führenden relationenfreien Aufbau der $M^{(\infty)}$ aus M_0-Exemplaren, zur vollständigen Bedeckung des Innern der Grundform mit Φ-Bildern ohne jede innere Linienhäufung.

29. Wir fragen jetzt nach einem solchen vollständigen System **charakteristischer Eigenschaften eines Fundamentalbereiches** Φ, vermöge deren man, ohne die Gruppe selbst völlig zu haben, diese vielmehr ursprünglich durch den Fundamentalbereich mit seinen Randsubstitutionen definieren kann. Wir haben bereits früher in Nr. 28 einige Feststellungen über die Fundamentalbereiche gemacht. Insbesondere wissen wir, daß sie einfach zusammenhängend sein müssen, daß ihre Begrenzungslinien in Seiten zerfallen, die paarweise durch direkte oder indirekte Substitutionen aufeinander bezogen sind, daß die die Seiten trennenden Ecken endlichgliedrige Eckenzykeln bilden, deren Winkelsumme stets gleich 2π ist. Im übrigen erinnern wir an die Bemerkungen, die hinsichtlich des allgemeinen Charakters der einzelnen Begrenzungszüge gemacht worden sind. Wir wollen dabei zweckmäßig unsere Aufmerksamkeit wieder auf die hyperbolischen Fundamentalgruppen einstellen. Die Übertragung der Resultate auf die parabolischen Fundamentalgruppen bietet sich von selbst dar.

Betrachten wir zunächst einen von einem geschlossenen Polygonzug begrenzten gegebenen Bereich B, dessen Begrenzung in endlich viele Seiten zerlegt ist, deren Anzahl gerade ist und die paarweise durch Bewegungssubstitutionen aufeinander bezogen sind. Wie bemerkt, muß die Winkelsumme jedes Eckenzykels genau gleich 2π sein. Dies ist dann aber auch hinreichend[1]. Wenn dies nämlich der Fall ist, so bedeutet das, daß die Eckenzipfel eines Zykels durch Bewegungen, die der Gruppe sicher angehören und aus den Randsubstitutionen gewonnen werden, in die volle einfache Umgebung irgendeines der Eckenzipfel des Zykels verschoben werden können. Wenn wir nun den Bereich B mit dem Linienelement der Grundform ausstatten, so erkennen wir, daß wir dadurch vermöge der Ränderbeziehung tatsächlich eine in der Idee geschlossene Raumform erklärt haben, die auch in den Eckpunkten des Bereiches B keine Singularität darbietet. Die Abwicklung dieser Raumform in die Grundform muß dann nach den Entwicklungen der Nr. 28 zu einer schlichten, lückenlosen Bedeckung der Grundform führen, womit alles gezeigt ist. Der Bereich B ist mithin unter den erwähnten Bedingungen ein Fundamentalbereich Φ für die Gruppe, die formal aus den Randsubstitutionen dieses Bereiches erzeugt wird. Die Eckenzipfel liefern ein vollständiges System von Fundamentalrelationen für die Gruppe.

[1] Siehe Poincaré, Acta math. Bd. 1, S. 28ff.

Betrachten wir zweitens einen einfach zusammenhängenden Bereich B, dessen Begrenzung von lauter in endlicher oder unendlich großer Zahl vorhandenen Querschnitten der Grundformen gebildet wird, deren einzelner seinerseits in endlich oder unendlich viele Seiten zerlegt ist. Die Gesamtheit aller Seiten sei durch Bewegungen aufeinander bezogen. Die Erfüllung der Zykelbedingung ist nunmehr allein nicht mehr ausreichend. Vielmehr muß für den ränderbezogenen Bereich B, als offene Mannigfaltigkeit aufgefaßt, noch die Erfüllung des Unendlichkeitspostulates verlangt werden. Ist das aber der Fall, so liefert der Bereich B nach Ausstattung mit dem Linienelement der Grundform tatsächlich eine offene Raumform, deren Abwicklung zur vollen schlichten Bedeckung der Grundform führt. Das bedeutet, daß B einen Fundamentalbereich Φ tatsächlich darstellt, daß die Randsubstitutionen von B eine Fundamentalgruppe Γ tatsächlich erzeugen, deren Fundamentalrelationen wieder von den einzelnen Zykeln geliefert werden.

Die Unentbehrlichkeit des Unendlichkeitspostulates für den Bereich B möge an zwei instruktiven Beispielen erläutert werden, die durch die Figuren 14 und 15 mit der oberen ζ'-Halbebene als Grundform dargestellt

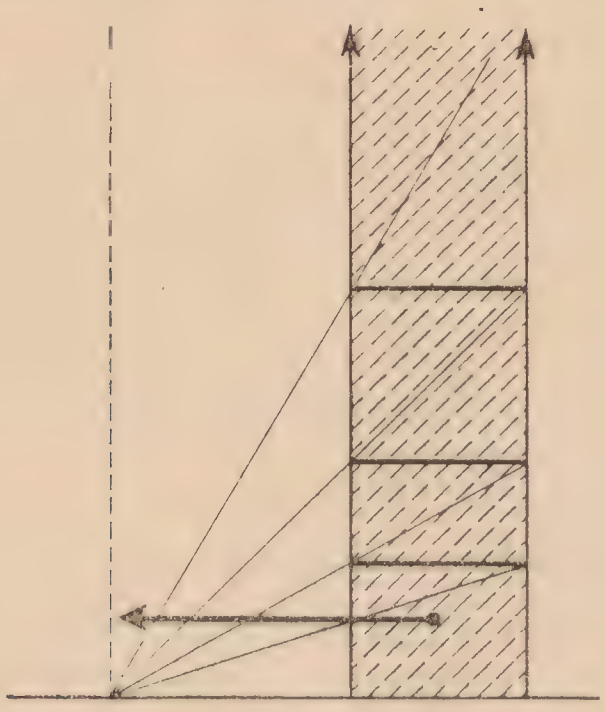


Fig. 14. Hyperbolischer Pseudobereich mit hyperbolischer Pseudoecke im Unendlichen.

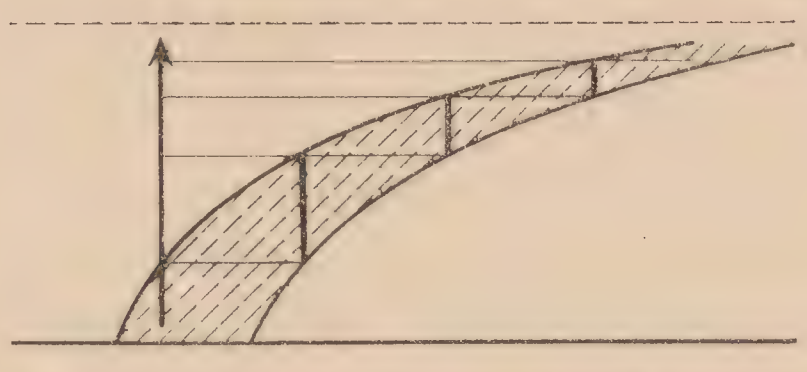


Fig. 15. Hyperbolischer Pseudobereich mit parabolischer Pseudoecke im Unendlichen.

werden. In Fig. 14 haben wir einen schraffierten Bereich B, dessen Ränderzuordnung durch eine homothetische Transformation mit dem Zentrum o (hyperbolische Substitution) vermittelt wird (hyperbolischer Pseudobereich mit hyperbolischer Pseudoecke)[1]. Übt man auf B die Substitutionen der ganzen durch die betreffende Homothetie erzeugten Gruppe aus, so kommt es offenbar nur zur Bedeckung eines Quadranten, nicht aber der vollen oberen Halbebene. In der Tat bemerkt man auch, daß die innerhalb B stark gezogene, in Stücke zerlegt erscheinende grenzstrebige Linie nur endliche absolute Länge hat, wie die angedeutete Übertragung in eine zusammenhängende Linie sofort erkennen läßt.

In Fig. 15 ist ein schraffierter Bereich B gezeichnet, der sich vertikal nur bis zur gestrichelt angedeuteten horizontalen Geraden allmählich erhebt,

[1] Vgl. F. KLEIN, »Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs« in Math. Ann. Bd. 40, S. 130—139.

ohne diese zu erreichen. Die Ränderbeziehung wird durch eine horizontale Translation bewirkt, dabei hat man sich die bezogenen Seiten beide nach rechts ins Unendliche gehend zu denken (parabolische Pseudoecke). Bei Ausübung der Gruppe wird nur ein Teil der oberen Halbebene (bis zur gestrichelten Geraden) erfüllt. In der Tat zeigt die Figur auch hier eine grenzstrebige Linie, deren wahre Länge endlich ist.

Obwohl die erwähnten Bereiche B mit ihrer Ränderzuordnung keinen Fundamentalbereich der Grundform darstellen, definieren sie uns doch zweifellos Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und nach der allgemeinen Theorie der ersten Mitteilung gehört also zu jeder dieser Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein allen Bedingungen, auch dem Unendlichkeitspostulat genügendes absolutes Linienelement. Aber dieses Linienelement ist nicht das Linienelement $\frac{|d\zeta'|}{\eta'}$ der oberen ζ'-Halbebene, $(\zeta' = \xi' + i\eta')$, sondern ein ganz anderes, welches dadurch gewonnen wird, daß man den erwähnten zur Ausfüllung kommenden Quadranten bzw. Parallelstreifen auf die Fläche der oberen Halbebene konform abbildet und das dort entnommene absolute Linienelement auf B rücküberträgt.

30. Wir haben bereits in der ersten Mitteilung einen auf der Anwendung des transzendenten Uniformisierungstheorems beruhenden Beweis des Satzes gegeben, daß man zu jeder zweiseitigen oder einseitigen topologischen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit endlicher oder unendlich hoher Zusammenhangsordnung stets **Raumformen** finden kann, die den **gegebenen topologischen Typus** besitzen.

Diesen Satz wollen wir nun auch sozusagen elementar beweisen, indem wir direkte Fundamentalformen irgendeines Typus herstellen durch Aufstellung definierender Fundamentalbereiche. Wir können dabei von niederen Fällen als erledigt absehen. (Vgl. hierzu auch Nrn. 38, 39, 43, 52, 54.)

Eine geschlossene Raumform eines bestimmten topologischen Typus ist durch die Angabe ihres Geschlechts und ihres Orientierungscharakters (zweiseitig oder einseitig) topologisch bestimmt. Wir brauchen daher nur zu jedem p und zu jedem topologischen Orientierungscharakter eine Raumform herzustellen. Das erreichen wir im Falle der Zweiseitigkeit, indem wir uns elementar ein reguläres Orthogonalkreisbogenpolygon mit den Winkeln $\frac{2\pi}{4p}$ konstruieren und seine Seiten paarweise so durch direkte, den Umlaufsinn des Polygons verändernde Bewegungen zuordnen, daß alle Ecken in einem einzigen Eckenzykel vereinigt werden. Das ist auf mannigfaltige Art und Weise möglich. Die verschiedenen Möglichkeiten entsprechen den verschiedenen möglichen Aufschneidungsschemata, durch die man von einem Punkte o aus eine geschlossene zweiseitige topologische Mannigfaltigkeit mittels $2p$ nur im Punkte o sich treffender geschlossenen Linien aufschneiden kann. Ist nach irgendeinem solchen Schema verfahren, so haben wir ein Funda-

mentalpolygon gefunden. Ebenso erkennen wir unmittelbar die Möglichkeit, im Falle der Einseitigkeit der Aufgabe durch ein reguläres $2p$-Eck mit den Winkeln $\frac{2\pi}{2p}$ zu genügen.

Eine offene Mannigfaltigkeit endlicher Zusammenhangsordnung können wir durch $2p+q-1$ bzw. $p+q-1$ getrennte, von Öffnung zu Öffnung gehende Querschnitte einfach zusammenhängend machen. Denken wir uns die aufgeschnittene Mannigfaltigkeit auf die Kreisscheibe $|\zeta| \leq 1$ übertragen, so erhalten wir auf der Peripherie gewisse Intervalle als Bilder der Querschnitte; und diese erscheinen in bestimmter Weise einander zugeordnet, wobei das Charakteristikum der Einseitigkeit darin besteht, daß mindestens zwei Intervalle vorkommen, die in der zyklischen Ordnung der Peripheriepunkte gleichsinnig zugeordnet sind. Wir können annehmen, daß die erwähnten Intervalle, deren Endpunkte ebenso wie die Restintervalle der Peripherie nicht mit in die durch die bezogene Kreisscheibe definierte Mannigfaltigkeit aufzunehmen sind, durch wirkliche, nicht punktförmige Intervalle getrennt werden. Spannen wir nunmehr über die erwähnten bezogenen Intervalle Orthogonalkreisbögen und ordnen diese irgendwie durch hyperbolische Substitutionen einander zu, die eventuell Gleitspiegelungen sind, so ist damit ein Fundamentalbereich Φ der verlangten Art gewonnen. Wir haben noch zu prüfen, ob die Reproduktionen des Bereiches zu einer vollen Bedeckung des Kreisinneren führen, oder, was dasselbe ist, ob für den mit dem absoluten Linienelement ausgestatteten und dadurch zu einer Raumform gemachten Bereich tatsächlich das Unendlichkeitspostulat erfüllt ist, andernfalls wir sagen müßten, daß die durch Φ gegebene Raumform nur ein Raumfragment ist, nämlich eine unvollständige Raumform; Φ selbst wäre entsprechend als ein Pseudofundamentalbereich der durch seine Randsubstitutionen definierten Gruppe zu bezeichnen.

Die erwähnte Prüfung können wir in der Weise geben, daß wir zeigen, daß die Reproduktion des Bereiches Φ tatsächlich zur vollen Bedeckung des Bereiches $|\zeta| < 1$ führt. Unmittelbar klar ist, daß es zu einer schlichten Nebeneinanderlagerung der Bereiche kommt. Denken wir uns nur die ersten Nachbarbereiche zu dem Bereiche Φ hinzugenommen, so bemerken wir, daß man um jeden Punkt von Φ als Mittelpunkt eine Kreisfläche von festem, d. i. für alle Punkte von Φ geltendem, von null verschiedenem wahrem Radius ρ konstruieren kann, die jedenfalls ganz in dem durch die Nachbarbereiche erweiterten Bereiche Φ enthalten ist. Diese Behauptung überträgt sich dann aber vermöge der invarianten Bedeutung der Kreisfläche sofort auf alle Punkte, die durch den vollständigen Nebenlagerungsprozeß aus Φ erhalten werden: das bedeutet, daß der in diesem Sinne vollständige Erweiterungsbereich keine Grenzpunkte innerhalb des Einheitskreises aufweisen kann, also tatsächlich mit dem ganzen Innern dieses Kreises identisch ist.

Statt der vorstehenden Argumentation können wir auch eine weiter unten (Nr. 31) gegebene Beweisführung treten lassen.

Sei jetzt eine beliebige topologische Modellfläche unendlich hoher Zusammenhangsordnung vorgelegt. Wir schneiden diese Fläche durch unendlich viele getrennte Querschnitte zu einer einfach zusammenhängenden Fläche auf und übertragen die aufgeschnittene Fläche stetig eineindeutig auf die Fläche des Einheitskreises, so daß die Querschnittufer der Modellfläche in lauter getrennte und dabei paarweise stetig aufeinander bezogene Peripherieintervalle übergehen. Hierbei können wir annehmen, daß die erwähnten Intervalle alle voneinander durch mindestens ein, im allgemeinen durch unendlich viele Intervalle getrennt werden, deren Punkte nicht der bezogenen Kreisscheibe als solcher angehören. Wir überspannen jedes Intervall wieder durch Orthogonalkreisbögen, die ihrerseits irgendwie entsprechend der Intervallpaarung durch Bewegungen der Grundformen aufeinander bezogen werden. Die Ausübung der aus den Randsubstitutionen des hergestellten Bereiches erzeugten Gruppe auf den Bereich führt offenbar in schlichter Nebenlagerung zu einem Erweiterungsbereiche, von dem sich fragt, ob wir durch geeignete Wahl der den Bereich begrenzenden Orthogonalkreisbögen erreichen können, daß er mit der ganzen Fläche des Einheitskreises identisch wird. Dazu bemerken wir, daß wir offenbar die Randintervalle, über denen die Orthogonalkreisbögen des Bereiches ausgespannt wurden, jedes noch beliebig verkleinern können, so daß es nur einen Teil des ursprünglich benützten Intervalls ausmacht. Diese Verkleinerung können wir nun so weit treiben, daß wir nach Wahl eines festen spitzen Winkels λ folgende Anordnung haben: Irgendein begrenzender Orthogonalkreisbogen b bildet mit dem ihm entsprechenden Intervall ein Kreisbogenzweieck der Winkelöffnung $\frac{\pi}{2}$, und es ist zunächst selbstverständlich, daß alle anderen begrenzenden Orthogonalkreisbögen außerhalb dieses Zweiecks liegen; darüber hinaus gilt in der neuen Anordnung dasselbe auch für ein an das erwähnte Randintervall anstoßendes Zweieck mit denselben Eckpunkten und der Winkelöffnung $\frac{\pi}{2} + \lambda$. Legt man nunmehr neben Φ alle unmittelbar benachbarten Bildbereiche unter gleichzeitiger Übertragung der in Φ gezogenen Hilfsbögen, so findet man jetzt jeden begrenzenden Orthogonalkreisbogen von Φ in ein Kreisbogenzweieck der Öffnung 2λ eingeschlossen, das durch den Bogen selbst halbiert wird. Dieses Kreisbogenzweieck enthält einschließlich seiner Begrenzung nur Punkte des durch die unmittelbaren Nachbarbereiche erweiterten Bereichs Φ und außer dem eingeschlossenen Orthogonalkreisbogen keine weiteren begrenzenden Orthogonalkreisbögen des Bereichs Φ oder des erweiterten Bereiches. Das Innere des erwähnten Zweiecks wird gerade überstrichen, wenn man um irgendeinen Punkt des winkelhalbierenden Orthogonalkreisbogens einen die Begrenzung des Zweiecks berührenden wahren Radius beschreibt und nun den Mittelpunkt den Bogen durchlaufen läßt unter Festhaltung des gefundenen, durch λ leicht auszudrückenden Radius ρ. Hieraus folgt, daß um jeden Punkt von Φ mit dem festen Radius ρ eine Kreisfläche beschrieben werden kann, die ganz innerhalb des erweiterten Bereichs liegt. Das gilt dann aber auch

für jeden Punkt des durch alle Substitutionen der Gruppe erweiterten Bereiches. Dieser kann mithin innerhalb des Fundamentalkreises keinen Grenzpunkt besitzen.

Wir können also in der Tat durch Fundamentalpolygone Φ, die von lauter getrennten Orthogonalkreisbögen als Seiten begrenzt sind, offene Raumformen von ganz beliebig vorgeschriebenem topologischen Typus gewinnen. Später werden wir sehen, daß jede offene Raumform, wohlgemerkt auch unendlich hohen Zusammenhangs, durch Bereiche Φ der betrachteten Art dargestellt werden kann.

31. Wickeln wir ein **Öffnungsstück** einer Raumform auf die zugehörende parabolische oder hyperbolische Grundform ab, ein Prozeß, der offenbar nur einen Teil der Gesamtabwickelung ausmacht, so ergibt sich, entsprechend der einfachen Umlaufung der Öffnung, in der Grundform, sofern diese die parabolische Ebene ist, stets eine parabolische Substitution (Translation), sofern jedoch die Grundform durch die hyperbolische Ebene dargestellt wird, entweder eine parabolische oder eine hyperbolische Substitution. Entsprechend nennen wir die Öffnung der Raumform parabolisch oder hyperbolisch. Dieses Unterscheidungskriterium deckt sich im allgemeinen mit demjenigen, das wir in der ersten Mitteilung bezüglich der Öffnungen von RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten als solchen aufstellten. Es gibt jedoch einen Ausnahmefall, der bei der hyperbolischen Fundamentalform mit zyklischer Fundamentalgruppe, und zwar mit parabolischer Erzeugenden eintritt. Diese Fundamentalform hat nämlich als RIEMANNsche Mannigfaltigkeit nach der alten Terminologie eine parabolische und eine hyperbolische Öffnung. Im Sinne der neuen hätte sie jedoch zwei parabolische Öffnungen. Zur Aufhebung dieser Unstimmigkeit wollen wir die eine dieser beiden Öffnungen als pseudoparabolische (statt parabolische) oder quasihyperbolische Öffnung der Raumform bezeichnen. Dieser entspricht die hyperbolische Öffnung der mit der Raumform gegebenen RIEMANNschen Mannigfaltigkeit. Man bemerkt sofort, daß jedes Öffnungsstück einer parabolischen Raumform einem Öffnungsstück einer unendlichen euklidischen Zylinderfläche kongruent ist; daß ferner ein parabolisches oder hyperbolisches Öffnungsstück einer hyperbolischen Raumform einem Öffnungsstück einer der in Fig. 26 u. 27 (S. 381) dargestellten Rotationsflächen des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes kongruent ist. (Zerlegung in unendlich schmale Meridianstreifen.)

Jede in einem parabolischen oder hyperbolischen Öffnungsstück gezogene grenzstrebige Linie ist offenbar unendlich lang. Wenn wir diese Bemerkung auf die endlich-vielfach zusammenhängenden Fundamentalformen, die wir in Nr. 30 (S. 361) definierten, anwenden, so findet sich sofort, daß diese Fundamentalbereiche, mit dem hyperbolischen Linienelement ausgestattet, entsprechend den einzelnen auftretenden hyperbolischen Grenzzykeln lauter vollständige hyperbolische Öffnungen liefern, daß wir es folglich mit vollständigen Raumformen und nicht mit Fragmenten zu tun haben, daß mithin die Ausübung der Gruppe zur vollen singularitätenfreien Ausfüllung der Grundform führt.

V. Niedere Raumformen.

(Sphärische und elliptische Raumform, parabolische Raumformen, zyklische hyperbolische Raumformen; Elementarmodelle und Konformmodelle.)

32. Als niedere Raumformen bezeichnen wir die folgenden Raumformen: die sphärische, die elliptische Raumform, alle parabolischen Raumformen, die zyklischen hyperbolischen Raumformen, deren Fundamentalgruppe nämlich aus einer Erzeugenden entsteht. Beachtet man, daß für jede geschlossene zweiseitige hyperbolische Raumform das Geschlecht p größer als 1 ist (vgl. S. 356), daß für jede geschlossene einseitige hyperbolische Raumform das Geschlecht p größer als 2 ist, daß ferner für jede offene hyperbolische Raumform, deren Fundamentalgruppe nicht aus einer Erzeugenden entsteht, stets der Aufbau der Gruppe aus mehreren durchaus unabhängigen Erzeugenden möglich ist, entsprechend der Aufschneidung der Mannigfaltigkeit durch getrennte Querschnitte, so sieht man, daß die genannten niederen Raumformen als solche rein topologisch charakterisiert werden können. Eine geschlossene zweiseitige Raumform ist eine niedere Raumform, wenn $p \leqq 1$ ist, eine geschlossene einseitige Raumform ist eine niedere Raumform, wenn $p \leqq 2$ ist, eine offene Raumform ist niedere Raumform, wenn die Ordnung ihres Zusammenhanges $\leqq 2$ ist. Als Ordnung des Zusammenhanges bezeichnen wir die um eine Einheit vermehrte Anzahl der zur vollen Aufschneidung erforderlichen Querschnitte, d. i. $2p+q$ bei zweiseitigen Mannigfaltigkeiten, $p+q$ bei einseitigen offenen Mannigfaltigkeiten. Eine niedere offene Raumform ist also entweder als solche oder nach Ausführung eines nicht zerfällenden Querschnitts einfach zusammenhängend.

Bei der **sphärischen Raumform** sind alle Geraden geschlossen; sie erscheinen als die Hauptkreise der Einheitskugel. Sie sind zweiufrige zerfällende Rückkehrschnitte. Alle diese geschlossenen Geraden sind stetig ineinander überführbar. Es gibt ∞^3 direkte und ∞^3 indirekte Bewegungen. Erstere sind die euklidischen Drehungen um Achsen durch den Kugelmittelpunkt, letztere sind Gleitspiegelungen längs den Geraden (Hauptkreisen).

Auch bei der **elliptischen Raumform** sind alle Geraden geschlossen und werden wieder durch die Hauptkreise der Kugel dargestellt; sie sind einufrige Rückkehrschnitte. Alle diese ∞^2 geschlossenen Geraden sind stetig ineinander überführbar. Als Rückkehrschnitte bezeichnen wir immer nur geschlossene doppelpunktfreie Linien in der Mannigfaltigkeit. Die Bewegungen des elliptischen Raumes werden wieder durch die obengenannten Scharen geliefert, die jedoch jetzt äquivalent sind, da jede Kugeldrehung durch Anfügung einer Diametralzuordnung (identische Zuordnung der elliptischen Raumform) in eine Gleitspiegelung verwandelt wird und umgekehrt. Insbesondere wird die identische Bewegung sowohl durch die identische Zuordnung der Kugelpunkte als auch durch die Diametralzuordnung dargestellt. Zur individuellen Festlegung einer Bewegung kann man den Drehpunkt und den Drehwinkel geben. Es gibt im allgemeinen keinen weiteren Fixpunkt, wenn man von der identischen Bewegung und dem Falle, wo der Drehwinkel 180° ist, absieht; im letzteren Falle finden sich noch unend-

lich viele weitere Fixpunkte, die eine geschlossene Gerade erfüllen. In bezug auf diese hat dann die betrachtete Drehbewegung den lokalen Charakter einer Spiegelung.

Die **parabolische Grundform** bedarf keiner besonderen Erläuterung. Die **zweiseitige offene parabolische Raumform** besitzt ein einparametriges Kontinuum gleichlänger geschlossener Geraden. Sie wird von dieser Gesamtheit geschlossener Geraden einfach bedeckt. Formt man die Raumform unter Wahrung ihrer Winkel- und Längenmessung in eine unendlich lange Zylinderfläche um (Fig. 16), so erscheinen die erwähnten geschlossenen Geraden in Gestalt der einfach geschlossenen Parallelkreise.

Die **einseitige offene parabolische Raumform** besitzt eine ausgezeichnete einufrige geschlossene Gerade, welche bei Repräsentation der Raumform durch die Fundamentalform, durch die Achse der erzeugenden Gleitspiegelung dargestellt wird (s. Fig. 17). Eine die Winkel und Längen erhaltende

Fig. 16. Unendlicher Zylinder; $(A, 0, 2)$.

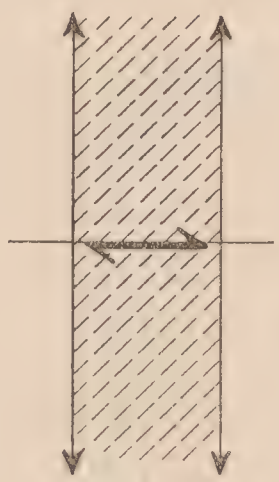


Fig. 17.

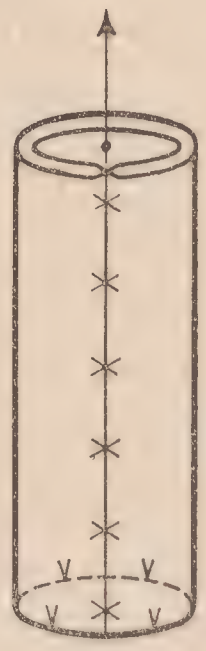


Fig. 17a. Einseitiges unendliches zylindrisches Faltband; $(B, 1, 1)$.

Darstellung dieser Raumform im euklidischen Raum erhält man ausgehend von dem uns bekannten Fundamentalbereich ihrer Fundamentalgruppe leicht in Gestalt der in Fig. 17a veranschaulichten zweiblättrigen, nach oben sich ins Unendliche erstreckenden Fläche (einseitiges unendliches, zylindrisches Faltband). Diese Fläche hat unten eine Faltlinie, das Bild der Gleitachse. Ihr Umfang ist gleich der Länge der Schiebungsstrecke der Gleitspiegelung. Die zweiufrigen geschlossenen Geraden erscheinen in Fig. 17a als Parallelkreise (Doppelkreise).

Die zulässigen Bewegungen der bisher besprochenen parabolischen Raumformen sind jetzt leicht zu überblicken. Bei der zweiseitigen offenen parabolischen Raumform müssen diejenigen Bewegungen der parabolischen Grundform ausgewählt werden, die ein System bezüglich der Fundamentalgruppe äquivalenter Punkte wieder in ein solches System verwandeln, oder was dasselbe ist, die Fundamentalgruppe in sich selbst transformieren. Demnach kommen in der ζ-Ebene allein in Betracht die Translationen, die 180°-Wendungen um irgendeinen endlichen Fixpunkt und die Gleitspiegelungen, deren Achsen parallel oder senkrecht zum erzeugenden Vektor der Funda-

mentalgruppe sind. Diesen Möglichkeiten entsprechen die kongruenten Deckbewegungen des Zylinders, nämlich die Schraubungen des Zylinders um die Zylinderachse, zu denen insbesondere die Vertikalschiebungen und die Rotationen des Zylinders gehören, die 180°-Drehungen des Zylinders um Achsen, die die Zylinderachse senkrecht treffen, schließlich die allgemein mit Translation kombinierten Spiegelungen der Zylinderfläche an Ebenen durch die Zylinderachse oder senkrecht zu derselben.

Die Bewegungen der einseitigen offenen parabolischen Raumform werden in der ζ-Ebene durch diejenigen euklidischen Bewegungen dargestellt, die die Gleitachse fest lassen, also erstens die Translationen parallel der Gleitachse, zweitens die 180°-Drehungen um Punkte der Gleitachse als Fixpunkte, die Spiegelungen an der Gleitachse oder einer zu ihr senkrechten Geraden, die allgemeinsten Gleitspiegelungen mit der Gleitachse der Fundamentalgruppe als Achse. Dabei ist aber zu bemerken, daß die erwähnten indirekten Bewegungen der Grundform für die Raumform nichts Neues darstellen können, weil jede Bewegung der Raumform als solche jetzt stets sowohl durch eine direkte, wie auch durch eine indirekte Bewegung der Grundform darstellbar ist.

Um die Bewegungen am Faltmodell aufzustellen, hat man vor allem zu bemerken, daß die der Gleitachse entsprechende Faltlinie in sich übergehen muß, wobei ihr Umlaufsinn sich entweder erhält oder wechselt. Im ersteren Falle haben wir es nur mit Rotationen um die Zylinderachse zu tun, deren Winkel man sich von 0° bis $2 \times 360°$ gehend zu denken hat. Der Winkel 360° entspricht der Blättervertauschung des Faltzylinders und kann offenbar auch als interne Spiegelung der Fläche an der Faltlinie angesehen werden. Zu den erwähnten Bewegungen treten noch die den 180°-Drehungen der ζ-Ebene entsprechenden Spiegelungen unserer Fläche an Ebenen durch die Zylinderachse. Die von einer solchen Ebene auf der Fläche ausgeschnittenen Mantelgeraden, die auf der Faltlinie je einen Umkehrpunkt zeigen, verhalten sich dabei verschiedenartig, indem nur eine der beiden Mantelgeraden Punkt für Punkt sich selbst entspricht, während auf der anderen nur der Punkt der Faltlinie festbleibt. Wir haben also einen isolierten Fixpunkt, wo die Bewegung lokal den Charakter einer internen 180°-Drehung hat, und eine ganze Gerade aus festen Punkten, wo die Bewegung lokal den Charakter einer internen Spiegelung hat. Im übrigen bemerken wir, daß die einzelne durch die Zylinderachse gelegte Spiegelebene zwei verschiedene Bewegungen definiert, je nachdem, welcher von den beiden ausgeschnittenen Punkten der Faltlinie als isolierter Fixpunkt gewählt wird.

32a. Wir betrachten weiter die **geschlossenen zweiseitigen parabolischen Raumformen**. Eine solche hat das Geschlecht 1. Ihre Fundamentalgruppe wird von zwei Translationen 2ω, $2\omega'$ erzeugt. Die Raumform wird durch ein Fundamentalparallelogramm mit entsprechend bezogenen gegenüberliegenden Seiten dargestellt. Die Aufgabe der Bestimmung aller geschlossenen Geraden in einer solchen Raumform sowie die Bestimmung aller ihrer Bewegungen ist elementar.

Eine geschlossene Gerade der Raumform muß sich in der ζ-Ebene offenbar als eine Gerade darstellen, die durch eine Translation der Fundamentalgruppe in sich übergeht. Daraus ergibt sich, daß die Übersicht über die vorhandenen geschlossenen Geraden durch die primitiven Perioden des Periodengitters $2\tilde{\omega} = 2m\omega + 2m'\omega'$ (m, m' ganzzahlig) gewonnen wird. Zu jeder solchen Periode $\pm 2\tilde{\omega}$ gehört ein einparametriges zyklisch geordnetes Kontinuum geschlossener Geraden, die eine einfache vollständige Bedeckung der ganzen Raumform liefern nach einem topologischen Gesetz, das man vor Augen hat, wenn man auf einer Torusfläche die zyklisch geordnete Gesamtheit der Meridiane oder der Parallelkreise betrachtet. Die Bewegungen anderseits müssen sich als euklidische Bewegungen darstellen, die ein vollständiges Gitter äquivalenter Punkte stets wieder in ein solches Gitter überführen. Dieses leisten zunächst alle Translationen, ferner alle 180°-Drehungen, die wir zusammen als die typischen Bewegungen, d. h. immer vorhandenen Bewegungen der zweiseitigen geschlossenen parabolischen Raumform bezeichnen. Während die ∞^2 translatorischen Bewegungen keinen Punkt fest lassen, lassen die ∞^2 Umwendungen stets genau vier verschiedene Punkte der Raumform fest, denen in der ζ-Ebene ein vollständiges Halbgitter $\zeta_0 + m\omega + m'\omega'$ entspricht.

Läßt die Raumform außer den genannten typischen Bewegungen noch eine weitere direkte Bewegung (direkte Spezialbewegung) zu, so folgt daraus, daß es sich um den harmonischen oder äquianharmonischen Fall handelt, in welchem ein Quadrat bzw. ein von zwei gleichseitigen Dreiecken gebildetes fundamentales Periodenparallelogramm vorhanden ist. Läßt die Raumform außer den typischen Bewegungen zwar keine direkte Bewegung, wohl aber eine indirekte Spezialbewegung zu, so ergibt sich, daß es sich um den Rechtecksfall oder den rhombischen Fall handelt, die ihrerseits wieder die vorhergenannten Fälle als Spezialfälle enthalten. Im allgemeinen (d. i. nicht quadratischen) Rechtecksfalle kommen zu den immer vorhandenen typischen Bewegungen als weitere Bewegungen hinzu die Spiegelungen und Gleitspiegelungen längs allen Achsen, die parallel den Rechtecksseiten sind. Im quadratischen Falle und nur in diesem treten weitere Bewegungen hinzu, nämlich die Spiegelungen und Gleitspiegelungen an den Achsen, welche parallel den Winkelhalbierenden des Quadrats sind, sowie die Drehbewegungen der Ebene um Winkel von $\pm 90°$. Im rhombischen Falle kommen zu den typischen Bewegungen die Spiegelungen und Gleitspiegelungen hinzu, deren Gleitachsen parallel den Diagonalen des rhombischen Fundamentalparallelogramms sind oder, was dasselbe ist, parallel der Basis oder der Höhe des erzeugenden gleichschenkligen Fundamentaldreiecks mit den Eckpunkten 0, 2ω, $2\omega'$. Zu diesen gesellen sich im äquianharmonischen Sonderfalle und nur in diesem weitere Bewegungen, nämlich die Spiegelungen und Gleitspiegelungen an Achsen, die parallel den weiteren Seiten und Höhen des nun gleichseitigen Fundamentaldreiecks sind, sowie die Drehungen um Winkel von $\pm 60°$, $\pm 120°$. (Vgl. Math. Ann. Bd. 67, S. 166, 167.)

Wählt man ein primitives Periodenpaar so aus, daß das Dreieck $(0, 2\omega, 2\omega')$ spitzwinklig evtl. rechtwinklig wird, zerlegt man dieses Dreieck dann,

wie Fig. 18 zeigt, in vier kongruente Dreiecke, so kann man nach H. A. Schwarz durch Aufklappen der drei um das mittlere Dreieck herum gelagerten Dreiecke eine Tetraederfläche (Fig. 19) gewinnen, die nun von vier kongruenten spitzwinkligen Dreiecken gebildet wird, deren je zwei gegenüberliegende Kanten gleich lang sind, deren je in einer Ecke zusammenstoßende Dreieckswinkel die Summe 180° ergeben. Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten liefern drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Achsen durch den Mittelpunkt der umgeschriebenen Kugel des Tetraeders. Das Tetraeder geht durch die im Raum ausgeführten 180°-Drehungen um die genannten drei Achsen (Vierergruppe) in sich über. Die gewonnene Tetraederfläche schrumpft im Rechtecksfalle (Fig. 19a) zu einer ebenen zwei-

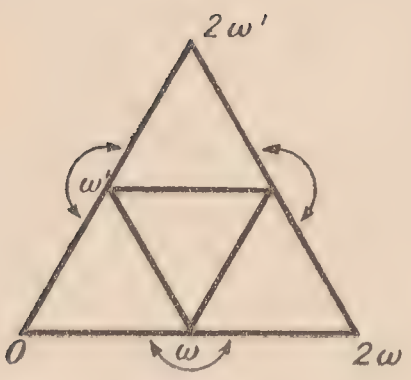


Fig. 18.

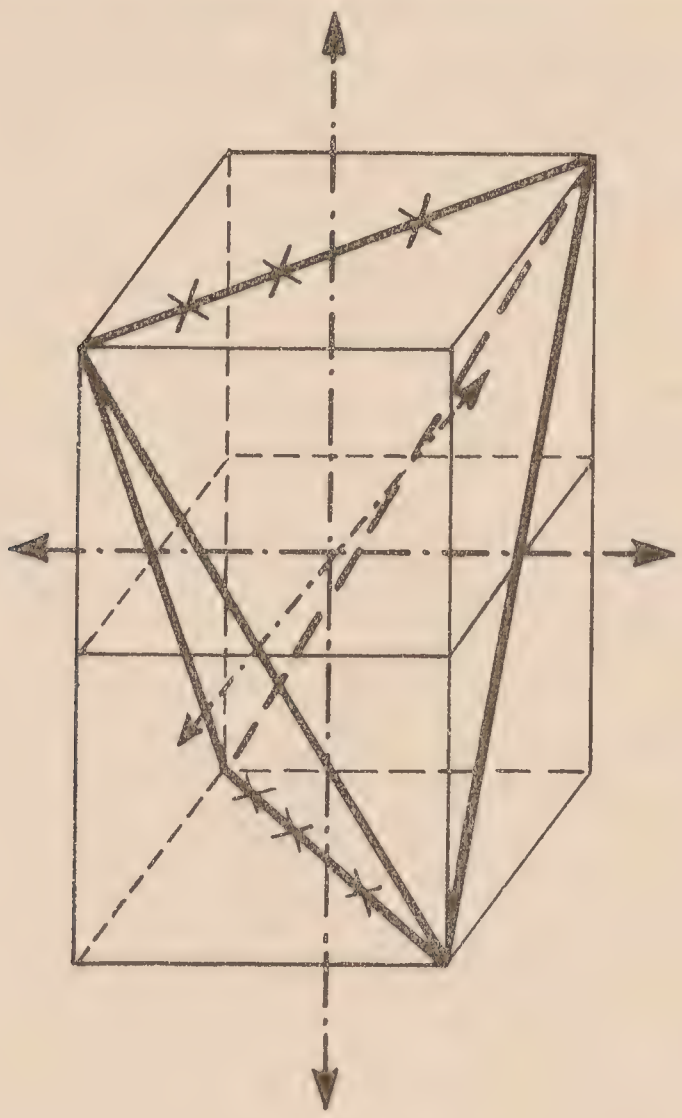


Fig. 19. (*A*, 1, 0.)
Nat. El. Mod.

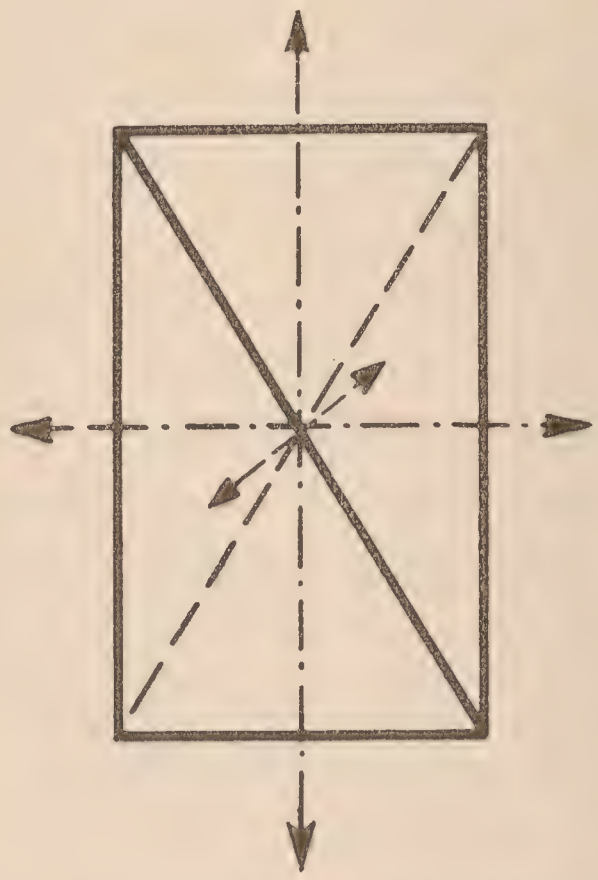


Fig. 19a. (*A*, 1, 0), Rechtecksfall.
Nat. El. Mod.

blättrig zu denkenden Rechtecksfläche zusammen. In den erläuternden Figuren 19 und 19a ist eine solche Lage angenommen, bei der die drei genannten Drehachsen dem Betrachter in gewohnter Lage erscheinen. Im rhombischen Falle nehmen wir an, daß die horizontalen Tetraederkanten der Basis des gleichschenkligen Fundamentaldreiecks entsprechen. Dann werden diese horizontalen Kanten parallel den Winkelhalbierenden der horizontalen Koordinatenebene der Figur.

Unsere Tetraederfläche (Grundtetraeder T_0 Fig. 19) liefert indes noch keine Darstellung unserer Raumform. Zu einer solchen gelangen wir aber, wenn wir über der Oberfläche dieses Tetraeders eine zweiblättrige Überlagerungsfläche nach Art einer Riemannschen Fläche bilden, deren relative Windungspunkte die vier Eckpunkte des Grundtetraeders sind. Zur Herstellung dieser Fläche denke man sich das Grundtetraeder längs zweier gegenüberliegender Kanten aufgeschnitten, die so gewonnene Fläche, in zwei koinzidierenden Exemplaren (Grundbänder) bereitgestellt, und nunmehr diese beiden Bänder

längs den Aufschneidungskanten überkreuz verheftet (nur in Fig. 19 angedeutet). Welches Paar gegenüberliegender Kanten bei der Herstellung der Fläche T bevorzugt wurde, ist gleichgültig. Stets ergibt sich dieselbe Tetraederfläche T. Diese Fläche kann entsprechend dreimal in je zwei koinzidierende Grundbänder zerlegt werden. Unsere Tetraederfläche T ist ein wirkliches euklidisches Modell für jede zweiseitige geschlossene parabolische Raumform. Es ist klar, wie Winkel- und Längenmessung auf dieser Fläche insbesondere in Kantenpunkten und Windungspunkten zu verstehen ist. Auf unserer Fläche existiert ein eindeutiger Begriff des Parallelismus zweier gerichteter Linienelemente, vermöge dessen irgendeinem gerichteten Linienelement immer nur ein paralleles an irgendeiner anderen Stelle der Fläche T entspricht. Dies lehrt sofort die Abwicklung der Fläche in die ζ-Ebene, bei welcher sich als Bilder der Grundbänder unendliche Parallelstreifen ergeben.

Es ist an unserem Modell leicht eine Übersicht über die geschlossenen Geraden und über die möglichen Bewegungen der Raumform in sich zu geben.

Was die geschlossenen Geraden betrifft, so werden entsprechend dem Zusammenhange der Tetraederfläche mit dem spitzwinkligen Fundamentaldreieck die kürzesten geschlossenen Geraden einfach dadurch gewonnen, daß man die Tetraederfläche mit den Parallelebenen zu den Koordinatenebenen schneidet. Auch die übrigen geschlossenen Geraden sind sofort ermittelt, da die Richtungen derselben den Richtungen im Periodengitter entsprechen. Jede einzelne Schar geschlossener Geraden bildet einen geschlossenen Zyklus. Je zwei derselben, die im Zyklus gleichen Abstand voneinander haben, können wir als konjugiert bezeichnen. Darunter befinden sich stets zwei, die auf dem Tetraeder ausgezeichnet erscheinen, indem jede derselben durch zwei Windungspunkte geht, die eine durch das eine Paar, die andere durch das andere Paar. Die Fläche T wird durch sie in zwei koinzidierende, über T_0 schlichte Bänder zerlegt.

Was die internen Bewegungen der Raumform betrifft, so treten zunächst gewisse Grundbewegungen am Tetraeder als ausgezeichnet hervor. Eine Grundbewegung besteht in einer Verschiebung eines Grundbandes in sich und entsprechender gegenläufiger Schiebung des koinzidierenden Grundbandes in sich. Aus diesen Grundbewegungen lassen sich alle anderen Richtung erhaltenden Bewegungen (interne Parallelbewegungen) des Tetraeders T zusammensetzen. Diese Parallelbewegungen entsprechen den Translationen der ζ-Ebene. Zur individuellen Festlegung einer Parallelbewegung wird man zweckmäßig auf T einen eventuell gebrochen erscheinenden Verschiebungsvektor geben. Läßt man diesen definierenden Vektor speziell mit einer Kante nach Lage und Länge zusammenfallen, wobei diese Kante auch durch ihre Gegenkante ersetzt werden kann und der Vektor auch durch den entgegengesetzt gerichteten, so entsteht eine Parallelbewegung, die durch eine Transformation unserer Vierergruppe geliefert wird, wenn man sie nämlich auf die einzelnen durch das Kantenpaar bestimmten Grundbänder anwendet, diese Bänder also nicht gleichzeitig austauscht. Wendet man in diesem Sinne die drei von der Identität verschiedenen Operationen der Vierergruppe auf irgendeinen Punkt von T an, so gesellen sich zu diesem Punkt

drei ganz bestimmte weitere gleichberechtigte, die mit dem Ausgangspunkt zusammen ein Quadrupel bilden. Ein solches Quadrupel wird z. B. von den vier Eckpunkten des Tetraeders gebildet.

Nächst den Parallelbewegungen interessieren die internen Wendebewegungen der Fläche T, welche den 180°-Drehungen der ζ-Ebene entsprechen. Die einzelne Wendebewegung wird auf T durch ein Quadrupel definiert, das das vollständige System der Fixpunkte der Wendebewegung darstellt. Fällt das definierende Fixpunktquadrupel mit dem Quadrupel der Eckpunkte des Tetraeders zusammen, so entsteht als Wendebewegung die Blättervertauschung der Fläche T.

Zu den weiter hinzukommenden Spezialbewegungen der Spezialtetraeder übergehend betrachten wir zunächst den Fall des rhombischen Tetraeders. Die Spezialbewegungen des allgemeinen rhombischen Tetraeders sind nichts anderes als die Gleitspiegelungen an den Rückkehrgeraden, die den Horizontalkanten parallel sind, sowie die Gleitspiegelungen an den dazu senkrechten Rückkehrgeraden. Jede solche Gleitspiegelung besitzt zwei konjugierte Rückkehrgeraden als Gleitachsen, wobei die Gleitstrecken um einen halben Umfang unterschieden sind. Soll die Spezialbewegung insbesondere involutorisch sein, so hat sie in Bezug auf die eine Achse den Charakter einer gewöhnlichen Spiegelung, d. h. sie läßt diese Gleitachse Punkt für Punkt fest, während sie in Bezug auf die andere Achse den Charakter einer eigentlichen Gleitspiegelung hat mit dem halben Umfang als Gleitstrecke.

Die Spezialbewegungen des allgemeinen rechteckförmigen Tetraeders T werden von den Spiegelungen und Gleitspiegelungen an den konturkantenparallelen Rückkehrgeraden gebildet. Dabei sind die Gleitachsen wieder konjugiert, die Gleitstrecken sind jedoch beidemal gleich lang. Als involutorische Spezialbewegungen ergeben sich nur die Spiegelungen an den konturkantenparallelen Rückkehrgeraden. Jede derselben hat zwei konjugierte Geraden als wirkliche Spiegelachsen.

Wir betrachten auch die Sonderfälle des regulären und quadratförmigen Tetraeders, in denen allein weitere Spezialbewegungen auftreten können. Das reguläre Tetraeder besitzt Kantenlinien und Höhenlinien. Greifen wir irgendeine Dreiecksfläche heraus, so haben wir drei Kanten- und drei Höhenlinien. Die übrigen Höhenlinien des Tetraeders sind dann einer von den eben gewählten »parallel«. Von den jetzt existierenden direkten Bewegungen haben wir die typischen Bewegungen (Translationen und 180°-Drehungen) bereits genannt. Dazu kommen die ($\pm 60°$- und $\pm 180°$)-Drehungen mit beliebig gewähltem Fixpunkt auf T, der bei den ($\pm 60°$)-Drehungen durchaus individuell bestimmt ist, bei den ($\pm 120°$)-Drehungen jedoch mit zwei gleichberechtigten ein Fixpunkttripel bildet. Jeden Punkt des genannten Tripels gewinnt man von einem derselben ausgehend auf T durch Abtragung von vier Drittel Höhenlänge in Höhenrichtung. Es genügt dabei nach irgendzwei entgegengesetzten Höhenrichtungen die Abtragung vorzunehmen. So gehören zu jeder Ecke des Tetraeders die Mittelpunkte der beiden gegenüberliegenden koinzidierenden Dreiecksflächen. Zu den aufgeführten direkten Bewegungen kommen noch die Gleitspiegelungen längs allen kantenparallelen oder

höhenparallelen Geraden. Jede derartige Gleitspiegelung hat zwei konjugierte Gleitgeraden und die zugehörigen Gleitstrecken sind um eine Kantenlänge beziehungsweise um die doppelte Höhe des gleichseitigen Dreiecks unterschieden.

Anmerkung: Zieht man von den drei Punkten irgendeines solchen Tripels die höhenparallelen geraden Linien, so findet sich eine Zerlegung unseres zweiblättrigen Tetraeders in sechs reguläre Dreiecke, entsprechend dem Umstande, daß die äquianharmonische Raumform $(A, 1, 0)$ auch durch ein von sechs regulären koinzidierenden ebenen Dreiecksflächen gebildetes Elementarmodell dargestellt werden kann. Dieses Elementarmodell entsteht, indem über der von zwei längs ihren Seiten miteinander verhefteten regulären Dreiecken gebildeten zweiblättrigen Grundfläche (Typus $(A, 0, 0)$) eine relativ dreiblättrige RIEMANNSche Fläche hergestellt wird, mit den Eckpunkten als dreiblättrigen Relativwindungspunkten.

Im Falle des quadratförmigen Tetraeders kommen zu den bereits für das allgemeine rechteckförmige Tetraeder aufgestellten Bewegungen noch hinzu die Gleitspiegelungen längs den diagonalenparallelen Rückkehrgeraden, wobei wieder zwei konjugierte Gleitgeraden auftreten, längs denen die Gleitstrecken um die Diagonalenlänge unterschieden sind. Weiter kommen hinzu die 90°-Drehungen um einen beliebig gewählten Punkt des Tetraeders als Fixpunkt, dem ein zweiter gleichberechtigt zugeordnet ist, aus jenem hervorgehend, indem man von ihm in Diagonalenrichtung die Diagonalenlänge selbst abträgt. Fällt insbesondere der erste Fixpunkt mit einer Quadratecke zusammen oder einer Quadratkantenmitte oder einer Quadratflächenmitte, so ergibt sich als zweiter Fixpunkt bzw. die Gegenecke, die gegenüberliegende Kantenmitte, die nicht auf direktem Wege durch die Quadratfläche gewonnen wird, schließlich der koinzidierende Quadratmittelpunkt des anderen Blattes.

33. In dem besonderen Falle der **zweiseitigen geschlossenen parabolischen Raumform**, in welchem zur Fundamentalgruppe ein **Rechteck** als Fundamentalparallelogramm gehört, gelangt man durch Anwendung eines anderen Faltungsprozesses zu einer naheliegenden weiteren Darstellung, nämlich durch eine euklidisch gemessene geschlossene Fläche, die wir als zweiseitiges zylindrisches Faltband bezeichnen (Fig. 20). Eine solche Zusammenfaltung

Fig. 20. Zweiseitiges geschlossenes zylindrisches Faltband; $(A, 1, 0)$, Rechtecksfall. Nat. El. Mod.

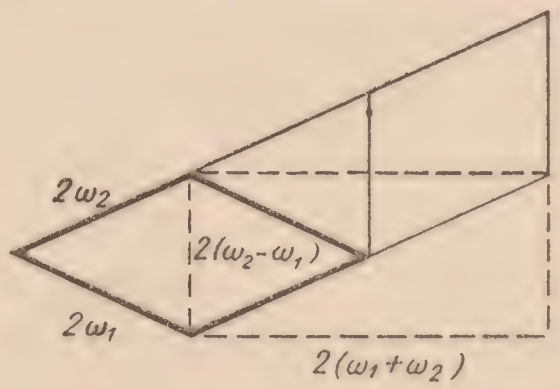


Fig. 21.

kann man auf zwei verschiedene Weisen vornehmen unter Vertauschung der Rollen der Rechteckskanten. Drückt man das Band in die Zeichnungsebene, so entsteht ein nat. El. Mod., das von 19a nur auffassungsmäßig verschieden ist.

Im **rhombischen Falle** seien $2\omega_1$ und $2\omega_2$ die das rhombische Fundamentalparallelogramm liefernden Perioden. Betrachten wir anderseits das Periodenrechteck aus $2(\omega_1 + \omega_2)$ und $2(\omega_2 - \omega_1)$ (vgl. hierzu Fig. 21, wo das

Rechteck aus dem Rhombus in zweckentsprechender Weise hergeleitet wird), so bemerken wir, daß die durch letzteres Rechteck definierte Fundamentalform R in die rhombische Fundamentalform übergeht, wenn man zwei Punkte, die auseinander durch Fortgang um die Strecke $2\omega_1$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $2\omega_2$ gewonnen werden, als konjugiert erklärt und nunmehr jedes Paar konjugierter Punkte als einen Punkt rechnet. An unserem Faltband (Fig. 20) erscheinen konjugierte Punkte als solche, die in Bezug auf den räumlichen Mittelpunkt des Faltbandes symmetrisch liegen, wobei jedoch Innen- und Außenblatt noch vertauscht zu denken sind. Die so gewonnene euklidische Darstellung der rhombischen Raumform läßt erkennen, daß diese Raumform zum Rechtecksfalle in einer analogen Beziehung steht wie der elliptische Raum zum sphärischen Raum (diametrale Punktepaarung).

Wir denken uns unser Faltband mit der geschilderten Diametralpaarung in ein rechtwinkliges räumliches (x, y, z)-Koordinatensystem mit dem räumlichen Mittelpunkt des Faltbandes als Zentrum gestellt, so daß die x-Achse und die y-Achse horizontal laufen, jene die Längsrichtung, diese die Tiefenrichtung darstellend, während die z-Achse Vertikalrichtung hat. Man kann dann die ganze rhombische Fläche auch durch die hintere Hälfte unseres Faltbandes mit einer Ränderzuordnung darstellen [Fläche (*)]. Um diese Ränderzuordnung zur Identität zu bringen, ohne die inneren Maße der Fläche zu ändern, kann man nunmehr die obere Hälfte der Fläche (*) an der (x, y)-Ebene spiegeln, wodurch ein vierblättriges Band entsteht. Dieses Band wickeln wir auf einen Zylindermantel halben Durchmessers und können dann die Verheftung entsprechender Punkte tatsächlich vornehmen.

Das entstandene vierblättrige zylindrische Faltband läßt sich auch folgendermaßen charakterisieren: Um die letzterwähnte Zylinderfläche sind zwei identische Doppelbänder (erst nach zweimaligem Umlauf in sich zurückkehrende Bänder) geschlungen. Die oberen berandenden Doppelkreise dieser Bänder werden irgendwie fortlaufend zur Verheftung gebracht, wobei an sich zwei Möglichkeiten bezüglich der Blätterwahl bestehen. Ist eine dieser Möglichkeiten gewählt, so wird längs der unteren Doppelkreise die andere Verheftungsmöglichkeit genommen; eine Angabe, die dadurch sinnvoll wird, daß obere und untere Punkte vermöge vertikaler geradliniger Verbindung einander entsprechen. Unser vierblättriges Faltband kann auch so beschrieben werden: Man gehe von dem Faltband Fig. 20 aus, nehme aber Umfang und Höhe nur

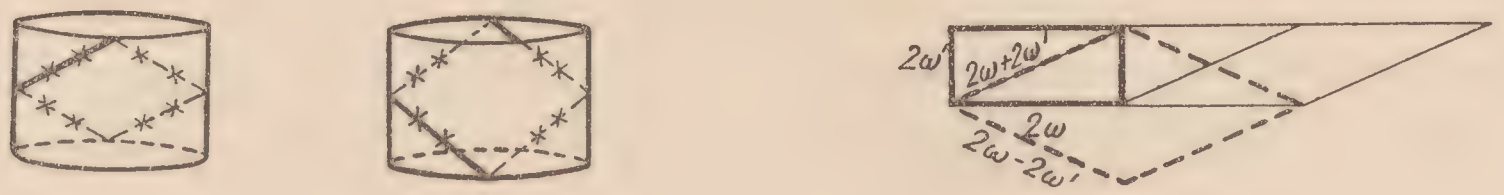


Fig. 21a. *Fig. 21b.* *Fig. 21c.*

(*A*, 1, 0), rhomb. Fall.
Nat. Konf. Mod. Schematisch.

halb so groß. Dieses Faltband wird längs eines Rückkehrsschnittes, den Fig. 21 a, b zeigt, aufgeschnitten, und sodann werden zwei koinzidierende Exemplare dieser Art längs des Rückkehrschnittes überkreuz verheftet. Es ist dabei

gleichgültig, ob man den Rückkehrschnitt gemäß Fig. 21a oder 21b gewählt hat; beidemal entsteht dieselbe Überlagerungsfläche. Die in Fig. 21a und 21b gezeichneten Rückkehrlinien schneiden sich auf der zweiblättrigen Grundfläche zweimal. Hingegen schneiden sie sich auf unserer zweiblättrigen Überlagerungsfläche dieser Grundfläche nur einmal, indem sie die Fläche in einen Rhombus verwandeln.

Die letzt vorgetragene Auffassung findet eine übersichtliche Begründung durch die Fig. 21c, wo aus dem Rechteck $(2\omega, 2\omega')$ der Rhombus $(2\omega - 2\omega', 2\omega + 2\omega')$ hergeleitet wird, indem man das Rechteck zunächst durch das Parallelogramm $(2\omega, 2\omega + 2\omega')$ ersetzt, dieses verdoppelt und das so gefundene Parallelogramm $(4\omega, 2\omega + 2\omega')$ durch den Rhombus $(2\omega - 2\omega', 2\omega + 2\omega')$ ersetzt.

Der geschilderte doppelte Sachverhalt (Fig. 21 und Fig. 21c) hat bei den zweiblättrigen RIEMANNschen Flächen vom Geschlecht 1 ein auf der Hand liegendes Gegenstück. Dem Rechtecksfalle bzw. rhombischen Falle entspricht eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche, deren vier Windungspunkte rechteckige bzw. rhombische Anordnung haben oder durch lineare Transformation in solche Anordnung gebracht werden können. Man gelangt von jedem Falle zum andern durch Anwendung einer Quadratwurzeltransformation, deren beide Windungspunkte gegenüberliegende Punkte der Ausgangsanordnung sind.

Zu weiteren bemerkenswerten Darstellungen des Rechteck- und Rhombusfalles gelangt man, wenn man statt des euklidischen den sphärischen dreidimensionalen Raum zugrunde legt. Dieser entsteht aus dem Raum der Inversionsgeometrie, wenn man in demselben diejenige Untergruppe der Inversionsgruppe auszeichnet, welche Diametralpunkte in Diametralpunkte überführt. Als Diametralpunkte des Inversionsraumes aber bezeichnen wir zwei Punkte, deren im gewöhnlichen Sinne gradlinige Verbindungsstrecke durch einen festen endlichen Punkt o geht, während ihre Abstände das Produkt 1 liefern. Diese Untergruppe prägt dem Inversionsraum eine Kinematik auf insofern, als es nämlich immer eine und nur eine Transformation dieser Gruppe gibt, welche ein infinitesimales orthogonales Richtdreibein in ein frei vorgegebenes anderes derartiges Dreibein verwandelt. Hieraus ergibt sich, daß nicht nur, wie schon bei der Inversionsgruppe, die Winkel erhalten bleiben, sondern daß weiter ein invariantes Linienelement, nämlich $d\sigma = \frac{2\,ds}{1 + r^2}$, vorhanden ist. Man findet geometrisch zu einem gegebenen euklidischen Linienelement ds das Linienelement $d\sigma$, indem man durch das Linienelement ds und o eine Ebene (Äquatorebene) legt und diese vom zugehörigen »Nordpol« oder »Südpol« der Einheitskugel aus stereographisch auf die Einheitskugel projiziert, wobei ds in ein Linienelement übergeht, dessen euklidische Maßzahl eben unser invariantes $d\sigma$ darstellt. Die zum definierten sphärischen Raum gehörenden kürzesten Linien (Geraden) finden sich sofort als die scheinbaren Kreise, die die Einheitskugel in scheinbaren und damit zugleich in wahren diametralen Punkten schneiden. Ihre Länge ist stets 2π.

Wir denken uns nun in unseren sphärischen Raum eine **Ringzyklide** so hineingestellt, wie Fig. 22 in Orthogonalprojektion zeigt. Die scheinbare und zugleich natürliche Drehachse der Zyklide denken wir uns in der Zeichnungsebene liegend. Die in der Zeichnungsebene ausgeschnittenen Meridiankreise der Zyklide haben ein Orthogonalbüschel von Kreisen (wahren Geraden), deren Vereinigungspunkt im Abstand 1 von der Achse liegt. Die Kinematik des sphärischen Raums läßt leicht erkennen, daß die Zyklide einmal durch Rotation um die erwähnte natürliche und scheinbare Achse aus dem Meridian entsteht, ebenfalls aber auch durch wahre Rotation irgendeines ihrer Parallelkreise um eine zweite Achse, die mit dem Einheitskreis der Äquatorebene der Zyklide identisch ist. Jede der genannten beiden Rotationsbewegungen kann zugleich als Gleitbewegung des Raumes längs der anderen Achse gedeutet werden.

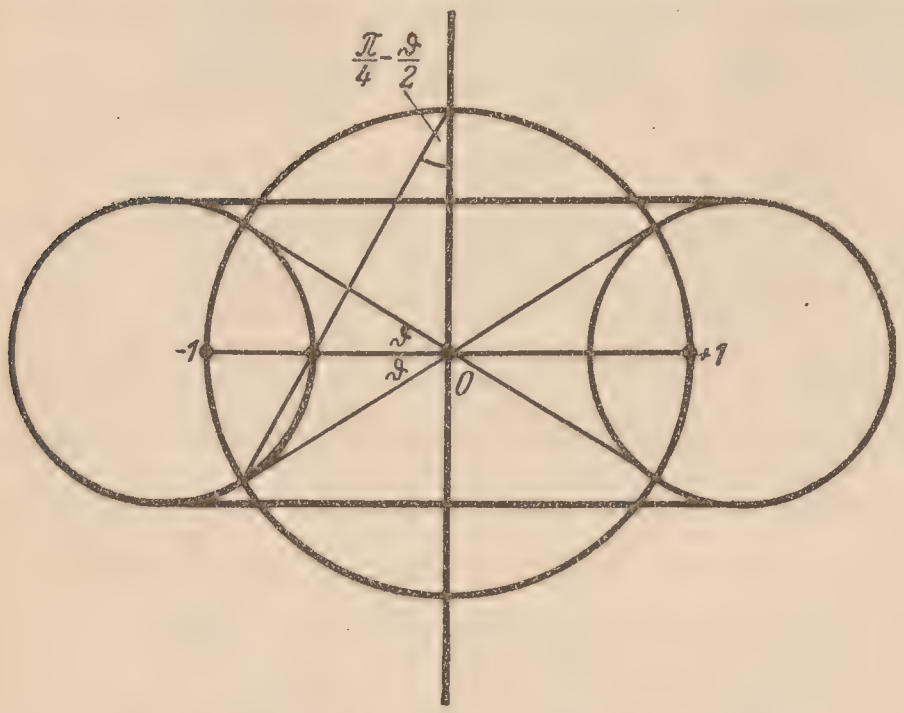


Fig. 22. $(A, 1, 0)$, Rechtecksfall. Ringzyklide im sphär. Raum. Nat. El. Mod.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß das Linienelement des sphärischen Raumes bezüglich der Zyklide als Riemannscher, d. i. nur winkelbestimmter Mannigfaltigkeit die Eigenschaften besitzt, auf Grund deren wir nach den Definitionen der Nr. 25 jetzt feststellen können, daß die mit der Winkelmessung und Längenmessung des sphärischen Raumes ausgestattete Zyklide eine Raumform in unserem Sinne ist, und zwar eine zweiseitige geschlossene Raumform vom Geschlecht 1.

Die geschilderte doppelte Entstehungsweise bei unserer Raumform läßt sofort erkennen, daß man dieselbe so in die parabolische Ebene abwickeln kann, daß den Parallelkreisen die horizontalen, den Meridiankreisen die vertikalen Geraden der ζ-Ebene entsprechen.

Denken wir uns die Raumform längs eines Parallelkreises und eines Meridiankreises aufgeschnitten, so ergibt sich in der ζ-Ebene ein Rechteck, dessen Seitenlängen aus der Figur bei Beachtung der angegebenen geometrischen Deutung des sphärischen Linienelementes leicht entnommen werden können, nämlich gleich $2\pi \cos \vartheta$ vom Parallelkreise herrührend, $2\pi \sin \vartheta$ vom Meridiankreise herrührend. Wir bemerken jetzt weiter, daß die geraden Linien (geodätischen Linien) unserer Raumform, da sie in der ζ-Ebene offenbar durch die Geraden dargestellt werden, nichts anderes sind als die isogonalen Trajektorien der Parallelkreise und Meridiankreise. Ferner erkennen wir insbesondere, daß den Geraden der ζ-Ebene, die parallel einer Rechtecksdiagonalen verlaufen, also auf der Zyklide unter dem Winkel $\pm\vartheta$ ansteigen, wahre Rückkehrgeraden der Raumform entsprechen, deren Länge 2π ist. Diese Rückkehrgeraden passieren aber, wenn man sie beim Äquator beginnend denkt, beim halben Umfang π den diametralen Punkt des sphärischen Raums. Die Länge π

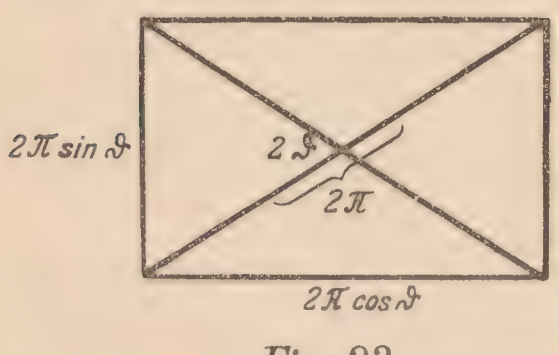


Fig. 23.

ist nun die kürzeste mögliche Verbindung zwischen zwei diametralen Punkten. Also schließen wir, daß die erwähnten Rückkehrgeraden geschlossene Geraden des sphärischen Raumes, also scheinbare Kreise sind, die nun aus der Zyklide durch die scheinbaren Ebenen ausgeschnitten werden, die gegen die Äquatorebene unter dem Winkel $\pm\vartheta$ geneigt sind und deren Spur in der Äquatorebene durch o geht. Nehmen wir den Einheitskreis der Äquatorebene als Schraubungsachse des sphärischen Raumes und lassen den Raum jetzt eine kontinuierliche Bewegung so ausführen, daß ein Punkt der Zyklide und damit alle Punkte derselben die erwähnten wahren geradlinigen Bahnen beschreiben, so bedeutet dies eine Bewegung, bei der Gleitstrecke und Drehwinkel der Schraubung in gleichem Maße wachsen, so zwar, daß nach Erreichung der Gleitstrecke 2π der volle Drehwinkel 2π erreicht wird. Man kann daher auch sagen: Die kontinuierliche Schraubung wird so ausgeführt, daß einer Zunahme der Gleitstrecke die gleiche Zunahme des Drehwinkels entspricht.

Denken wir uns ferner alle Zykliden mit denselben zwei wahren Drehachsen wie die Ausgangszyklide konstruiert, was den kontinuierlichen Abänderungen von ϑ entspricht, so erfüllen diese Zykliden den ganzen sphärischen Raum, und wir haben auf jeder Zyklide die beiden besprochenen Scharen wahrer Geraden. Wir erkennen dann, daß die hervorgehobene kontinuierliche Bewegung den besonderen Charakter hat, jeden Punkt des sphärischen Raumes auf einer wahren Geraden entlangzuführen. Diese Bewegung können wir als CLIFFORD-Bewegung des sphärischen Raumes bezeichnen. Bei dieser Bewegung wird jede unserer Zykliden in sich verschoben. Dabei gibt es noch zweierlei Möglichkeiten, je nachdem wir den Drehwinkel im einen oder anderen Sinn zunehmen lassen, was den beiden Scharen von wahren Geraden auf den Zykliden entspricht. Die ∞^2 durch eine CLIFFORD-Bewegung des Raumes erzeugten geradlinigen Bahnen sind, da sie bei der Raumbewegung einzeln festbleiben, für diese Bewegung ebenfalls Schraubungsachsen einer kontinuierlichen Schraubenbewegung, die nun ebenso vorzugehen hat, daß jeder Raumpunkt eine Gerade beschreibt. Daraus kann man aber leicht schließen, daß die betrachtete CLIFFORD-Bewegung in Wahrheit für jede der erwähnten Geraden als Achse eine CLIFFORD-Bewegung ist. Die ∞^2-Achsen sind untereinander gleichberechtigt. Sie bilden ein vollständiges System von CLIFFORD-parallelen des sphärischen Raumes.

33a. Von der durch die Zyklide zur Darstellung gebrachten parabolischen Raumform mit rechteckförmigem Fundamentalparallelogramm können wir nun zur zugeordneten rhombischen Raumform übergehen. Das bedeutet, daß wir je zwei Diametralpunkte des sphärischen Raumes, die auf der Zyklide liegen, paaren und als einen Punkt der neuen Raumform erklären. Um die gepaarten Punkte zur Vereinigung zu bringen, machen wir den Übergang vom sphärischen dreidimensionalen Raum zum elliptischen dreidimensionalen Raum. Dieser Übergang erfolgt in jeder durch o gehenden Ebene in der Art, daß man diese Ebene (Äquatorebene) zunächst durch stereographische Projektion vom entsprechenden Nordpol oder Südpol auf die Einheitskugel bezieht, darauf diese Einheitskugel um die Einheitslänge orthogonal

zur Äquatorebene bewegt und sodann von der neuen Kugelfläche durch Zentralprojektion wieder zur alten Ebene übergeht. Man sieht dabei sofort die Umwandlung der Meridiankreise der Zyklide in vollständige Hyperbeln mit dem Asymptotenwinkel 2ϑ und den gemäß Fig. 24 bestimmten Scheitelpunkten. Die Zyklide als Ganzes geht in ein einmanteliges scheinbares Rotationshyperboloid über, ihre wahren Geraden in wahre Geraden des elliptischen Raumes, die mit den scheinbaren Geraden des Hyperboloids zusammenfallen. Winkelbestimmung und Linienelement des elliptischen Raumes werden durch die erwähnte konstruktive Rückbeziehung auf den sphärischen Raum vollständig übersehen, wenn man zugleich die vorher gegebene geometrische Bedeutung des Linienelements des sphärischen Raumes beachtet. Das in der geschilderten Weise in den elliptischen Raum hineingestellte Rotationshyperboloid heißt **Cliffordsche Fläche**. Wir erkennen, daß diese Fläche in eineindeutiger Weise eine alle Maßverhältnisse gebende Repräsentation der rhombischen Raumform (Fig. 24a) liefert. Die oben betrachtete Cliffordbewegung des sphärischen Raumes hat sich in die Cliffordbewegung des elliptischen Raumes verwandelt, welche direkt definiert wird als eine kontinuierliche Schraubenbewegung des elliptischen Raumes längs einer und damit längs ∞^2 Geraden, bei der der vollen Abgleitung der Gleitachse, die die Länge π hat, eine volle Umdrehung π in der Weise entspricht, daß beide Größen während der Schraubung in gleichem Maße wachsen. Die Cliffordschen Parallelen werden jetzt durch die ∞^2 Geraden auf den ∞^1 Hyperboloiden veranschaulicht, die man durch die Variation des Winkels ϑ erhält. Der Rhombus der Fig. 24a ist das Abwicklungsbild des längs zwei geradlinigen Erzeugenden als Rückkehrschnittpaar aufgeschnitten zu denkenden, durch das Unendliche des projektiven Raumes führenden Hyperboloids.

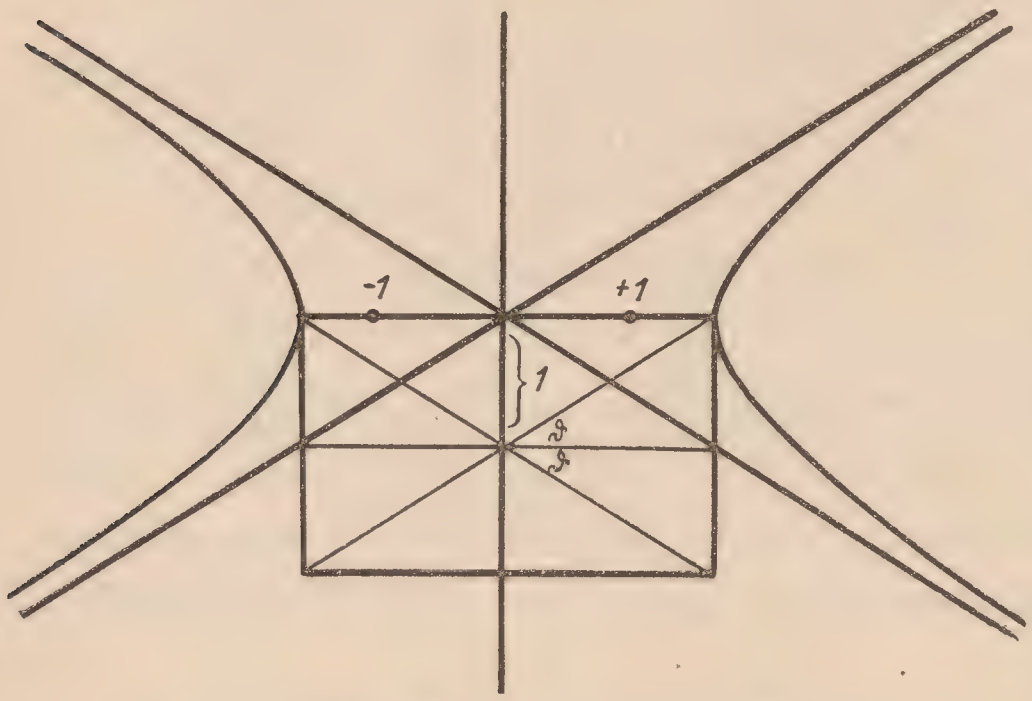


Fig. 24. $(A, 1, 0)$, rhomb. Fall.
Rot. Hyperboloid im ellipt. Raum.
Cliffordsche Fläche.

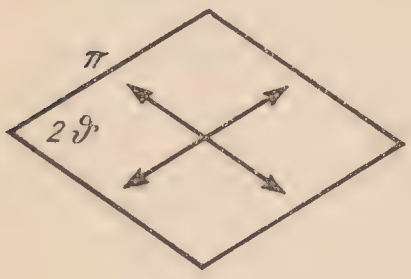


Fig. 24a.

Denkt man sich von unserem Rotationshyperboloid in der Weise einen Übergang zu einem relativ zweiblättrigen von relativen Windungspunkten freien Rotationshyperboloid vorgenommen, daß erst eine zweimalige Durchlaufung des Kehlkreises eine geschlossene Linie ergibt, so erhält man eine Darstellung des Rechtecksfalles im elliptischen Raume, wobei $2\pi \cos\vartheta$ und $2\pi \sin\vartheta$ als Seitenlängen des Rechtecks figurieren. Weiter bemerkt man, daß die erwähnten Zykliden der verschiedenen Winkel ϑ und entsprechend die Cliffordhyperboloide zu je zweien kongruent sind, nämlich gemäß der Relation $2\vartheta + 2\vartheta' = \pi$; was einer Rollenvertauschung der Rechtecksseiten entspricht.

34. Wir haben schließlich noch die **geschlossenen einseitigen parabolischen Raumformen** (Geschlecht 2) zu betrachten, deren Fundamentalgruppen wir in Nr. 11 der ersten Mitteilung aufstellten. Zur Erläuterung derselben dienen hier die Figuren 25a—25e, in welchen halbgespitzte Pfeile Zeichen für Gleitspiegelungen sind. Die Gruppe enthält eine Untergruppe

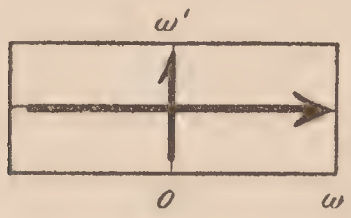


Fig. 25a.

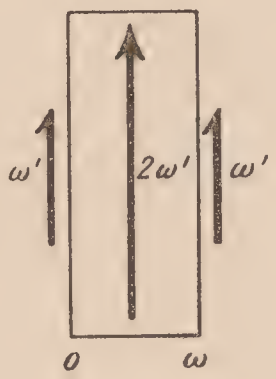


Fig. 25b.

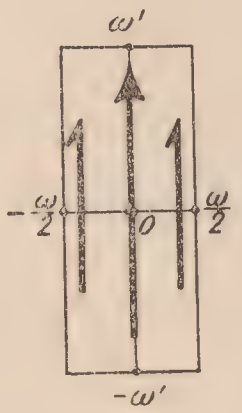


Fig. 25c.

von Translationen, die den schraffierten Fund.-Bereich (Figg. 25d und 25e) in die anderen schraffierten Rechtecke überführt, während die Gleitspiegelungen die nicht schraffierten Bereiche liefern. Die Achsen der Gleitspiegelungen werden in den Figuren 25d, 25e durch die gezeichneten vertikalen Geraden dargestellt. Fig. 25c zeigt den Bereich der Figur 25b nur in verschobener Lage, so daß der Punkt o Mittelpunkt des Fundamentalbereichs geworden ist. Fig. 25f zeigt

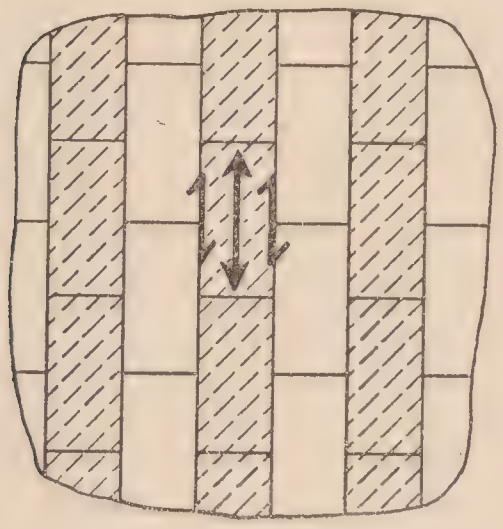


Fig. 25d.

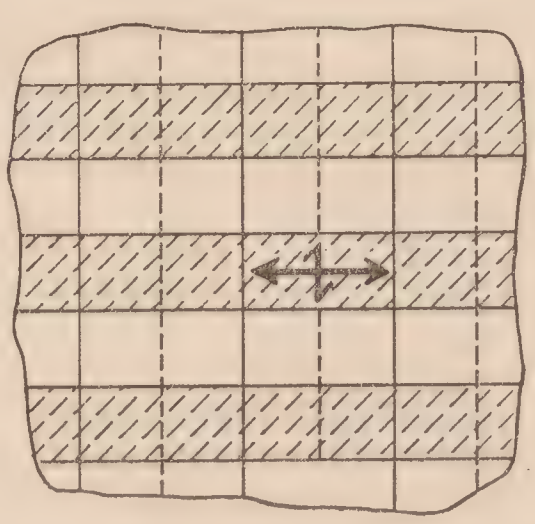


Fig. 25e.

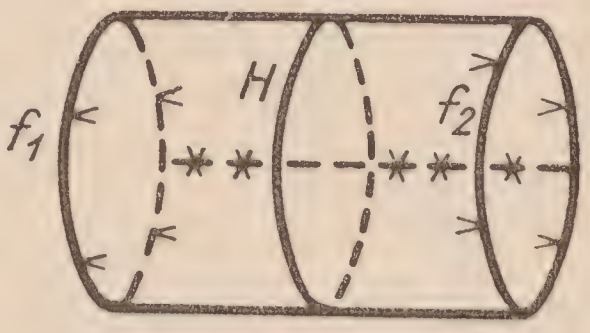


Fig. 25f. (*B*, 2, o.) Einseitiges geschlossenes zylindrisches Faltband. Nat. El. Mod.

eine auf einen tragenden horizontal zu denkenden Zylinder ausgebreitet zu denkende einseitige geschlossene Fläche, die durch zweimalige Herumwickelung des Rechtecks der Figur 25b und Verheftung entsprechender, jetzt koinzidierender Randpunkte entsteht. Diese Fläche F (einseitiges geschlossenes zylindrisches Faltband) ist eine kongruente Darstellung unserer Raumform R. Die Faltlinien f_1 und f_2 entsprechen den vertikalen Seiten des Rechtecks Fig. 25b. Die vollständige Repräsentation der Linien f_1 und f_2 in der ζ-Ebene wird durch das vollständige System der Gleitachsen geliefert.

Wird die Fläche F längs den Faltlinien aufgeschnitten, so entsteht eine zweifach zusammenhängende schlichtartige Fläche. Man übersieht leicht den Aufbau der Fundamentalgruppe und bemerkt, daß dieselbe besteht aus den Translationen $2m\omega + 2m'\omega'$, [m, m' ganzzahlig], die die einzigen direkten Transformationen der Gruppe liefern, und den Gleitspiegelungen um Vertikal-

achsen, deren Nachbarabstand durch ω gegeben ist, während die Schiebungsgrößen die ungeraden Vielfachen von $|\omega'|$ sind.

Betreffs der geschlossenen Geraden unserer Raumform ergibt sich folgendes: Der Durchlaufung einer einufrigen geschlossenen Geraden wird in der ζ-Ebene eine Gleitspiegelung entsprechen. Also sind die beiden Faltlinien f_1 und f_2 der Modellfläche und deren ungerade Vielfache die einzigen einufrigen geschlossenen Geraden; f_1 und f_2 selbst sind zugleich Rückkehrgeraden, d. h. sich selbst nicht schneidende und einfach durchlaufen zu denkende geschlossene Geraden. Die zweiufrigen geschlossenen einfachen Geraden entsprechen den Perioden $2p\,\omega + 2q\,\omega'$, [p und q teilerfremd]. Als allgemeinen Fall erklären wir den, wo p und q beide von null verschieden sind. Die vollständige Darstellung einer solchen Geraden in der Ebene ergibt sich aus einer darstellenden Geraden der ζ-Ebene durch Anwendung der Transformationen der Fundamentalgruppe. Die Anwendung der Translationen liefert dabei zunächst ein gewisses System äquidistanter Geraden, auf welches jetzt nur noch eine Gleitspiegelung anzuwenden ist. Dadurch ergibt sich ein zweites System äquidistanter Geraden, das mit ersterem zusammen eine Zerlegung der ζ-Ebene in kongruente Rhomben liefert. Wir sehen, daß das Paar (p, q) als definierende Signatur der geschlossenen Geraden mit den Signaturen $(\pm p, \pm q)$ gleichwertig ist. Jedem solchen allgemeinen Quadrupel entspricht eine einparametrige zyklisch geordnete Schar geschlossener Geraden. Jede dieser Geraden liefert auf der $\tilde{R}$ zwei verschiedene einfache geschlossene Geraden ohne Selbstschnitte. Hingegen zeigt das rhombische System das Zustandekommen von Selbstschnitten auf der R selbst. Setzen wir $2p\,\omega + 2q\,\omega' = 2\tilde{\omega}$, so gehört zu dieser Größe eine Größe $2\tilde{\omega}'$, die mit $2\tilde{\omega}$ zusammen ein fundamentales Periodenparallelogramm bildet, das somit mit dem durch 2ω, $2\omega'$ bestimmten rechteckförmigen Fundamentalparallelogramm inhaltsgleich sein muß. Daraus errechnet sich die Vertikalverschiebung h, die die benachbarten äquidistanten Geraden unseres Systems ineinander überführt, daraus weiter die Anzahl der in Richtung $2\tilde{\omega}$ nebeneinander zu legenden Rhomben, die notwendig ist, um die Verschiebung $2\tilde{\omega}$ zu erhalten. Diese Anzahl ergibt sich gleich $\dfrac{2q\,\omega'}{h/2}$ d. i. $= 2pq$. Demnach ist $2pq$ die Anzahl der Selbstschnittpunkte jeder allgemeinen zweiufrigen geschlossenen Geraden der Signatur (p, q). Die Raumform selbst wird durch jede solche Gerade in pq kongruente Rhomben zerlegt.

Eine besondere Stellung nehmen die zweiufrigen geschlossenen Geraden ein, die den Translationen 2ω, $2\omega'$ entsprechen. Die ersteren liefern eine Schar nicht zerfällender zweiufriger Rückkehrschnitte, die an unserem Faltband horizontal erscheinen, die letzteren liefern eine Schar zweiufriger zerfällender Rückkehrschnitte, unter denen einer, H (Fig. 25f), als Symmetralhauptschnitt ausgezeichnet erscheint.

34a. Wir schließen hier noch einige Bemerkungen von wesentlich topologischem Gehalt an. (Siehe auch die Fußnote S. 400 usw.)

Zwei geschlossene Linien einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit heißen homotop, wenn sie durch stetige Deformation ineinander übergeführt werden können. Gibt man sich nun irgendeine geschlossene Linie L in unserer betrachteten Raumform, so unterscheiden wir, ob dieselbe eine einufrige oder zweiufrige Linie ist. Wir schließen aus, daß L homotop null ist, d. h. auf einen Punkt zusammenziehbar.

Liegt eine einufrige geschlossene Linie L vor, so entspricht ihr in der ζ-Ebene eine unendliche Linie, welche durch die der einfachen Durchlaufung von L entsprechende Gleitspiegelung in sich übergeführt wird. Es ist offenbar möglich, in der ζ-Ebene eine Deformation dieser Linie unter Wahrung der erwähnten Gleitspiegelungseigenschaft vorzunehmen, so daß die Linie in die Gleitachse selbst übergeht. Demnach gibt es zu jeder einufrigen geschlossenen Linie L eine und nur eine mit ihr homotope geschlossene Gerade, die dann entweder mit einer der beiden Faltlinien f_1, f_2 oder einem ungeraden Multiplum einer von ihnen identisch ist. Ist L eine zweiufrige geschlossene Linie, so findet sich analog der Satz, daß es eine ganz bestimmte mit ihr homotope Schar geschlossener Geraden gibt, von denen jede einzelne jetzt, allgemein zu reden, mehrfach durchlaufen zu denken ist.

Nunmehr sei L ein einufriger Rückkehrschnitt. Dann ist dieser Rückkehrschnitt der einfach durchlaufenen Faltlinie f_1 oder f_2 homotop. Man kann nämlich zu L einen zweiten einufrigen Rückkehrschnitt L' finden, der mit L zusammen eine Aufschneidung der Raumform zu einer zweiseitigen zweifach zusammenhängenden Fläche liefert. Führt man nun die Abwicklung der Raumform in der Weise durch, daß zunächst das gewonnene zweifach zusammenhängende Band abgewickelt wird (Translation $2\omega_2$) und danach der gewonnene unendliche Streifen in unendlich vielen Exemplaren nebeneinandergelegt wird, entsprechend dem Aufbau der Überlagerungsfläche, so findet sich eine Fig. 25d analoge Anordnung, die nur dann die volle Fundamentalgruppe wiedergibt, wenn insbesondere $2\omega_2 = \pm 2\omega'$ ist. Die einfache Durchlaufung des zweifach zusammenhängenden Bandes ist aber homotop der zweifachen Durchlaufung der Linie L wie auch der Linie L'.

Ist L als ein Hauptschnitt (nichtzerfällender Rückkehrschnitt), der nicht homotop null ist, topologisch gegeben, so zerfällt die Raumform in zwei Hälften, deren jede einen einufrigen Rückkehrschnitt trägt. Wir können dann wieder denselben Aufbau der Überlagerungsfläche wie vorhin heranziehen unter Beachtung, daß L jenen doppelt durchlaufenen einufrigen Rückkehrschnitten homotop ist. Daraus ergibt sich, daß jeder topologisch gegebene Hauptschnitt L homotop dem Symmetralhauptschnitt H ist. Also sind alle Hauptschnitte untereinander homotop.

Ist schließlich L ein nichtzerfällender zweiufriger Rückkehrschnitt, so ist die Mannigfaltigkeit nach Aufschneidung längs L zweifach zusammenhängend, und es vollzieht sich der Aufbau der Überlagerungsfläche von diesem Bande aus in analoger Weise wie vorhin, wobei jetzt die Anordnung der Fig. 25e maßgebend wird. Es ergibt sich, daß alle zweiufrigen nichtzerfällenden Rückkehrschnitte in einer einseitigen geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 2 untereinander homotop sind,

insbesondere, bei Zugrundelegung des Faltbandes als Modell, homotop den horizontal geführten Rückkehrgeraden des Faltbandes.

Man bemerkt, daß die gegebene Beweisführung der in Nr. 34a vorgebrachten topologischen Sätze, daß es nämlich auf der $(B, 2, 0)$ wesentlich nur zwei einufrige Rückkehrschnitte, nur einen die $(B, 2, 0)$ in zwei $(B, 1, 1)$ zerfällenden Hauptschnitt, nur einen die $(B, 2, 0)$ zweiseitig machenden nichtzerfällenden Rückkehrschnitt gibt, im Grunde rein topologisch ist. Vgl. einen anderen topologischen Satz in Nr. 41a (3. Mitteilung) betreffend die $(B, 3, 0)$.

34b. Wir untersuchen weiter die Bewegungen unserer Raumform in sich. In der ζ-Ebene werden sie durch euklidische Bewegungen dargestellt, die die Fundamentalgruppe in sich transformieren. Dabei dürfen insbesondere die Achsen der Gleitspiegelung nur untereinander ausgetauscht werden. Das bedeutet für das Faltband, daß das System der Faltlinien in sich übergehen muß, daß mithin auch der Symmetralhauptschnitt H in sich übergehen muß. Die Linie H kann nun gleichlaufend (1) oder mit Wechsel des Durchlaufungssinnes (2) in sich übergeführt werden. Ferner können die beiden Hälften, in die H das Faltband zerlegt, entweder einzeln in sich übergehen (a) oder miteinander vertauscht werden (b). Hierdurch ist eine vollständige Individuation der einzelnen Bewegungen ermöglicht. In den Fällen $1a$ und $1b$ ist die Angabe der Schiebungsstrecke erforderlich, in den Fällen $2a$ und $2b$ die Angabe der beiden auf H befindlichen koinzidierenden, nur in verschiedenen Blättern liegenden Fixpunkte. Die Bewegungen der Kategorie $1a$ werden wir zweckmäßig als Schiebungen bezeichnen. Diese haben im allgemeinen keinen Fixpunkt. Nur wenn es sich um die Blättervertauschung handelt, wo die Schiebungsgröße gleich dem Zylinderumfange ist, sind alle Punkte der Faltlinien fest. Diese Bewegung kann auch als Spiegelung an den Faltlinien bezeichnet werden.

Die Bewegungen der Kategorie $1b$ bezeichnen wir zweckmäßig als Gleitspiegelungen an H. Fixpunkte kommen offenbar jetzt nur vor, wenn die Gleitstrecke verschwindet. Dann liegt die Spiegelung am Hauptschnitt H vor.

Im Falle $2a$ bleiben mit den beiden koinzidierenden Fixpunkten auf H sämtliche Punkte der hindurchgehenden horizontalen Rückkehrgeraden (Querlinien) fest. Diese Bewegungen werden wir als Spiegelungen an den Querlinien bezeichnen. Jede solche ist zugleich Gleitspiegelung in bezug auf die konjugierte Querlinie, nämlich mit dem Halbumfang der Querlinie als Gleitstrecke. Die Bewegungen der Kategorie $2b$ haben in bezug auf die beiden definierenden Fixpunkte den lokalen Charakter von 180°-Drehungen. Sie mögen deswegen Wendebewegungen genannt werden. Diese besitzen außer den erwähnten beiden Fixpunkten keine weiteren Fixpunkte.

35. Zu den niederen Raumformen rechnen nach unserer Definition noch die durch zyklische hyperbolische Fundamentalgruppen erklärten Raumformen **(zyklische hyperbolische Raumformen)**. Es ist leicht, von den zugehörenden uns bekannten Fundamentalbereichen überzugehen zu kongruenten geradlinigen Modellflächen des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes, durch die Figuren 26, 27 und 28 dargestellt; vgl. S. 363. Während bei parabolischer

Erzeugenden keine geschlossene Gerade existiert, gibt es für die anderen beiden Modellflächen je eine geschlossene Gerade (Kehlkreis beziehungsweise Faltlinie). Auch die Bewegungen dieser zyklischen Raumformen in sich sind leicht an den Modellflächen aufzufinden. In allen drei Fällen sind die Rotationen um die Rotationsachse (bei Fig. 28 bis $2 \times 360°$ Drehwinkel [vgl. Mod. 17a]) sowie die Spiegelungen an Ebenen durch diese Achse zu nennen, letztere im Falle der Fig. 28 noch zwei Deutungen zulassend (vgl. Mod. 17a). Dazu kommen im Falle der Fig. 26 noch die 180°-Drehungen um die Durchmesser des Kehlkreises sowie die mit Spiegelung an der Kehlkreisebene verbundenen Rotationen um die Rotationsachse.

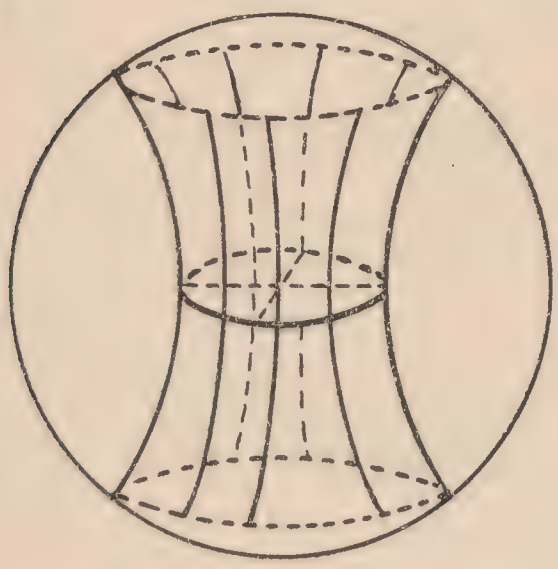


Fig. 26.
$(A, 2, 0)$, 2 hyp. Öffn.
Nat. El. Mod.

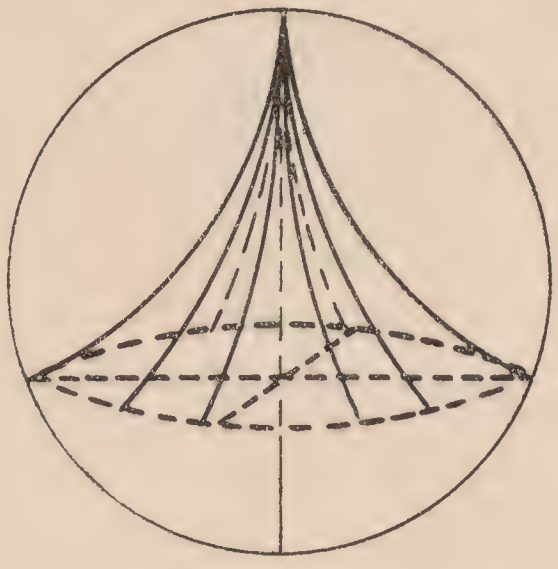


Fig. 27.
$(A, 2, 0)$, 1 par., 1 hyp. Öffn.
Nat. El. Mod.

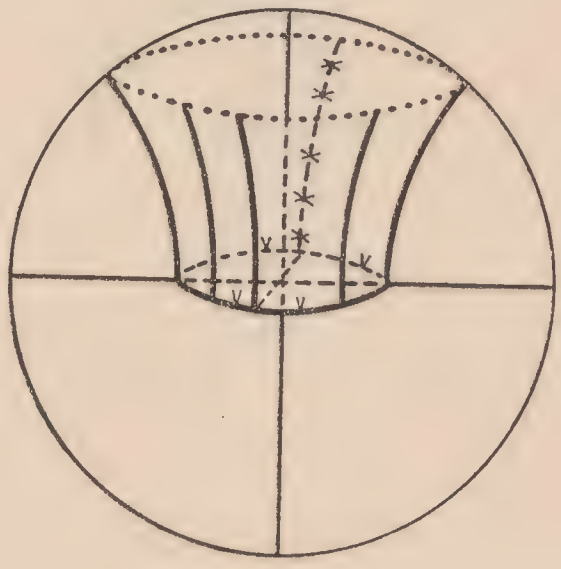


Fig. 28.
$(B, 1, 1)$, 1 hyp. Öffn.
Faltfläche. Nat. El. Mod.

36. Wir haben im Vorhergehenden zu allen niederen Raumformen kongruente Darstellungen der Flächen gewonnen, die dem euklidischen, sphärischen, elliptischen oder hyperbolischen Raum angehören. Das Besondere, was diese Darstellungen gegenüber der Darstellung durch die Fundamentalform leisten, ist die Ersetzung jedes Systems äquivalenter Punkte der ζ-Ebene durch einen natürlichen Punkt, wobei das Vorkommnis von Faltlinien und damit zusammenhängend die Zweiblättrigkeit noch besonders erwähnt sei. In allen diesen Fällen ist die Winkelmessung und Längenmessung unmittelbar bekannt.

Neben diesen Darstellungen sind jedoch andere bemerkenswert, die wir als Konformdarstellungen **(Konformmodelle)** bezeichnen können. Auch bei diesen jetzt zu besprechenden Darstellungen wird jeder Punkt der Raumform durch einen Punkt im gewöhnlichen Sinne repräsentiert. Es ist jedoch nur die Winkelmessung unmittelbar erkennbar, während die Längenmessung erst durch die Uniformisierung gewonnen wird, die den zu betrachtenden Fällen entsprechend näher erläutert wird. Die neuen Modelle haben die Gestalt (eventuell einseitiger) RIEMANNscher Flächen. Der Übergang von den Fundamentalgruppen zu den Modellflächen wird in jedem Falle entweder durch elementare oder elliptische Funktionen bewirkt, wie man sich leicht überlegt. In den Figuren 29a bis 32c, die solche Modellflächen zeigen, sind die äußeren und inneren Konturen punktiert, wenn sie nicht mehr zur Fläche zu rechnen sind, während sie im anderen Falle stets Faltlinien darstellen und deswegen mit Falthäkchen versehen sind.

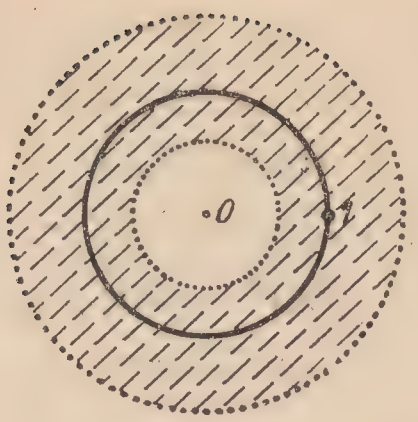


Fig. 29a.
$(A, 0, 2)$, 2 hyp. Öffn.
Konf. Mod.

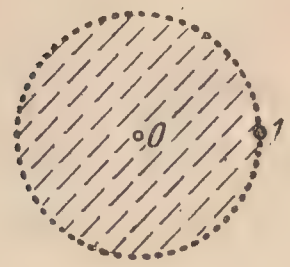


Fig. 29b.
$(A, 0, 2)$, 1 hyp., 1 par. Öffn.
Konf. Mod.

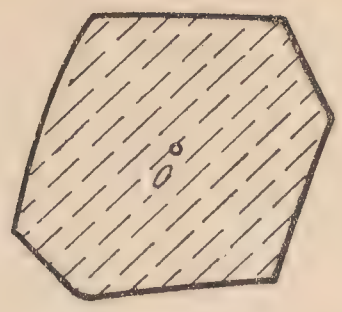


Fig. 29c.
$(A, 0, 2)$, 2 par. Öffn.
In 0 und ∞ Punktierung.
Konf. Mod.

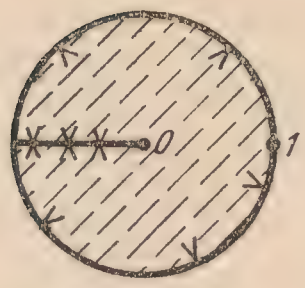


Fig. 30a.
$(B, 1, 0.)$ Konf. Mod.

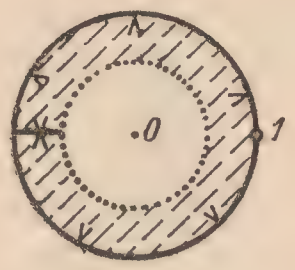


Fig. 30b.
$(B, 1, 1)$, 1 hyp. Öffn.
Konf. Mod.

Fig. 30c.
$(B, 1, 1)$, 1 par. Öffn.
Im Nullpunkt Punktierung.
Konf. Mod.

Fig. 31a.
$(A, 1, 0.)$ Konf. Mod.

Fig. 31b.
$(A, 1, 0.)$ Konf. Mod.

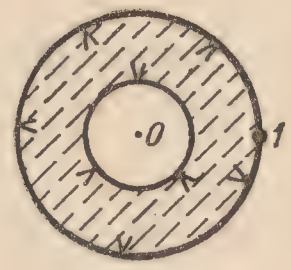


Fig. 31c.
Rechtecksfall $(A, 1, 0.)$
Zweiseitiges geschlossenes
ringförmiges Faltband.
Konf. Mod.

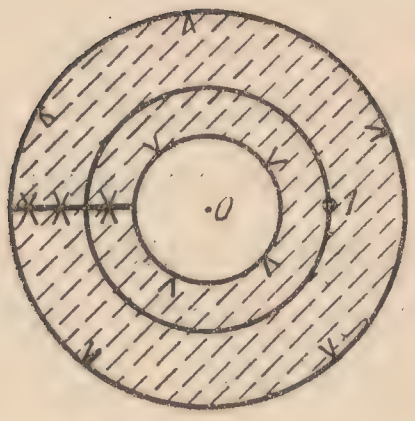


Fig. 32a. $(B, 2, 0.)$ Einseitiges geschlossenes ringförmiges Faltband.
Konf. Mod.

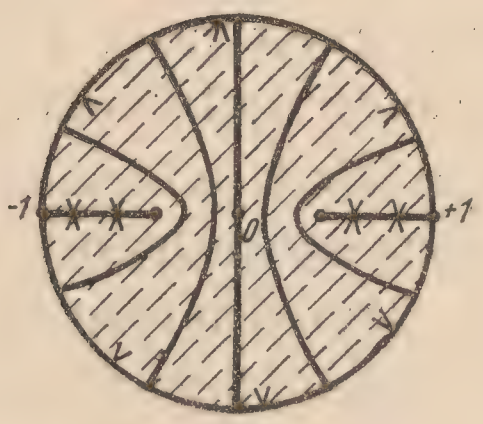


Fig. 32b. $(B, 2, 0.)$
Konf. Mod.

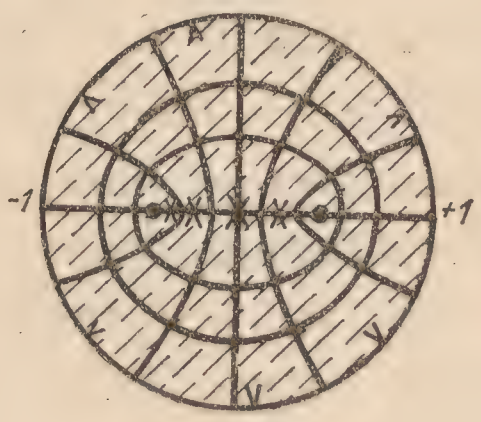


Fig. 32c. $(B, 2, 0.)$
Konf. Mod.

Die geschlossenen zweiseitigen Raumformen vom Geschlecht 1 mit ihren Sonderfällen werden in bekannter Weise durch die zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit vier Windungspunkten dargestellt, für welche das Linienelement $d\sigma$ durch das absolut genommene elliptische Differential erster Art dargestellt wird. In diesem wie in allen von uns jetzt zu betrachtenden Fällen wird die Größe $d\sigma$ in beiden Blättern identisch erklärt. Einen ele-

mentaren Charakter hat die dem Rechtecksfalle der zweiseitigen geschlossenen Raumformen vom Geschlecht 1 entsprechende Fläche der Figur 31c, indem das Linienelement hier einfach durch $\frac{|dz|}{|z|}$ dargestellt wird.

Für die geschlossene einseitige Raumform vom Geschlecht 1 (elliptischer Raum) zeigt Fig. 30a ein Konformmodell. Um von dieser Fläche zur Größe $d\sigma$ zu gelangen, denke man sie sich längs der Kontur aufgeschnitten und die aufgeschnittene Fläche durch $\sqrt{z}$ abgebildet. Es ist dann direkt $\sqrt{z} = \zeta$. Das Gebiet $|\zeta| \leqq 1$ wird nun durch stereographische Projektion auf die untere Halbkugel der Einheitskugel bezogen, deren euklidisches Linienelement das gesuchte absolute Linienelement ist.

Die geschlossene einseitige Fundamentalform vom Geschlecht 2 überträgt sich elementar auf die Fläche der Figur 32a und mittels elliptischer Funktion auf die Fläche der Figur 32b, die mit der Fläche der Figur 32c wesentlich identisch ist. Umgekehrt gelingt die Uniformisierung der letzteren Fläche mittels eines elliptischen Integrals erster Art, dessen Verzweigungspunkte außer den Windungspunkten der Figur noch die bezüglich des Einheitskreises dazu spiegelbildlichen Punkte sind. Die in der Figur eingezeichneten, den horizontalen und vertikalen Geraden der ζ-Ebene entsprechenden Rückkehrgeraden sind stereographische Projektionen konfokaler sphärischer Kegelschnitte.

Einfacher gestaltet sich die Uniformisierung und damit die Gewinnung des absoluten Linienelements für die Fläche der Figur 32a. Hier findet sich $d\sigma = \frac{1}{2}\frac{|dz|}{|z|}$, wobei die Länge des Symmetralhauptschnittes H auf 2π normiert ist.

Die offenen Raumformen $(A, 0, 2)$ werden durch schlichte Ringbereiche dargestellt, nämlich:

$0 < |z| < \infty$ (parabolische Raumform),

$0 < |z| < 1$ (hyperbolische Raumform),

$\rho < |z| < \frac{1}{\rho}$ (hyperbolische Raumform).

Die offene parabolische Raumform $(B, 1, 1)$ wird dargestellt durch die Fläche Fig. 30c, wenn dieselbe im Nullpunkt punktiert gedacht wird. Die offene hyperbolische Raumform $(B, 1, 1)$ wird dargestellt durch die Fläche Fig. 30b mit einer Faltlinie.

36. Sehen wir von der euklidischen Grundform ab, so besteht für jede Raumform der in diesem Zusammenhange wichtige Satz, daß nicht nur jede kongruente Bewegung einer solchen Raumform in sich eine konforme eineindeutige Abbildung dieser Raumform in sich bedeutet (Konformbewegung), sondern daß umgekehrt jede Konformbewegung eine kongruente Be-

wegung ist. Für alle hyperbolischen Raumformen besteht weiter der Satz, daß Konformäquivalenz zweier verschiedener solcher Raumformen immer auch Kongruenz bedeutet. Für parabolische Raumformen besteht diese Umkehrung ebenfalls, nachdem die absoluten Linienelemente der beiden Raumformen zuvor durch Eichung aufeinander abgestimmt sind. Schließlich besteht der Satz ohne weiteres für die elliptischen Raumformen, wenn wir sie uns in zwei verschiedenen Gestalten vorgelegt denken, und das absolute Linienelement in seiner natürlichen Normierung angenommen wird.

RIEMANNSCHE Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen.

(Dritte Mitteilung: Elementarsynthese aller hyperbolischen Raumformen; besondere Behandlung einiger wichtigen Typen; Elementarmodelle und Konformmodelle.)

Von PAUL KOEBE
in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

VI. Die allgemeinen geschlossenen hyperbolischen Raumformen mit besonderer Berücksichtigung der symmetrischen Raumformen, der allgemeinen und der symmetrischen zweiseitigen Raumformen vom Geschlecht 2, der einseitigen Raumformen vom Geschlecht 3, der allgemeinen und der symmetrischen hyperelliptischen Raumformen, der einseitigen hyperelliptischen Raumformen. (Nr. 37—42 c).

VII. Die offenen hyperbolischen Raumformen endlicher Zusammenhangsordnung ($\geqq 3$) mit besonderer Berücksichtigung der vier dreifach zusammenhängenden Typen. (Nr. 43—49).

VIII. Die Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung mit Beispielen. (Nr. 50—55 a).

Wegen der literarischen Hinweise (POINCARÉ; KLEIN; CLIFFORD; FRICKE; HADAMARD; KILLING; Diss. GIESEKING; Diss. LÖBELL; H. HOPF; KOEBE: Urmanuskript 1917 der Preisschrift in Acta math., Bd. 50, 1927) sehe man die Einleitungen der ersten Mitteilung (1927) und der gleichzeitig erscheinenden zweiten Mitteilung (1928) nach sowie wegen mancher Einzelangaben auch den Schluß unserer Mitteilungenfolge.

Es handelt sich in dieser Mitteilung in erster Linie um den synthetischen Aufbau aller zweidimensionalen hyperbolischen Raumformen (Elementarsynthese, Elementarmodelle) von jeglichem denkbaren topologischen Typus. Der Aufbau geschieht in erster Linie aus Doppelsechsecken (dreifach zusammenhängende Innenelemente), die mit ihren drei Begrenzungslinien (geschlossene Geraden) ganz dem Innern der Raumform angehören. Hierzu kommen, den eventuell vorhandenen hyperbolischen Öffnungen entsprechend, ringförmige »Öffnungselemente« — Grenzringe, deren einzelner nach innen durch eine geschlossene Grenzrückkehrgerade, nach außen durch eine ideale geschlossene freie Randlinie (s. unten Nr. 43) begrenzt wird —, ferner, dem Vorkommen parabolischer Öffnungen entsprechend, dreifach zusammenhängende parabolische Grenzelemente, die zwei oder eine innere Randgerade und entsprechend eine oder zwei parabolische Öffnungen besitzen und als ausgeartete Doppelsechsecke (Doppelfünfecke und Doppelvierecke) betrachtet werden können, schließlich bei unendlich hoher

Zusammenhangsordnung eventuell noch »Halböffnungen« — Grenzhalbebenen, deren einzelne nach innen durch eine offene Grenzgerade, nach außen durch eine ideale offene freie Randlinie (Nr. 51) begrenzt wird —.

Der Aufbau selbst ist das Resultat einer Analyse, der eine passende topologische Zerlegung der Raumform zugrunde liegt (vgl. 1. Mitteilung). Diese topologische Zerlegung wird einer geodätischen Normierung unterworfen. Bei unendlich hohem Zusammenhange insbesondere entsteht dann, ganz abgesehen von den den hyperbolischen Öffnungen entsprechenden Grenzringen, nicht immer wieder eine volle Ausschöpfung der Raumform. Vielmehr können eben die erwähnten außen bleibenden Grenzhalbebenen auftreten, die mit den Grenzringen zusammen den in eben diese Einzelstücke zerfallenden Außenteil der Raumform bilden.

Entscheidend für das Zustandekommen eines Außenteiles ist ganz allgemein der Öffnungstypus der Raumform (»uneigentlich offen«, d. h. »ohne freie ideale Berandung« oder »eigentlich offen«, d. h. »mit freier idealer Berandung«), der seinerseits dem Diskontinuitätstypus der zur Raumform gehörenden Fundamentalgruppe (»auf dem Einheitskreise nicht eigentlich diskontinuierlich« oder »auf dem Einheitskreise eigentlich diskontinuierlich«) entspricht. Ein Außenteil tritt dann und nur dann auf, wenn die Raumform den zweiten Öffnungstypus besitzt, d. h. eigentlich offen ist, d. h. eine auch auf dem Einheitskreise eigentlich diskontinuierliche Fundamentalgruppe hat.

Der Innenteil R^* der offenen Raumform R, der in lauter Doppelsechsecke zerlegt erscheint, unter denen sich bei Raumformen mit parabolischen Öffnungen auch ausgeartete Doppelsechsecke (Doppelfünfecke evtl. Doppelvierecke) befinden, die die parabolischen Grenzelemente darstellen, fällt hiernach dann und nur dann mit R zusammen, wenn die R entweder geschlossen oder »uneigentlich offen« ist, wenn also die Fundamentalgruppe auf dem Einheitskreise nicht eigentlich diskontinuierlich ist. Das Abwickelungsbild von R^* ist, wenn $R^* < R$ ist, identisch mit der Fläche des »unendlichvielseitigen Spitzenpolygons« E^*, das man erhält, wenn man über allen verschiedenen Diskontinuitätsintervallen des Einheitskreises die Orthogonalkreisbögen errichtet.

Da innerhalb eines Diskontinuitätsintervalles des Einheitskreises offenbar kein Fixpunkt einer Substitution der Fundamentalgruppe liegt, so ist klar, daß alle geschlossenen geodätischen Linien (geschlossene Geraden) der Raumform R ihr Abwicklungsbild ganz in E^* haben, also selbst ganz in R^* verlaufen.

In diesem Zusammenhange sei darauf hingewiesen, daß am Schluß meiner Preisschrift (Acta math., Bd. 50) der Satz bewiesen ist: Jede geschlossene Linie der Raumform R, längs welcher die Uniformisierende ζ eine parabolische Substitution erfährt, ist homotop der Umlaufslinie einer parabolischen Öffnung oder dem Vielfachen einer solchen. Die einzelne geschlossene Gerade wird hiernach eindeutig bestimmbar durch die Vorgabe einer beliebigen geschlossenen Verlaufslinie (Indexlinie), die nur nicht homotop null oder dem Multiplum der Umlaufslinie einer parabolischen Öffnung sein darf.

Wir schließen hieran einige den Flächeninhalt der Raumform betreffende Bemerkungen, auf die wir unten nicht weiter zurückkommen.

Aus der Zerlegung in dreifach zusammenhängende Innenelemente folgt für eine geschlossene hyperbolische Raumform vom Geschlecht p ($p \geqq 2$ bei zweiseitigen, $p \geqq 3$ bei einseitigen Raumformen) die bekannte Formel $2\mathfrak{c}\pi$ für den Gesamtflächeninhalt, wo mit $\mathfrak{c}$ die sogenannte Charakteristik der Mannigfaltigkeit bezeichnet ist, welche mit der Anzahl der bei einer topologischen Zerlegung der Mannigfaltigkeit durch getrennte Rückkehrschnitte in schlichtartige dreifach zusammenhängende Elemente sich ergebenden solchen Elemente übereinstimmt. Es ist $\mathfrak{c} = 2p-2$ für zweiseitige, $\mathfrak{c} = p-2$ für einseitige geschlossene Raumformen.

Zerlegt man eine mindestens dreifach zusammenhängende offene zweiseitige oder einseitige Raumform endlicher Zusammenhangsordnung topologisch durch getrennte Rückkehrlinien in lauter dreifach zusammenhängende schlichtartige Elemente, so ist die Anzahl dieser Elemente gleich der Charakteristik $\mathfrak{c} \geqq 1$ einer solchen Mannigfaltigkeit, nämlich $\mathfrak{c} = 2p+q-2$ für zweiseitige, $\mathfrak{c} = p+q-2$ für einseitige Mannigfaltigkeiten, welche Zahlen wieder mit den Zusammenhangszahlen $\mathfrak{z} = 2p+q$ bzw. $\mathfrak{z} = p+q$ (um 1 vermehrte Anzahl getrennter, die Mannigfaltigkeit gerade einfach zusammenhängend machender Querschnitte) durch die Formel $\mathfrak{z} = \mathfrak{c}+2$ zusammenhängen. Dabei ist mit p das Geschlecht, mit q die Anzahl der Öffnungen (Randlinien) der Mannigfaltigkeit bezeichnet, die gewissermaßen als durch Lochungen einer geschlossenen Mannigfaltigkeit vom Geschlecht p entstanden gedacht werden kann.

Trennt man von der betrachteten offenen hyperbolischen Raumform endlicher Zusammenhangsordnung die etwa vorhandenen hyperbolischen Öffnungen durch geschlossene Öffnungslinien ab, die die vorher gezogenen Rückkehrlinien nicht treffen, und führt nun die geodätische Normierung des ganzen Liniensystems durch, so erhält der sich ergebende Innenteil den Gesamtflächeninhalt $2\mathfrak{c}\pi$, da jedes der normierten Elemente, unter denen sich eventuell auch parabolische Grenzelemente befinden, den Inhalt 2π hat. Der Gesamtflächeninhalt wird demnach nur dann endlich, nämlich $= 2\mathfrak{c}\pi$, wenn die Raumform keine hyperbolischen Öffnungen hat.

Ist die Raumform von unendlich hoher Zusammenhangsordnung, so ist die Anzahl der sich ergebenden, den Innenteil bildenden normierten Innenelemente immer unendlich groß, also der Inhalt des Innenteiles, daher erst recht der Gesamtflächeninhalt der Raumform stets unendlich.

Damit der Gesamtflächeninhalt einer hyperbolischen Raumform endlich wird, ist nach dem Gesagten notwendig und hinreichend, daß die Raumform von endlicher Zusammenhangsordnung ist und keine hyperbolischen Öffnungen hat.

Neben dem geschilderten Elementaraufbau der Raumformen — ideale Elementarmodelle, so genannt, weil sie einerseits die Maßverhältnisse (Winkel und Längen) unmittelbar (elementar) darbieten, andererseits aber nur vermöge der bestehenden Ränderzuordnungen ein »ideales« Ganzes bilden — werden, wie auch in der zweiten Mitteilung, in wichtigen besonderen, im obigen In-

haltsverzeichnis namhaft gemachten Fällen auch unmittelbar zusammenhängende Modelle, in der Regel nur Konformmodelle (natürliche Konformmodelle), in Form teils gewöhnlicher, teils ungewöhnlicher Riemannscher Flächen (Faltflächen usw.), aufgestellt und deren typische Eigenbewegungen ermittelt, die bei diesen (zweiblättrigen) Modellflächen sich immer als Blättervertauschung darstellen. Diese Konformmodelle hängen mit ihren Elementarmodellen durch das Uniformisierungsproblem zusammen (Problem des absoluten Längenmaßes). In unseren besonderen Fällen kann der Übergang vom Konformmodell zum Elementarmodell jedesmal durch die von mir in der Preisschrift viel verwendeten Iterationsmethoden geleistet werden, während für den umgekehrten Übergang die dort ebenfalls viel verwendete Methode der unendlichen Produktbildung bedeutungsvoll wird.

Immer liegt unserer Idee der Modellbildung (Elementarmodell oder Konformmodell) der Gedanke mit zugrunde, eine in gewissem Sinne eindeutig bestimmte Normalform des betreffenden topologischen Typus der Raumform zu gewinnen. In diesem Sinne stellen die zu den Riemannschen Mannigfaltigkeiten vermöge der transzendenten Uniformisierung bzw. zu den Raumformen vermöge der elementaren Abwickelung gehörenden, durch die Fundamentalgruppen definierten Fundamentalmannigfaltigkeiten bzw. Fundamentalformen, bestehend aus den Punktaggregaten der vermöge der Fundamentalgruppe äquivalenten Punkte der ζ-Ebene (»Punkte«), die Idealmodelle $\kappa\alpha\tau'\ \dot{\varepsilon}\xi o\chi\acute{\eta}\nu$ dar; wie ich mich an anderer Stelle (Ann. di Mat. Bd. 21, ser. 3, pag. 63, 1913) ausgedrückt habe, sozusagen die »Platonischen Ideen« (»Urbilder«) der Riemannschen Mannigfaltigkeiten bzw. der Raumformen, welch letztere beiden eben nur der mannigfaltigsten Gestaltung sich fügende Erscheinungsformen jener unveränderlichen, einzigen »Urbilder« sind.

VI. Die allgemeinen geschlossenen hyperbolischen Raumformen mit besonderer Berücksichtigung der symmetrischen Raumformen, der allgemeinen und der symmetrischen zweiseitigen Raumformen vom Geschlecht 2, der einseitigen Raumformen vom Geschlecht 3, der allgemeinen und der symmetrischen hyperelliptischen Raumformen, der einseitigen hyperelliptischen Raumformen.

37. Die niederen Raumformen sind uns bereits in dem Sinne bekannt geworden, daß wir sie alle explizit konstruieren können durch direkte Herstellung von Fundamentalbereichen der definierenden Fundamentalgruppen oder der von uns angegebenen Modelle, durch die alle diese Raumformen tatsächlich und zwar in übersichtlichster Weise dargeboten werden.

Wir stellen jetzt zunächst für die **geschlossenen zweiseitigen hyperbolischen Raumformen** die entsprechende Frage. Das Problem können wir als das Problem der Synthese oder Elementarsynthese dieser Raumformen bzw. der definierenden Fundamentalgruppen bezeichnen. In einem transzendenten Sinne besitzen wir schon durch die Ergebnisse der ersten Mitteilung überhaupt alle hyperbolischen Raumformen einschließlich der-

jenigen unendlich hoher Zusammenhangsordnung. Wir erhielten nämlich die allgemeinste Raumform durch die Uniformisierung der allgemeinsten RIEMANNschen Fläche. Die Elementarsynthese fordert den unmittelbaren Aufbau aus der hyperbolischen Grundform. Das ist gleichbedeutend mit einem synthetischen Aufbau aller möglichen Fundamentalpolygone aus Bestimmungsstücken, die hinsichtlich ihrer Variabilität vollständig übersehen werden.

Die von uns in der ersten Mitteilung gegebene topologische Analyse und Synthese der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, bei der eine Zerlegung bzw. ein Aufbau (topologische Synthese) der Mannigfaltigkeit mittels Elementflächen gegeben wurde, legt die Frage nahe, eine entsprechende Zerlegung auch für die Raumformen zu versuchen, wobei die Parzellierungslinien dann geschlossene Geraden (Rückkehrgeraden) sein sollen.

Wir denken uns, geleitet von dieser Auffassung, jetzt eine beliebige geschlossene zweiseitige Raumform vom Geschlecht $p \geq 2$ zunächst topologisch in lauter Elemente (α) zerlegt, d. h. in lauter dreifach zusammenhängende Bereiche. Eine solche Zerlegung kann auf mannigfaltige Weise bewirkt werden, immer ist jedoch die Anzahl der entstehenden α-Elemente dieselbe, nämlich $2p-2$. Der einzelne Rückkehrschnitt ist dabei entweder ein die Mannigfaltigkeit zerfällender Rückkehrschnitt (Hauptschnitt) oder ein nichtzerfällender Rückkehrschnitt.

Haben wir den Fall $p=2$, so ist das Schema der Zerlegung entweder das durch Fig. 33a oder das durch Fig. 33b dargestellte. Für $p>2$ kommen

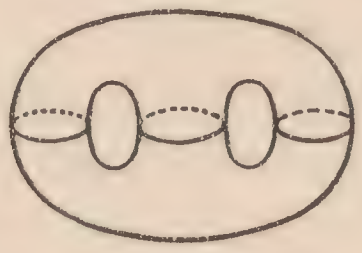


Fig. 33a. (*A*, 2, 0.)

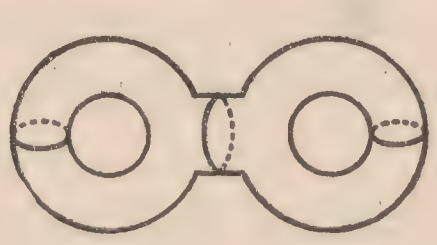


Fig. 33b. (*A*, 2, 0.)

mehr, jedoch offenbar bei jedem p nur endlich viele Zerlegungsschemata in Betracht, deren Anzahl zu bestimmen uns hier nicht weiter interessiert. Die Figuren 34a, 34b zeigen für $p=4$ zwei Zerlegungsschemata. Das zweite

Fig. 34a. (*A*, 4, 0.)

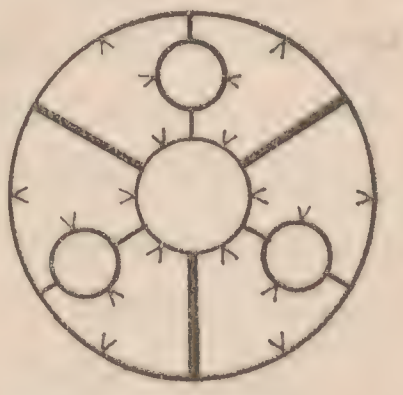


Fig. 34b. (*A*, 4, 0.)

Zerlegungsschema ist von dem ersten durch das gleichberechtigte Eingehen seiner α-Elemente ausgezeichnet. Übrigens kann jedes mögliche Schema gewonnen werden, indem man einen repräsentierenden schlichten $2p$-fach zusammenhängenden Bereich mit paarweise bezogenen Rändern in dreifach zusammenhängende Bereiche unterteilt.

Bei den folgenden Ausführungen spielt die besondere Art der Zerlegung keine Rolle. Wir denken uns die Raumform demnach irgendwie in α-Elemente zerlegt. Unsere Absicht ist dann, die gezogenen Rückkehrschnitte durch homotope Rückkehrgeraden zu ersetzen. Wir behaupten, daß dies möglich ist, und daß sich dann eine normierte Zerlegung der Raumform in normierte α-Elemente nach demselben Zerlegungsschema ergibt.

Zur Durchführung des Beweises erinnern wir zunächst an den Satz, daß die Fundamentalgruppe einer geschlossenen (gleichgültig ob zweiseitigen oder einseitigen) Raumform keine parabolische Substitution enthalten kann. Wäre dies nämlich doch der Fall, so gäbe es in der Raumform eine geschlossene Linie, längs deren die Uniformisierende ζ eine parabolische Substitution erfahren würde. Wir können diese Linie dann so deformieren, daß ihr Bild in der ζ-Ebene ein Bahnkreis der parabolischen Substitution wird. Lassen wir diesen Bahnkreis sich nun auf den Fixpunkt dieser Substitution zusammenziehen, was wieder einer stetigen Deformation unserer in der Raumform geschlossenen Linie entspricht, so muß die absolute Länge der geschlossenen Linie gegen null gehen. Das bedeutet aber innerhalb der Raumform notwendig, daß die geschlossene Linie in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Raumform schließlich in einer Kreisscheibe eines beliebig kleinen Radius enthalten sein muß. Dann könnte aber längs dieser die Größe ζ keine von der Identität verschiedene Substitution erleiden. Das ist ein Widerspruch.

Wir denken uns nunmehr die Überlagerungsfläche unserer Raumform gebildet, indem wir die einzelnen α-Elemente für sich überlagern und die gewonnenen $\alpha^{(\infty)}$ dann längs ihrer begrenzenden Liniengewinde relationenfrei aneinanderfügen. Die so zerlegte Überlagerungsfläche haben wir uns kongruent in die ζ-Ebene übertragen zu denken, wobei wir eine Einteilung der Grundform in Bereiche $A^{(\infty)}$ erhalten, deren einzelner einfach zusammenhängend ist und offenbar von unendlich vielen, von den begrenzenden Liniengewinden der entsprechenden $\alpha^{(\infty)}$ herrührenden Querschnitten Q begrenzt wird, die ihrerseits eine zyklische Ordnung aufweisen, derart, daß stets zwischen zweien derselben weitere und damit unendlich viele Querschnitte vorhanden sind. Alle die unendlich vielen gefundenen, die Grundform durchziehenden Querschnitte endigen in bestimmten Punkten des Einheitskreises, weil bei dem Abwicklungsprozeß längs jedem eine hyperbolische Substitution auftritt, die den Querschnitt in sich überführt, und deren Fixpunkte eben die erwähnten Endpunkte der Querschnitte sind.

Aus dem Vorstehenden ist sofort zu entnehmen, daß keine zwei der Querschnitte einen Endpunkt gemeinsam haben. Um zu einer vollen Veranschaulichung der Fundamentalgruppe zu gelangen, werden wir, wie in der ersten Mitteilung, die einzelnen α-Elemente noch durch je zwei getrennte Querschnitte q_{13} und q_{23} zwischen den Randlinien (1), (2), (3) einfach zusammenhängend machen und das so in ein Achteck verwandelte α-Element mit unendlich vielen koinzidierenden Exemplaren seiner selbst zur $\alpha^{(\infty)}$ zusammenfügen. Hiernach erhalten wir eine Zerlegung des einzelnen Bereichs $A^{(\infty)}$ der ζ-Ebene und überhaupt der ganzen Grundform in lauter Acht-

ecke. Wir wollen diese Einteilung zu einer Einteilung in Sechsecke erweitern, indem wir auch den Querschnitt q_{12} in jedes Achteck einzeichnen.

Nunmehr ersetzen wir alle Querschnitte Q durch die orthogonalen Kreisbögen mit denselben Endpunkten und alle Querschnitte q durch die orthogonalen Kreisbogenstücke, die die entsprechenden normierten Querschnitte Q unter rechtem Winkel treffen, indem sie zugleich auf diesen Querschnitten Q endigen. Man beachte dabei insbesondere, daß auch die Querschnitte q keinerlei Kollisionen nach ihrer Normierung aufweisen können, da die einzelnen normierten Bereiche $A^{(\infty)}$ von lauter getrennten vollständigen Kreisbögen begrenzt werden, also im absoluten Sinne konvex sind.

Das ursprüngliche Netz der Achtecke bzw. Sechsecke ist so in ein Netz normierter Achtecke bzw. Sechsecke verwandelt, zwischen denen dieselben Substitutionen der Fundamentalgruppe bestehen. Man sieht in der Tat sofort, daß je zwei aufeinander bezogene unnormierte Q solche normierte Q liefern, die durch dieselbe Substitution der Fundamentalgruppe aufeinander bezogen werden, und daß sich infolgedessen diese Bemerkung von den Q sofort auch auf die q überträgt.

Das gewonnene normierte Netz weist ebenso wie das Ausgangsnetz nur endlichviele inäquivalente Achtecke auf, und jedes Achteck des neuen Netzes ist wieder von einem neuen Kranz anderer Achtecke umgeben, so daß man von jedem inneren Punkt der Neueinteilung nach allen Richtungen um eine feste Strecke weitergehen kann, ohne aus dem Netz herauszukommen. Daraus folgt, daß das neue Netz ebenso wie das ursprüngliche eine vollständige singularitätenfreie Bedeckung der ganzen Grundform liefert. Nachbarschaft oder nicht Nachbarschaft zweier unnormierter Bereiche $A^{(\infty)}$ finden sich offenbar ebenfalls nach der Normierung wieder.

Man kann die Sachlage auch so beschreiben: Jedem der normierten Achtecke entspricht ein bestimmtes normiertes α-Element der Raumform; den verschiedenen inäquivalenten Achtecken entsprechen verschiedene normierte α-Elemente der Raumform, die entweder keinen Punkt gemeinsam haben oder längs einer Randlinie aneinanderstoßen. Zwei nicht normierten α-Elementen, die benachbart oder nicht benachbart liegen, entsprechen normierte α-Elemente, die bzw. auch benachbart oder nicht benachbart liegen. Daraus folgt, daß die normierten α-Elemente ebenfalls eine vollständige Zerlegung der Raumform darbieten.

Die vorstehenden Bemerkungen genügen, um den Schluß zu sichern, daß der gewonnenen normierten Einteilung der Grundform eine Zerlegung der gegebenen Raumform in normierte α-Elemente gemäß dem ursprünglich gewählten Zerlegungsschema entspricht. Jeder unnormierte Rückkehrschnitt erscheint durch seinen offenbar eindeutig bestimmten, mit ihm homotopen normierten Rückkehrschnitt ersetzt. Zugleich erscheinen die normierten α-Elemente in je zwei Sechsecke zerlegt, von denen wir jetzt feststellen, daß sie spiegelbildlich kongruent sind. Je zwei solcher Sechsecke stimmen nämlich in den Längen der drei Seiten q überein; außerdem sind sämtliche Winkel der Sechsecke Rechte. In der Tat gibt es unter diesen Bedingungen nur zwei, zueinander symmetrische, wesentlich verschiedene Sechsecke, wie die folgende,

weiter unten mitgeteilte Konstruktion (Fig. 36) zeigt. Wegen der erwähnten Symmetrie unserer Achtecke werden wir dieselben zweckmäßig als Doppelsechsecke bezeichnen. Es entspricht also dem einzelnen normierten α-Element ein Doppelsechseck, dessen kongruente Ränderzuordnung nun offenbar durch die Symmetrie selbst geleistet wird. Klappt man daher diese Doppelsechsecke um die gewählte Symmetrielinie q zusammen, so kann man die Seitenzuordnung des Achtecks durch Verheftungen ersetzen und erhält eine zweiblättrige Modellfläche des normierten α-Elements, wie die Fig. 35 zeigt.

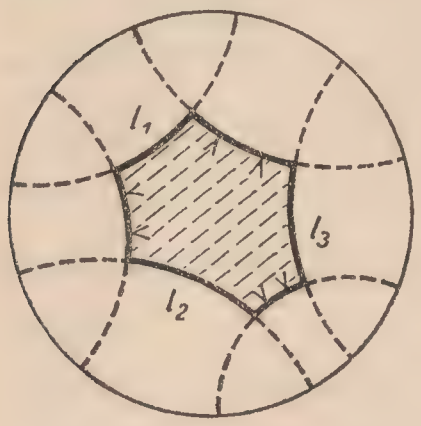


Fig. 35.
Doppelsechsecksfläche.

Die gewonnene Zerlegung der normierten α-Elemente in zwei spiegelbildlich symmetrische Sechsecke ist übrigens nicht von der besonderen Wahl der unnormierten Querschnitte q abhängig, weil offenbar jeder zwischen zwei festgewählten Begrenzungslinien des α-Elements gezogene Querschnitt in jeden anderen solchen Querschnitt durch Deformation übergeführt werden kann.

38. Die vorstehende Analyse führt nun aber umgekehrt auch zu einer Synthese aller geschlossenen zweiseitigen Raumformen vom Geschlecht $p \geqq 2$. Die Grundlage dieser Synthese hat offenbar die Frage nach der Synthese der Doppelsechsecke zu bilden. Diese Frage ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Synthese der Sechsecke selbst. Die zu betrachtenden Sechsecke sind solche mit lauter rechten Winkeln. Ein solches Sechseck ist nun durch die wahren Längen eines Tripels nicht aneinanderstoßender Seiten vollständig bestimmt. Das erkennt man durch Lösung der entsprechenden Konstruktionsaufgabe[1]. Wir geben von dem Sechseck der Fig. 35 die Seitenlängen l_1, l_2, l_3 und haben das zugehörende Sechseck zu konstruieren, was nach der Methode der geometrischen Örter sofort möglich ist. Diese Konstruktion zeigt Fig. 36. Es ist zunächst die Strecke l_1 (in Figur horizontal) hineingelegt. Damit werden dann die anschließenden Seiten des Sechseckes ihrer Lage nach bekannt. Die l_1 gegenüberliegende Seite des Sechsecks gehört einem orthogonalen Kreisbogen des Fundamentalkreises an, der die zwei gestrichelten Kreisbögen berühren muß, die ihrerseits die geometrischen Örter aller Punkte sind, die von dem gleich endigenden orthogonalen Kreisbogen den wahren Abstand l_2 bzw. l_3 haben. Es folgt nun, daß zur Konstruktion der einzelnen Doppelsechsecke bzw. des normierten α-Elementes lediglich die Angabe der Umfänge seiner Randlinien erforderlich ist und daß diese Umfänge $2l_1$, $2l_2$, $2l_3$ beliebig gegeben werden können.

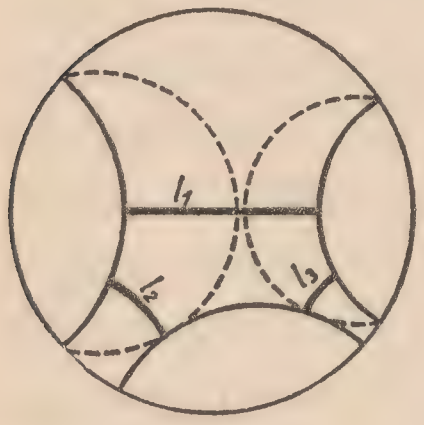


Fig. 36.

Nach dem Vorstehenden werden wir, um unsere allgemeinste Raumform aus independenten Bestimmungsstücken aufzubauen, zunächst ein topologisches Schema der Zerlegung in α-Elemente geben, etwa durch Eintragung in ein Modell,

[1] Fricke behandelt die analoge projektiv formulierte Frage analytisch (Aut. Fkt. Bd. I, S. 335 ff., §§ 10—12); siehe insbesondere den Fall von drei Ecken außerhalb der Fundamentalellipse. In unserm Sinne geometrisch und zwar projektiv verfährt F. Löbell a. a. O. S. 72.

wie die Figuren 33a–34b erläutern. Nunmehr werden wir den einzelnen Rückkehrlinien, die die Zerlegung bewirken, je eine beliebige Länge $2l > 0$ zuordnen; sodann werden wir jedem α-Element der Zerlegung entsprechend ein Doppelsechseck konstruieren, dessen Berandung die im Modell vorgeschriebenen Umfänge hat. Schließlich bleibt noch übrig, die gewonnenen Doppelsechsecke zu einer geschlossenen Einheit zu verschmelzen, indem wir je zwei nach dem Modell zusammengehörende Randlinien irgendwie unter Wahrung der am Modell erkennbaren Orientierung hinsichtlich des Umlaufsinnes kongruent aufeinander abwickeln. Dadurch ist in der Tat eine geschlossene Raumform vom Geschlecht p entstanden. Man bemerkt, daß man die volle bandartige Nachbarschaft einer der Rückkehrlinien etwa auf die bandartige Nachbarschaft des Kehlkreises einer Fläche, wie Fig. 26, eineindeutig kongruent beziehen und dadurch den singularitätenfreien Charakter der Raumformen auch längs dieser Linien anschaulich machen kann. Bei dem besprochenen Zusammenfügungsvorgang kann es vorkommen, daß zwei Randlinien desselben α-Elements zu verknüpfen sind. (Vgl. Fig. 33b). Das hat keine Schwierigkeit, weil dann nach unseren Angaben von selbst die beiden zur Verknüpfung kommenden Randlinien gleich lang sind.

Man bemerkt nun sofort, daß $6p-6$ wesentliche Konstanten in die allgemeinste Raumform vom Geschlecht p eingehen, die dabei in einer gewissen Aufbaustruktur erscheint. Die Invarianten werden eben durch die $3p-3$ Umfänge der Rückkehrgeraden (Elementinvarianten, Längeninvarianten) und die $3p-3$ Zusammenfügungsinvarianten (Kompositionsinvarianten) geliefert. Die letzteren können offenbar genau definiert werden durch den direkten oder besser verhältnismäßigen Markenabstand (numerische Invarianten), der mit der Sechseckzerlegung der anstoßenden Elemente unmittelbar gegeben ist. Diese verhältnismäßigen Markenabstände sind ebenfalls beliebig positiv wählbar bei der Komposition.

39. Man wird nach den vorstehenden Entwicklungen über die zweiseitigen geschlossenen Raumformen ohne weiteres übersehen, daß die Behandlung der **einseitigen geschlossenen hyperbolischen Raumformen ($p \geq 3$)** auf Grund der Zerlegung in α-Elemente keine neuen Schwierigkeiten bietet. Besonders erwähnenswert ist lediglich das jetzt vorkommende neue Phänomen der Selbstverknüpfung einer geschlossenen Randlinie eines α-Elements. Diese Selbstverknüpfung, bei der immer diametrale Punkte (Punkte, die den Umfang in gleich lange Stücke zerlegen) einander entsprechen, entspricht dem unvermeidlichen Vorkommen der einufrigen Rückkehrschnitte bei der Zerlegung in dreifach zusammenhängende Elemente. Eine solche Zerlegung zeigt Fig. 37. Der erwähnte Selbstverknüpfungsvorgang und der gewonnene Umgebungscharakter wird zweckmäßig durch Fig. 28 veranschaulicht. Man kann sich den Vorgang so vorstellen, daß man ein längs der betreffenden Randlinie gewähltes angrenzendes saumartiges Band auf eine Fläche, wie Fig. 28, gerade zweimal voll herumwickelt und nunmehr die Verknüpfung vornimmt, wodurch dann die Faltenumgebung der Fläche Fig. 28 entsteht.

Fig. 37. $(B, 5, 0.)$

Die Zahl der am Aufbau beteiligten Invarianten (Längeninvarianten plus Kompositionsinvarianten) ist stets gleich $3p-6=3(p-1)-3$, d. h. halb so groß als die Zahl der Aufbauinvarianten der allgemeinen Raumform mit dem topologischen Typus von $\tilde{R}$.

Die einseitigen geschlossenen Raumformen vom Geschlecht p entsprechen den symmetrischen zweiseitigen Raumformen vom Geschlecht $p-1$, die eine involutorische symmetrische Umformung ohne Fixpunkte zulassen. Man hat nämlich je zwei Punkte eines Paares einander symmetrisch entsprechender Punkte als einen »Punkt« zu erklären.

40. Eine ausgezeichnete Stellung unter den zweiseitigen Raumformen und Riemannschen Mannigfaltigkeiten nehmen diejenigen ein, die als symmetrisch bezeichnet werden. Eine zweiseitige Raumform heißt symmetrisch, wenn es eine involutorische kongruente Bewegung derselben zweiter Art (d. i. mit Winkelumlegung) in sich gibt. Den Eineindeutigkeitscharakter nehmen wir in den Begriff der Bewegung hinein. Eine zweiseitige Riemannsche Mannigfaltigkeit wird als symmetrisch bezeichnet, wenn es eine eineindeutige involutorische konforme Abbildung derselben in sich von zweiter Art gibt. Jede Raumform ist auch eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und jede Riemannsche Mannigfaltigkeit ist als Raumform deutbar. Sieht man von der sphärischen und euklidischen Grundform ab, so besteht der Satz, daß nicht nur jede Kongruenzbewegung eine konforme Bewegung, sondern umgekehrt auch jede konforme Bewegung eine Kongruenzbewegung ist.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir unsere Aufmerksamkeit jetzt auf die geschlossenen zweiseitigen hyperbolischen Raumformen (d. h. also $p \geqq 2$) beschränken. Die besondere Aufgabe, die wir stellen, ist, für die **symmetrischen zweiseitigen geschlossenen hyperbolischen Raumformen** ebenfalls eine vollständige Synthese zu geben.

Zunächst bemerken wir, daß das Vorhandensein eines Fixpunktes der die Symmetrie anzeigenden Bewegung zweiter Art zur Folge hat, daß durch den betreffenden Punkt ein geradliniges Linienstück geht, in bezug auf welches die Symmetrie als spiegelbildliche Kongruenz erscheint. Man erkennt dies sofort durch Übergang in die ζ-Ebene, wo der symmetrischen Umformung eine symmetrische Umformung der Grundform mit Fixpunkten entspricht. Es ist leicht zu sehen, daß das betreffende geradlinige Stück sich zu einer Rückkehrgeraden der Raumform erweitert, in bezug auf welche die Umformung den Charakter der spiegelbildlichen Kongruenz hat. Im ganzen findet sich offenbar eine endliche Anzahl von getrennten Rückkehrgeraden, die von der Gesamtheit der Fixpunkte der betrachteten symmetrischen Umformung gebildet werden. Diese Rückkehrgeraden liegen ferner offenbar getrennt.

Es kann nun sein, daß das System der genannten Rückkehrgeraden (Symmetrielinien) die Raumform nicht zerlegt. Dann heißt die Raumform hinsichtlich der betrachteten Symmetrie diasymmetrisch. Darunter wird auch der Fall begriffen, daß überhaupt kein Fixpunkt, also auch keine Symmetrielinie da ist. Wenn jedoch die Raumform durch das System der Symmetrielinien zerlegt wird, so kann sie, wie leicht zu sehen, nur in zwei zu-

einander symmetrische Hälften zerlegt werden. Die Raumform werde dann orthosymmetrisch genannt[1]. Eine und dieselbe Raumform kann mehrere Symmetrien besitzen, insbesondere sowohl orthosymmetrisch als auch diasymmetrisch sein. Einfache Beispiele liefern die hyperelliptischen Raumformen.

Ziehen wir zunächst die orthosymmetrischen hyperbolischen Raumformen vom Geschlecht p ($p \geqq 2$) in Betracht. Wir bezeichnen dann mit p' das Geschlecht, mit q die Anzahl der Randlinien der einen Hälfte. q ist nichts anderes als die Anzahl der Symmetrielinien. Das Geschlecht der Raumform ist $2p' + q - 1 = p$. Daraus folgt $q = p + 1 - 2p'$. Läßt man p' alle Werte $0, 1, 2, \cdots$ durchlaufen, für welche q positiv ausfällt, so hat man damit zunächst eine Übersicht der topologisch möglichen Fälle. Daß diese topologischen Möglichkeiten alle wirklich als Raumformen vorkommen, ergibt sich aus der Zerlegung der einen Hälfte der gedachten Raumformen in α-Elemente und dem entsprechenden Aufbau der einen Hälfte. Die andere Hälfte hat man sich in symmetrischer Weise zerlegt und aufgebaut zu denken. Wir finden sofort folgendes Ergebnis: es gibt zu gegebenem Geschlecht p, jeder der genannten Möglichkeiten (p', q) entsprechend, ein und nur ein Kontinuum von Raumformen, die dabei von $3p-3$ Aufbauinvarianten abhängen, also von halb soviel Invarianten, wie die allgemeine Raumform vom Geschlecht p.

Wir betrachten nunmehr die diasymmetrischen hyperbolischen Raumformen R vom Geschlecht p ($p \geqq 2$), zunächst die ohne Symmetrielinien. Eine solche Raumform definiert uns sofort vermöge der angenommenen Symmetrie eine neue und zwar einseitige geschlossene Raumform R_1, die wir erhalten, wenn wir zwei zueinander symmetrische Punkte als einen »Punkt« erklären. Zu dieser R_1 steht R selbst in der Beziehung $R = \widetilde{R}_1$. Das Geschlecht der einseitigen R_1 ist $p+1$. Die Synthese der zweiseitigen diasymmetrischen Raumformen R vom Geschlecht p vollzieht sich daher in folgender Weise. Man bestimme alle einseitigen geschlossenen Raumformen R_1 vom Geschlecht $p+1$, wie wir oben taten, und bilde dazu die zweiblättrigen Überlagerungsformen $\widetilde{R}_1 = R$. Wir sehen, daß die betrachtete diasymmetrische Raumformklasse ein einziges Kontinuum bildet mit $3p-3$ Aufbauinvarianten. Zugleich erkennen wir die Möglichkeit symmetrischer Zerlegung einer jeden solchen Raumform in α-Elemente. Das bedeutet nämlich nichts anderes als eine beliebige Zerlegung der R_1 in α-Elemente.

Nunmehr werde angenommen, daß die Anzahl q der Symmetrielinien der diasymmetrischen Raumform vom Geschlecht p von null verschieden ist. Man hat dann folgende Möglichkeiten zu betrachten, die, wie wir sogleich sehen werden, auch wirklich alle vorkommen: $q = 1, 2, \cdots p$. Wir verfahren jetzt ähnlich wie vorher. Wir denken nämlich

[1] Wir schließen uns mit diesen Bezeichnungen einer von KLEIN für RIEMANNsche Flächen angewandten Terminologie an. Auch seine systematische Untereinteilung der orthosymmetrischen und diasymmetrischen Flächen ist für uns maßgebend.

wieder zwei symmetrisch gepaarte Punkte der Raumform als einen »Punkt« und gewinnen dadurch eine einseitige Raumform R_1 mit q geschlossenen Randgeraden, welche Raumform also insofern unvollständig, d.h. ein Fragment ist. Wir denken uns die R_1 irgendwie topologisch durch Rückkehrschnitte in α-Elemente zerlegt. Entsprechend erhalten wir dann eine symmetrische Zerlegung der R selbst in α-Elemente, wobei die q Symmetrielinien alle an der Zerlegung teilnehmen. Wenn wir z. B. die R_1 zunächst durch lauter Möbiusschnitte schlichtartig machen, so entspricht dem das Ziehen von q Rückkehrschnitten in der R, deren einzelner zu sich selbst symmetrisch ist, die ferner mit den q Symmetrielinien zusammen ein System von $p+1$ jeder für sich nicht zerfällenden Rückkehrschnitten der Raumform ergeben, die jedoch zusammen die Raumform in zwei zueinander symmetrische $(p+1)$-fach zusammenhängende Hälften zerlegen. Diese Hälften können dann ihrerseits weiter symmetrisch in α-Elemente zerlegt werden. Hiermit ist der Vorgang der Synthese der Raumform jeder der erwähnten Gattungen gegeben. Die einzelne Gattung ist wieder durch das q bestimmt. Sie bildet eine durch $3p-3$ Aufbauinvarianten darstellbare Mannigfaltigkeit.

41. Wir betrachten jetzt spezieller den Fall der **zweiseitigen geschlossenen Raumformen bzw. RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht 2** (Nr. 41) **mit ihren symmetrischen Fällen** (Nr. 41a), damit zusammenhängend zugleich die allgemeinen **einseitigen geschlossenen Raumformen vom Geschlecht 3** (Nr. 41b).

Wir wählen die durch die Modellfläche 33a dargestellte Zerlegung in zwei dreifach zusammenhängende Bereiche und denken uns in der Raumform eine Indikatrix fest gewählt. Die beiden normierten α-Elemente sind, da sie dieselben Randlängen aufweisen, indirekt wie auch direkt kongruent. Es ergibt sich dadurch eine direkte (nicht etwa auch eine indirekte) involutorische Bewegung der ganzen Raumform in sich, durch die die beiden Hälften eineindeutig aufeinander bezogen werden; bei dieser Bewegung werden die drei zerlegenden Rückkehrgeraden unter Wechsel ihres Durchlaufungssinnes jede auf sich selbst bezogen. Es kommen dabei auf jeder Rückkehrgeraden zwei voneinander verschiedene Fixpunkte zustande, die man erhält, wenn man die beiden Intervalle halbiert, in welche die Rückkehrgerade durch zwei zugeordnete Markenpunkte (definiert durch die Sechseckteilung der α-Elemente) zerlegt wird. Das andere Paar einander zugeordneter Markenpunkte ist dem erstgewählten diametral und führt deswegen zu denselben Fixpunkten.

Die 6 Fixpunkte zerlegen die 3 Rückkehrgeraden in ganz bestimmter Weise in je zwei Hälften, die durch die betrachtete involutorische Bewegung aufeinander bezogen werden.

Nunmehr wollen wir irgend zwei durch diese Bewegung zugeordnete Punkte unserer RIEMANNschen Mannigfaltigkeit als einen »Punkt« erklären. Dadurch entsteht eine neue RIEMANNsche Mannigfaltigkeit, die ebenfalls zweiseitig ist, aber das Geschlecht null hat. Die Eigenschaft dieser neuen Mannigfaltigkeit als RIEMANNsche Mannigfaltigkeit wird insbesondere in den Fixpunkten (Drehpunkten) erkannt, indem man in der ζ-Ebene, wo einem

Fixpunkt etwa der Punkt $\zeta = 0$ entsprechen möge, eine Transformation ζ^2 vornimmt und dadurch eine konforme Übertragung der Fixpunktumgebung auf die volle Umgebung des Punktes $\zeta = 0$ gewinnt. Die erklärte Mannigfaltigkeit vom Geschlecht null kann nach dem Fundamentalsatz der konformen Abbildung auf eine schlichte z-Vollebene konform übertragen werden, wobei den sechs Fixpunkten sechs verschiedene Stellen der z-Ebene entsprechen. Indem wir die zu diesen Stellen als Windungspunkten gehörende zweiblättrige hyperelliptische RIEMANNsche Fläche herstellen, haben wir nun zugleich eine eineindeutige konforme Abbildung der vorgelegten $(A, 2, 0)$ auf die zweiblättrige RIEMANNsche Fläche geleistet. Bei dieser Abbildung entsprechen den drei Rückkehrschnitten drei zwischen je zwei der sechs Windungspunkte hin- und herlaufende Linien.

Die hyperelliptische RIEMANNsche Fläche erscheint durch die Rückkehrschnitte in zwei identische schlichte Blätter zerlegt, begrenzt von drei getrennten Schlitzen. Die Fläche selbst entsteht durch Überkreuzverheftung dieser beiden Blätter längs den Schlitzen. Die betrachtete involutorische Transformation stellt sich jetzt als Blättervertauschung dar.

Nach den vorstehenden Betrachtungen scheint es zunächst, als ob die gefundenen sechs ausgezeichneten Punkte von der besonderen Art der topologischen Zerfällung der Mannigfaltigkeit in zwei α-Elemente abhängen. Wir werden jedoch sehen, daß das nicht der Fall ist. Legen wir nämlich eine andere Zerfällung zugrunde, so ergeben sich wieder sechs Fixpunkte und damit eine Abbildung der Mannigfaltigkeit auf eine zweiblättrige RIEMANNsche Fläche mit sechs Windungspunkten. Nun besteht aber der Satz, daß zwei hyperelliptische RIEMANNsche Flächen nur durch lineare Funktionen eineindeutig konform aufeinander abgebildet werden können.

Denken wir uns zum Beweise dieses Satzes die beiden Flächen in der z-Ebene ausgebreitet, und sei $z'(z)$ die zuordnende analytische Funktion. Der unendlich ferne Punkt sei bei beiden Flächen, wie wir annehmen dürfen, nicht Windungspunkt, und es mögen, wie wir ebenfalls annehmen dürfen, den beiden unendlich fernen Punkten der zweiten Fläche zwei gewöhnliche endliche Punkte der ersten Fläche entsprechen. Liegen diese beiden Punkte übereinander, so sei $\frac{\lambda}{z - z_0}$ das unendlich werdende Entwicklungsglied in einem der Punkte; dann wird $z'(z) - \frac{\lambda}{z - z_0}$ eine Funktion, die nur noch an einer Stelle der Fläche unendlich erster Ordnung werden könnte. Diese müßte nunmehr die erste Fläche eineindeutig auf eine schlichte geschlossene Fläche abbilden. Das ist aber wegen der Zusammenhangsverhältnisse nicht möglich. Daraus schließen wir, daß die obige Differenzfunktion eine Konstante sein muß, daß mithin $z'(z)$ selbst eine gebrochene lineare Funktion ist. Liegen die beiden Unendlichpunkte der Funktion $z'(z)$ an verschiedenen Stellen z_1 und z_2, so findet sich, daß Summe und Produkt der beiden Zweige eine eindeutige, also rationale Funktion liefern, die nur bei z_1 und z_2 je höchstens von erster Ordnung unendlich werden kann. Die Ausdrücke der

beiden rationalen Funktionen würden demnach sich beide in der Form eines Quotienten repräsentieren, dessen Zähler eine ganze Funktion höchstens zweiten Grades ist, während der Nenner durch den Ausdruck $(z - z_1)(z - z_2)$ dargestellt wird. Die quadratische Gleichung für die Funktion $z'(z)$ führt demgemäß auf einen Ausdruck für diese Funktion, wonach diese höchstens vier Verzweigungsstellen darbietet, folglich auf der hyperelliptischen Riemannschen Fläche nicht eindeutig sein kann. Unverzweigt, also rational, kann sie aber auch nicht sein, da sie ja an ihren Unendlichkeitsstellen je nur in einem Blatte unendlich wird.

Wir sehen also, daß die von einer anderen topologischen Zerlegung der Raumform zu gewinnende Abbildungsfunktion, die den Übergang zu einer hyperelliptischen Riemannschen Fläche vermittelt, lediglich eine lineare Funktion der ursprünglichen Abbildungsfunktion sein kann; daß daher auch die vorhandene direkte, der Blättervertauschung entsprechende Transformation der Mannigfaltigkeit in sich dieselbe geblieben ist. Insbesondere sind mithin die gewonnenen sechs Fixpunkte (Drehpunkte) der Transformation von der Wahl der Zerlegung unabhängig.

Unsere Überlegung hat folgende weitere Ergebnisse geliefert. Zieht man in der Raumform $(A, 2, 0)$ irgendeinen die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitt und ersetzt denselben durch seine mit ihm homotope Rückkehrgerade, so geht diese Rückkehrgerade immer durch zwei und nur zwei unserer sechs Fundamentalpunkte. Er wird durch die beiden Fundamentalpunkte in zwei gleich lange Stücke zerlegt, und diese gehen ineinander über durch die involutorische Bewegungstransformation, die die sechs Fundamentalpunkte fest läßt. In der z-Ebene erscheint jene Rückkehrgerade in der Gestalt eines zwischen zwei und nur zwei Windungspunkten hin- und hergehenden Linienzuges. Damit ist das topologische Resultat gewonnen, daß jeder auf einer hyperelliptischen Riemannschen Fläche $(p = 2)$ gezogene nicht zerfällende Rückkehrschnitt homotop ist einem aus Hin- und Hergang zwischen zwei Windungspunkten entstehenden Rückkehrschnitte. Indem wir alle möglichen derartigen Verbindungen herstellen, haben wir bereits alle vom Standpunkt der Homotopie wesentlich verschiedenen nichtzerfällenden Rückkehrschnitte[1].

Wir merken vor allem an, daß es uns im Falle $p = 2$ der zweiseitigen geschlossenen Raumformen gelungen ist, diese durch ein von dem topologischen Aufbau unabhängiges Modell in Gestalt der hyperelliptischen Riemann-

[1] Hieraus ergibt sich die interessante Bemerkung, daß alle zu einer zweiblättrigen geschlossenen Riemannschen Fläche vom Geschlecht 2 (sechs Windungspunkte) gehörenden Uniformisierenden des Schottkyschen Typus durch das Iterationsverfahren gewonnen werden, das ich in »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. VI« auseinandergesetzt habe, (Math. Ztschr. Bd. 7 (1920), insbes. S. 296ff). Dies ist um so bemerkenswerter, als ja jedes algebraische Gebilde (z, w) vom Geschlecht 2 durch birationale Transformation auf eine entsprechende hyperelliptische Gleichung gebracht werden kann.

Legt man der Behandlung der Raumform $(A, 2, 0)$ die durch Fig. 33b dargestellte Zerlegung zugrunde, so gelangt man zu dem Satze, daß jeder die zweiblättrige Riemannsche Fläche $(p = 2)$ in zwei $(A, 1, 1)$ zerfällende Rückkehrschnitt homotop ist einem durch beide Blätter gleichzeitig zu führenden geschlossenen Schnitt, der die 6 Windungspunkte in zwei getrennte Tripel zerlegt.

schen Fläche darzustellen. Dieses Modell ist ein Konformmodell. Es ist bis auf lineare Transformationen der z-Ebene eindeutig bestimmt, also wesentlich eindeutig bestimmt. Das zugehörende absolute Linienelement $d\sigma$ wird durch die Uniformisierung gewonnen, deren effektive Durchführung hier durch Iterationsprozesse (s. Preisschrift Nr. 5—7) gelingt. Dieses $d\sigma$ ist schon über der schlichten z-Ebene eindeutig, hat aber als solches in den sechs Fundamentalpunkten Singularitäten.

Der Satz über die Linearität jeder eineindeutig konformen Abbildung der hyperelliptischen Fläche in sich hat zur Folge, daß wir über die internen Bewegungen unserer Raumform in jedem Falle die volle Entscheidung treffen können. Abgesehen von der Blättervertauschung, die als einzige typische Bewegung der betrachteten Gattung immer vorhanden ist, kommen nur noch diejenigen direkten und indirekten linearen Transformationen in Betracht, welche die sechs Windungspunkte in sich vertauschen. Jene typische Bewegung ist abstrakt charakterisiert als diejenige Bewegung, welche die sechs Fundamentalpunkte der Raumform einzeln fest läßt.

41a. Unser besonderes Interesse wollen wir jetzt noch den symmetrischen Raumformen $(A, 2, 0)$ zuwenden. Wir knüpfen an das von uns gewonnene Konformmodell in Gestalt der zweiblättrigen RIEMANNschen Fläche mit sechs Windungspunkten an. Soll die betreffende Raumform symmetrisch sein, so muß die Beziehung zwischen z' und z, die die Symmetrie ausdrückt, sich als eine lineare Beziehung zwischen z' und $\bar{z}$ darstellen, unter $\bar{z}$ die zu z konjugierte Größe verstanden. Die Beziehung $z'(z)$ muß ferner involutorisch sein. Es möge etwa dem Nullpunkt der unendlich ferne Punkt entsprechen, dann ergibt sich die Beziehung sofort in der Form $z' \cdot \bar{z} = \lambda$, wo λ eine Konstante. Wiederholen wir die Transformation, wobei z' in z'' übergehen möge, so findet sich $z''\bar{z'} = \lambda$, also $z'' = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} z$.

Nun soll aber $z''(z')$ die Identität sein; also muß $\lambda = \bar{\lambda}$ sein, mithin $\lambda = \pm\rho^2$, nämlich positiv oder negativ reell.

Als Ergebnis stellt sich somit ein, daß es wesentlich nur zwei involutorische lineare Transformationen zweiter Art gibt: nämlich die Spiegelung an einem Kreise und die diametrale Zuordnung.

Aber die diametrale Zuordnung können wir sofort für unseren Fall ausschließen. Geht nämlich die hyperelliptische Fläche, die wir uns jetzt für einen Augenblick über der Kugelfläche ausgebreitet denken wollen, durch die diametrale Zuordnung in sich über, so geht insbesondere jeder allgemein gewählte Hauptkreis der Kugel in sich über. Ein solcher ist aber auf der hyperelliptischen Fläche ein Doppelkreis. Beachtet man dies, so sieht man, daß die diametrale Zuordnung, welche Blätterzuordnung man auch wählen mag, nicht die Periode 2, sondern vielmehr die Periode 4 ergibt.

Somit ist Symmetrie einer hyperelliptischen Fläche vom Geschlecht 2 nur in der Form der Spiegelung an einem Kreise darstellbar. Gehen wir nun der Reihe nach die verschiedenen topologischen Typen der Symmetrie durch, so finden wir die durch die Figuren 38, 39, 40, 41 dargestellten Flächen. Insbesondere in Fig. 38 hat man sich die Zuordnung

längs der Achse des Reellen als Blättervertauschung zu denken, wenn die Fläche diasymmetrisch aufgefaßt wird, als Spiegelung in den einzelnen Blättern hingegen, wenn die Fläche orthosymmetrisch aufgefaßt wird.

Jede symmetrische $(A, 2, o)$ läßt, wie wir sehen, nur eine typische, d. h. dem betreffenden symmetrischen Typus immer zukommende Bewegung zu, die sich in unserem Konformmodell als Blättervertauschung darstellt.

Fig. 38.

Fig. 38a. $(B, 3, o.)$ Nat. Konf. Mod.

Fig. 39.

Fig. 40.

Fig. 41.

41b. Als Modell (Konformmodell) der **einseitigen geschlossenen Raumform $p = 3$** findet sich aus Fig. 38 die durch Fig. 38a dargestellte zweiblättrige Fläche. Zugleich ergibt sich, daß die Raumformen der Gattung $(B, 3, o)$ ebenfalls nur eine typische Bewegung zulassen, die sich im Modell 38a als Blättervertauschung darstellt. Diese Bewegung hat in den drei Windungspunkten der Modellfläche (Fundamentaltripel) den Charakter einer 180°-Drehung, längs der Falte (Fundamentallinie, eine in der Raumform eindeutig bestimmte, offenbar ganz ausgezeichnete einufrige Rückkehrgerade, die die Raumform zweiseitig macht) den Charakter einer Spiegelung. Überhaupt läßt sich jede Bewegung dieser Modellfläche in sich durch direkte oder indirekte lineare Transformationen darstellen, so daß also das Fundamentaltripel und die Fundamentallinie immer nur in sich übergehen. Auch sind solche Modellflächen untereinander nur dann kongruent, wenn sie linear ineinander übergeführt werden können. Auch die letztere Bemerkung ergibt sich durch Übergang zu den hyperelliptischen Riemannschen Flächen.

Topologische Bemerkung: Jeder Rückkehrschnitt in einer topologischen Mannigfaltigkeit $(B, 3, o)$, der dieselbe zweiseitig macht, ist jedem andern solchen Rückkehrschnitt homotop[1].

Zum Beweise stellen wir uns die Mannigfaltigkeit in Gestalt einer Raumform vor. Ist dann ein Rückkehrschnitt der gemeinten Art in dieser Raumform gezogen, so können wir ihn zunächst der Normierung unterwerfen, wobei er ein Rückkehrschnitt der gemeinten Art geblieben ist, der mit ersterem homotop ist. Der normierte Rückkehrschnitt verwandelt die Raumform $(B, 3, o)$ in eine $(A, 1, 1)$, die jetzt jedoch nur noch als Fragment zu bezeichnen ist. Wir denken uns diese $(A, 1, 1)$ mit einer Indikatrix versehen. Wir nehmen zu dieser orientierten $(A, 1, 1)$ eine koinzidierende $(A, 1, 1)$ mit entgegengesetzter Indikatrix hinzu und verheften sie mit ersterer längs

[1] Der in Rede stehende topologische Satz läßt sich rein topologisch folgendermaßen beweisen.

Wir denken uns die $(B, 3, o)$ unter dem Bilde einer gelochten Torusfläche, an deren Rand C eine Kreuzhaube angeheftet ist. Innerhalb dieser Kreuzhaube gibt es einen und nur einen einufrigen Rückkehrschnitt R, der offenbar die Eigenschaft besitzt, die $(B, 3, o)$ zweiseitig zu machen. Nun sei R_1 ein zweiter Schnitt innerhalb der $(B, 3, o)$, der diese zweiseitig

des Randes überkreuz. Dadurch ist die zur Raumform $(B, 3, 0)$ zugeordnete zweiseitige Überlagerungsform $(A, 2, 0)$ entstanden. Diese ist eine diasymmetrische Raumform, in welcher die symmetrische Punktzuordnung als Koinzidenz erscheint. Nunmehr denken wir uns das eine Fragment durch einen normierten inneren Rückkehrschnitt dreifach zusammenhängend gemacht. Das so entstandene α-Element gestattet dann, weil zwei Randgeraden gleiche Länge haben, eine 180°-Drehung in sich um den Mittelpunkt des die beiden gleich langen Randgeraden verbindenden normierten Querschnittes. Diese 180°-Drehung ist eine involutorische Transformation für das unaufgeschnittene Fragment $(A, 1, 1)$, wobei auf dem soeben wieder zur Verheftung gebracht gedachten Rückkehrschnitt zwei weitere Drehpunkte sich finden.

Bei der besprochenen Drehung der $(A, 1, 1)$ in sich wird die Randgerade dieses Fragments, d. i. eben unser normierter einufriger Rückkehrschnitt, auf solche Weise in sich transformiert, daß jeder Punkt um die halbe Randlänge verschoben wird. Für das zweite Exemplar $(A, 1, 1)$, das sich von ersterem nur durch die Indikatrix unterscheidet, läßt sich die entsprechende Drehung erklären. Damit ist eine involutorische Drehung der $(A, 2, 0)$ in sich gewonnen, bei der die Punkte des normierten einufrigen Rückkehrschnittes um ihre halbe Länge verschoben werden. Setze ich jetzt die für die $(A, 2, 0)$ bereits betrachtete symmetrische Umformung mit der involutorischen Transformation zusammen, so entsteht eine neue indirekte Bewegung, bei der die Punkte des normierten einufrigen Schnittes fest bleiben. Wir sehen also jetzt, daß die $(A, 2, 0)$ durch diesen Schnitt in zwei spiegelbildlich symmetrische Hälften zerlegt ist.

Nunmehr möge die $(A, 2, 0)$ auf eine zweiblättrige RIEMANNSche Fläche mit sechs Windungspunkten übertragen gedacht werden. Dann folgt wegen der Linearität jeder direkten oder indirekten Internabbildung hyperelliptischer Flächen, daß das Bild unseres normierten Rückkehrschnittes nur ein Doppelkreis sein kann, der diese Fläche in zwei symmetrische Hälften zerlegen muß, deren jede drei der Windungspunkte in ihrem Innern enthält. Dabei kommt der diasymmetrische Charakter der $(A, 2, 0)$ jetzt auch in Form der Spiegelung an diesem Kreise zum Ausdruck, wobei jedoch für die Nachbarschaft der Kreislinien zugleich Blättervertauschung eintritt.

---

macht; R_1 ist dann einufrig und trifft C. Wir können annehmen, daß auf C nur endlichviele Punkte von R_1 liegen und daß keiner der Bögen, in die R_1 durch C zerlegt wird, homotop einem Bogen von C ist. Die Bögen, welche die Kreuzhaube durchsetzen, endigen auf C notwendig diametral. Die Bögen, welche den Torus durchsetzen, bilden ein, zwei oder drei Bündel in der Weise, daß Bögen verschiedener Bündel nichthomotope, Bögen desselben Bündels hingegen homotope Querschnitte der Torusfläche bilden, daß ferner die Bündel als solche auf C diametral endigen. Die Bögen eines Bündels bilden ein System gewissermaßen parallel nebeneinander laufender Querschnitte. Der erwähnte doppelte diametrale Endigungscharakter zeigt unmittelbar, daß die einzelnen Parallelbündel durch die Kreuzhaube hindurch nur in sich verbunden sein können, daß folglich der geschlossene Zug R_1 nur ein einziges Parallelbündel liefern kann. Weiter ergibt sich dann aus der mit dem Parallelismus gegebenen Anordnung der Endigungen der einzelnen Bögen des Bündels auf C wegen der Diametralendigung der Kreuzhaubenbögen, daß nur bei Reduktion des Parallelbündels auf einen oder höchstens zwei Bögen durch die Herstellung der Verbindungen durch die Kreuzhaube ein einziger geschlossener Zug entsteht, der im ersten Falle ersichtlich einufrig ist, die $(B, 3, 0)$ jedoch einseitig läßt, im

(Fortsetzung S. 421.)

Die Annahme der Existenz eines zweiten mit ersterem nicht homotopen einufrigen Rückkehrschnittes unserer Art auf der Raumform würde hiernach, wenn die Raumform durch eine hyperelliptische diasymmetrische Riemannsche Fläche repräsentiert wird, zu dem Ergebnis führen, daß es zwei verschiedene Doppelkreise auf der hyperelliptischen Fläche gäbe, die doch durch die Spiegelung an ihnen denselben diasymmetrischen Charakter der Fläche definieren; was offenbar unmöglich ist.

42. Wir betrachten nunmehr die **allgemeinen hyperelliptischen Raumformen $p \geqq 2$.** Unter einer hyperelliptischen Raumform verstehen wir eine zweiseitige geschlossene Raumform mit $p \geqq 2$, die eine direkte involutorische Bewegung mit der für das betreffende Geschlecht größtmöglichen Zahl von Fixpunkten (Drehpunkten) gestattet. Diese größtmögliche Anzahl ergibt sich folgendermaßen.

Es sei eine geschlossene zweiseitige Raumform mit einer involutorischen direkten Bewegung vorgelegt. Indem wir je zwei entsprechende Punkte derselben als einen Punkt betrachten, entsteht eine neue zweiseitige geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Geschlecht p_0 sei, relativ zu welcher die ursprüngliche Raumform als eine zweiblättrige Mannigfaltigkeit erscheint, deren relative Windungspunkte in derselben Anzahl vorhanden sind, als die angenommene involutorische Bewegung Drehpunkte besitzt.

Es sei nun allgemein eine geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit vom Geschlecht p_0 gegeben und sei relativ zu dieser eine andere, dann ebenfalls zweiseitige und geschlossene Mannigfaltigkeit mit der relativen Blätterzahl m und der Anzahl w der relativen Windungspunkte gegeben, so ergibt sich das Geschlecht p der letzteren Fläche durch die aus der bekannten Riemannschen Formel $w - 2m = 2p - 2$ für Riemannsche Flächen leicht zu begründende Formel

$$w + 2m(p_0 - 1) = 2p - 2.$$

Hiernach ist die Anzahl w der relativen Windungspunkte unter allen Umständen eine gerade Zahl $w = 2w'$. Setzen wir unserem Falle entsprechend $m = 2$, so ergibt sich

$$w' = p + 1 - 2p_0$$

$$w = 2w' \leqq 2p + 2.$$

Wird also die Maximalzahl $2p + 2$ für w erreicht, so ist zugleich $p_0 = 0$. Eine hyperelliptische Raumform reduziert sich also vermöge ihrer charakteristischen involutorischen Internbewegung auf eine Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 0; eine Eigenschaft, die auch an Stelle der Forderung der maximalen Drehpunktzahl treten kann. Diese Mannigfaltigkeit kann auf die Vollebene eineindeutig konform übertragen werden, womit zugleich eine eineindeutige Konformübertragung der Raumform auf eine hyperelliptische Riemannsche Fläche mit $2p + 2$ Windungspunkten gewonnen ist, in welcher Darstellung nunmehr die angenommene Internbewegung als Blättervertauschung erscheint. (Wir merken dabei noch an, daß nach früherem überhaupt jede geschlossene zweiseitige Raumform vom Geschlecht

$p = 2$ im Sinne unserer Definition hyperelliptisch ist.) In der Darstellung durch die hyperelliptische RIEMANNSche Fläche erscheint nunmehr überhaupt jede vorhandene Internbewegung als lineare Transformation. Auch die Konformäquivalenz zweier solcher hyperelliptischen Flächen stellt sich immer nur durch eine lineare Transformation dar.

Wir haben damit alle hyperelliptischen Raumformen zunächst in Gestalt von Konformmodellen hergestellt; die zugehörende absolute Messung wird, wie wir wissen, durch Iterationsmethoden gewonnen.

Zur Elementarsynthese der hyperelliptischen Raumformen übergehend, knüpfen wir nunmehr zweckmäßig an das gewonnene Konformmodell an, das wir in der z-Ebene liegend denken. Wir denken ein bestimmtes Geschlecht $p \geqq 2$ ins Auge gefaßt, haben also $2p + 2 \geqq 6$ Windungspunkte, deren Stellen wir in bekannter Weise paarweise ohne gegenseitige Treffpunkte verbinden, wodurch $p + 1$ Verbindungsrückkehrschnitte zwischen den gepaarten Windungspunkten erklärt werden, die eine Zerfällung der Fläche in zwei $(p + 1)$-fach zusammenhängende kongruente Blätter (Hälften) bewirken. Wir nehmen jetzt die Normierung der Rückkehrschnitte vor. Dabei ergeben sich Linien, die dasselbe Verlaufsschema wie vorher darbieten. Die Fläche wird wieder in zwei koinzidierende Blätter zerlegt, deren einzelnes den Charakter eines längs $p + 1$ Einschnitten zwischen den gepaarten Windungsstellen aufgeschlitzten Vollblattes hat. In der Tat ist ja das ζ-Abwicklungsbild eines unnormierten Rückkehrschnittes unserer Art eine Linie, die entsprechend der Zerlegung der Originallinie in zwei kongruente Stücke ihrerseits in unendlich-viele Stücke zerfällt, deren je zwei benachbarte durch 180°-Drehung um den gemeinsamen Punkt auseinander hervorgehen, so daß alle auf der ζ-Linie angetroffenen Drehpunkte auf einem Orthogonalkreise liegen, der dann offenbar die geodätische Normierung unmittelbar liefert.

Es ist nun ersichtlich, wie die Elementarsynthese vor sich zu gehen hat. Man wird etwa die eine Hälfte der hyperelliptischen Raumform aus α-Elementen (Doppelsechsecken) mit beliebigen Invarianten aufbauen, womit dann die zweite kongruente Hälfte auch gegeben ist. Die beiden Hälften sind nur noch zusammenzufügen, wobei noch Kompositionsinvarianten auftreten, die offenbar durch die Vorgabe der frei wählbaren Drehpunkte auf den einzelnen Randgeraden der einen Hälfte festgelegt werden. Selbstverständlich müssen auf jeder Randgeraden die beiden Drehpunkte diametral gegeben werden, so daß die geschlossene Randgerade in zwei gleich lange Hälften zerlegt wird. Ferner ist selbstverständlich, daß die Drehpunkte auf den Randgeraden der anderen Hälfte entsprechend der angenommenen kongruenten Beziehung der beiden Hälften zueinander festzulegen sind. Tatsächlich entstehen auf diese Weise zweiseitige Raumformen vom Geschlecht p, die eine direkte involutorische Bewegung mit den angenommenen $2p + 2$ Drehpunkten zulassen.

Auf diese Weise finden sich sofort durch Abzählung $4p - 2$ Aufbauinvarianten, in Übereinstimmung mit der Konstantenzahl der Windungspunkte der allgemeinen hyperelliptischen RIEMANNschen Fläche vom Geschlecht p, die $2p + 2 - 3 = 2p - 1$ wesentliche komplexe Konstanten, also $4p - 2$ wesentliche reelle Konstanten hat.

Wir haben im vorhergehenden den Aufbau der hyperelliptischen Raumformen auf eine bestimmte Weise durchgeführt, die durch Fig. 42 veranschaulicht wird. Ebenfalls würde man zu einem Aufbau gelangen, wenn man die Zerlegung gemäß Fig. 44 vornimmt, wobei jedes dreifach zusammenhängende Stück zweiblättrig ist. Der Charakter des Aufbaus wird auch durch die Faltmodelle Fig. 43 bzw. 45 übersichtlich dargestellt. Bei der zweiten Auffassung findet eine Zerlegung in lauter solche α-Elemente statt, deren je

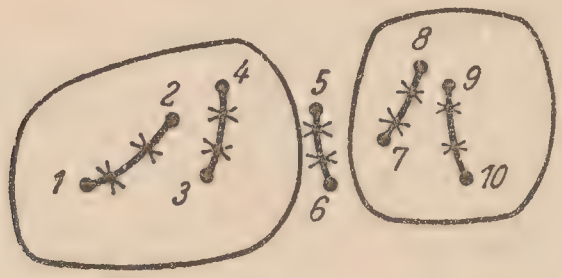


Fig. 42.

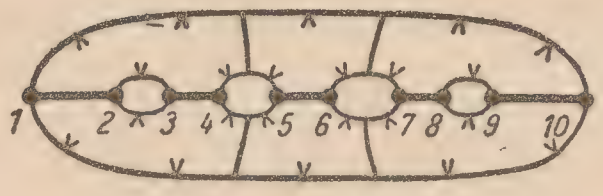


Fig. 43.

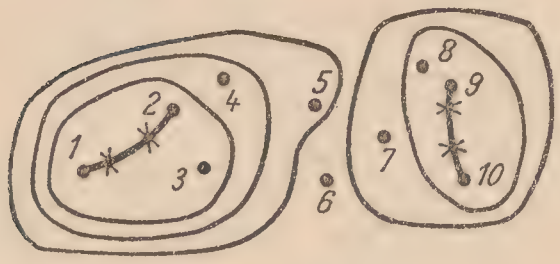


Fig. 44.

Fig. 45.

zwei Randgeraden gleich lang sind (— im Modell Fig. 45 durch die übereinanderliegenden Vertikalstrecken und durch die beiden Horizontalstrecken angedeutete Linien —). Es besitzt infolgedessen jedes dieser Elemente einen Drehpunkt, der nicht auf einer Randgeraden liegt. Im übrigen versteht sich von selbst, daß die Kompositionsinvarianten, die übereinanderliegenden Vertikalstrecken zugeordnet gedacht werden, einander gleich zu geben sind. Ein weiteres Eingehen auf diese Art des Aufbaues, insbesondere das tatsächliche Zustandekommen wirklicher hyperelliptischer Raumformen können wir uns versagen. Dem Leser möge empfohlen werden, sich besonders den Fall $p = 2$, durch Fig. 33b (S. 389) dargestellt, im Sinne dieser Figur klarzumachen.

Anmerkung: Wie wir früher erwähnten, gelingt der Übergang vom Konformmodell einer hyperelliptischen Raumform (zweiblättrige Riemannsche Fläche) zum Elementarmodell durch Anwendung organisch bestimmter Iterationsketten, wie ich dies in meiner Preisschrift (Acta 50) in den Nummern 5—7 ausgeführt habe. Umgekehrt ist es möglich, den Übergang vom gegebenen Elementarmodell und der damit gegebenen Fundamentalgruppe zum Konformmodell, d. i. zur zweiblättrigen Riemannschen Fläche, auszuführen, ohne Anwendung des allgemeinen Fundamentalsatzes der konformen Abbildung für geschlossene einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten, nämlich durch Anwendung von Reihenprozessen, die als Gegenstücke der Iterationsprozesse erscheinen. Die dabei als Zwischenaufgabe vorkommende umgekehrte Spitzenpolygonaufgabe (Abbildung des Spitzenpolygons auf den Einheitskreis) bietet zunächst eine Schwierigkeit dar, weil hier die in Nr. 24, 25 der Preisschrift dargelegte Methode der unendlichen Produktbildung nur für unendlich vielseitige Spitzenpolygone unmittelbar anwendbar ist (Prinzip der Gruppenausschöpfung). Man gelangt aber vom vorgelegten endlich viel-

seitigen Spitzenpolygon sofort zu einem unendlich-vielseitigen, wenn man dieses Polygon einem unendlichen Spiegelungsprozeß unterwirft, bei dem immer zwei feste Seiten des Polygons mit ihren Wiederholungen als Spiegelseiten dienen.

42a. Eine hyperelliptische Raumform heißt symmetrisch, wenn sie außer der ihr von Hause aus zukommenden direkten involutorischen Bewegung mit der maximalen Zahl $2p+2$ der Drehpunkte auch noch eine involutorische Bewegung zweiter Art zuläßt. Indem wir für die hyperelliptische Raumform das Konformmodell der zweiblättrigen RIEMANNschen Fläche mit $2p+2$ Windungspunkten zugrunde legen, wo jede überhaupt mögliche Internbewegung durch eine lineare Transformation erster oder zweiter Art dargestellt wird, bemerken wir, daß der besondere Charakter der Symmetrie darin zum Ausdruck kommt, daß die Fläche eine solche involutorische Transformation gestattet, die in der Grundebene (z-Ebene) entweder durch eine Spiegelung an einem Kreise (erster Fall, Spiegelfall) dargestellt wird oder aber durch eine Diametralzuordnung auf der Grundkugel (zweiter Fall, Diametralfall), die wir in diesem Falle an Stelle der z-Ebene vermöge stereographischer Projektion treten lassen. Im letzteren Falle muß dann die halbe Anzahl der Windungspunkte gerade sein, also p ungerade, damit die Diametralzuordnung auf der der Kugel übergelagert gedachten zweiblättrigen hyperelliptischen Fläche involutorisch wird. Wenn nämlich die halbe Anzahl der Windungspunkte ungerade ist, führt die Diametralzuordnung der Grundkugel zu einer Transformation der Periode 4 auf der RIEMANNschen Fläche (vgl. S. 399). Im übrigen bemerken wir, daß man auf gegebener symmetrischer RIEMANNscher Fläche noch auf zwei verschiedene Weisen die einzelne zulässige Spiegelung oder Diametralzuordnung der Grundebene erklären kann, die durch eine Blättervertauschung auseinander hervorgehen (assoziierte Symmetriecharaktere).

Im ersten Falle (Spiegelfall) können wir annehmen, daß die Spiegellinie mit der Achse des Reellen zusammenfällt. Liegen dann sämtliche Windungspunkte auf der Achse des Reellen (erster orthosymmetrischer Unterfall), so treten offenbar $p+1$ geschlossene Symmetrielinien über der Achse des Reellen auf. Ein Elementaraufbau dieses Typus wird erhalten, indem man die Fläche längs den Symmetrielinien aufschneidet, wodurch sie zunächst in zwei kongruente Blätter zerfällt, die nun ihrerseits koinzidierend weiter in α-Elemente (Doppelsechsecke) zerlegt werden durch Rückkehrgeraden, deren jede einzelne in einem Blatt verläuft, dabei die Achse des Reellen zweimal schneidend und in bezug auf diese zu sich selbst symmetrisch. Damit ist der synthetische Elementaraufbau dieses orthosymmetrischen Typus vollendet. Wir bemerken, daß wir in diesem Falle auch ein natürliches Elementarmodell gewinnen können, das in der ζ-Ebene liegend zu denken ist. Es wird von vier koinzidierenden $(2p+2)$-ecken mit Orthogonalbogenbegrenzung und lauter rechten Winkeln gebildet. Zwei dieser Exemplare werden zunächst längs den in Fig. 46 gekennzeichneten Linien faltenbildend verbunden (Doppel-$(2p+2)$-eck). Aus den beiden anderen Exemplaren wird eine zweite koinzidierende Faltfläche hergestellt und diese mit der ersten nunmehr längs jeder ihrer $p+1$ Randlinien überkreuz verbunden. Man kann das so gewonnene

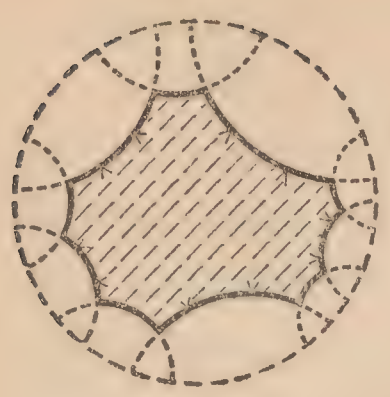


Fig. 46.

natürliche Elementarmodell auch so beschreiben: Ein $(2p+2)$-eck der ζ-Ebene, wie oben, wird durch Hinzunahme der Rückseite als eine geschlossene Fläche vom Geschlecht o aufgefaßt, und nunmehr wird über dieser Fläche die relativ zweiblättrige Fläche mit den Eckpunkten als Windungspunkten gebildet. Auch die beidseitig genommene volle Oberfläche jenes Doppel-$(2p+2)$-ecks ist ein nat. El. Modell.

Die anderen Unterfälle des Spiegelfalles, wo nunmehr stets spiegelbildlich symmetrisch gepaarte Windungspunkte der hyperelliptischen Fläche auftreten, sind, abgesehen von dem nachträglich zu erwähnenden zweiten orthosymmetrischen Typus, sämtlich diasymmetrische Fälle, d. h. Fälle, wo die Fläche durch die vorhandenen Symmetrielinien nicht zerlegt wird. Die mannigfaltigen möglichen diasymmetrischen Fälle bestimmen sich offenbar in absteigender Reihe durch die Anzahl (p bis o) der Symmetrielinien. In allen diesen Fällen übersehen wir leicht, wie wir zu einem Elementaraufbau kommen, wenn wir die betreffende hyperelliptische Fläche durch Aufschneidung längs der vorhandenen Symmetrielinien und weiteren zu normierenden Verbindungsrückkehrschnitten zwischen den spiegelbildlich gepaarten Windungspunkten in zwei kongruente schlichte Blätter verwandeln, deren Gestalt durch die Figuren 40, 39, 38 ($p = 3$) veranschaulicht wird. Entsprechend dem einzelnen Halbblatt (etwa oberhalb der Achse des Reellen) der Riemannschen Fläche ergibt sich in der ζ-Ebene ein $(2p+2)$-eck mit lauter rechten Winkeln. Wir können nun wieder, wie vorher, vier dieser $(2p+2)$-ecke zunächst zu je zweien verbinden, wobei zwei Doppel-$(2p+2)$-ecke entstehen. Nunmehr hat man den Symmetrielinien entsprechend zwischen diesen beiden Doppelflächen Überkreuzverheftung vorzunehmen, wo hingegen entsprechend jedem Verbindungsrückkehrschnitt zwischen konjugierten Windungspunkten eine ideale Zuordnung zwischen den beiden entsprechenden koinzidierenden Randlinien der Doppel-$(2p+2)$-ecke vorzunehmen ist, deren Prinzip aus Fig. 47 ersichtlich ist, wo zum Zwecke der Veranschaulichung die betreffenden zur Verbindung zu bringenden Randinien wenig auseinander geweitet sind, sodaß die eine Randlinie ganz innerhalb der anderen erscheint.

Fig. 47.

Wie wir schon andeuteten, bleibt, dem Spiegelfalle entsprechend, noch ein zweiter orthosymmetrischer Typus namhaft zu machen. Dieser tritt ein, wenn kein Windungspunkt auf der Achse des Reellen liegt, wenn außerdem die Spiegelung der Fläche in sich in der Weise erfolgt, daß über der Achse des Reellen kein Blätteraustausch stattfindet. Die Modellfläche wird jetzt genau so gebildet, wie beim Spiegeltypus im Falle des völligen Fehlens von Symmetrielinien; nur ist eben die Auffassung der internen Spiegelung in den beiden Fällen eine andere. Wir haben assoziierte Symmetriecharaktere auf einer und derselben Fläche.

Besonders zu erledigen ist jetzt noch der zweite Fall (Diametralfall), wo der symmetrische Charakter der Fläche durch die Diametralzuordnung bewirkt wird. Wir denken uns dann die Fläche direkt über der Kugelfläche

als Grundfläche ausgebreitet und nehmen die Diametralzuordnung in der gewöhnlichen Weise an, nämlich als durch Geraden durch das Kugelzentrum vermittelt.

Die erste Bemerkung, die wir hier zu machen haben, ist die, daß das Geschlecht der hyperelliptischen Fläche jetzt ungerade sein muß (p ungerade). Denn nur dann liefert die Diametralzuordnung bei einer hyperelliptischen Fläche wirklich eine involutorische Transformation, während sie bei geradem p eine Transformation der Periode 4 liefert, wie man auch die Blätterwahl bei der Paarung treffen möge. Man erkennt dies, wenn man die Diametralzuordnung längs eines Hauptkreises der Kugel verfolgt, dem bei geradem p auf der RIEMANNschen Fläche ein Doppelkreis entspricht.

Indem wir nunmehr p ungerade annehmen, wie es sein muß, können wir die RIEMANNsche Fläche in folgender Weise topologisch zerlegen. Wir ziehen über einem Hauptkreise der Grundkugel, der keine Windungsstelle trifft, die beiden Kreise auf der RIEMANNschen Fläche. Dadurch ist die Fläche in zwei diametral zugeordnete Hälften zerlegt. Die eine der beiden Hälften wird nun durch $\frac{p+1}{2}$ Verbindungsrückkehrschnitte zwischen ihren irgendwie gepaarten Windungspunkten in zwei schlichte Blätter zerlegt, entsprechend die andere Hälfte. Die ganze Fläche erscheint jetzt in vier Halbblätter zerlegt, die nun ihrerseits wieder in dreifach zusammenhängende Elemente zerlegt werden, unter Wahrung der bestehenden Korrespondenzen vermöge Koinzidenz bzw. Diametralzuordnung. Die Zerlegung wird nun normiert, was keine wesentliche Änderung der schematisch topologischen Verhältnisse herbeiführt. (— Der Hauptkreis wird natürlich nach der Normierung im allgemeinen sich nicht wieder als Hauptkreis darstellen —). Es ist jetzt klar, wie der Aufbau aus Doppelsechsecken zu erfolgen hat.

Man könnte geneigt sein zu glauben, daß unser betrachteter Diametralfall zu zwei wesentlich verschiedenen Kontinuen Anlaß gibt, insofern als man ja die Diametralzuordnung noch durch einen Blätteraustausch ändern kann (assoziierte Symmetriecharaktere). Tatsächlich entstehen auf diese Weise bei festgehaltenen Windungspunkten zwei verschiedene diasymmetrische Charaktere. Besonders sinnfällig wird der Unterschied zwischen beiden, wenn wir uns die beiden Möglichkeiten hinsichtlich ihrer Darstellung längs eines Hauptkreises klar machen, wo nämlich im einen Falle die übergelagerten Kreise vertauscht werden, im andern Falle einzeln in sich übergehen. Trotzdem haben wir es nur mit einem Kontinuum zu tun, weil nämlich die eben besprochene Sachlage bei einer und derselben RIEMANNschen Fläche sich sofort ändert, wenn man den Hauptkreis unter Festhaltung der RIEMANNschen Fläche bewegt, bis er gerade ein Paar von Windungspunkten überstrichen hat. War vorher Austausch da, so liegt jetzt Erhaltung vor und umgekehrt.

Unser Resultat können wir dahin zusammenfassen: Daß es für alle geraden $p \geqq 2$ zwei Kontinuen von Flächen des orthosymmetrischen Typus gibt, weiter p Kontinuen des diasymmetrischen Typus, zu denen schließlich

bei ungeradem p noch ein neues Kontinuum (Diametralfall) hinzukommt. Jedes solche Kontinuum hyperelliptischer Flächen (Konformmodelle) hängt von $2p-1$ wesentlichen Konstanten ab, was die Hälfte der Konstantenzahl der allgemeinen hyperelliptischen Fläche vom Geschlecht p ist. Diese Konstantenzahl ergibt sich auch stets als Anzahl der elementaren Aufbauinvarianten bei jedem der genannten Typen.

42b. Während für die aufgeführten orthosymmetrischen Typen hyperelliptischer Raumformen sowie für die diasymmetrischen Typen mit mindestens einer Symmetrielinie der besondere Charakter des einzelnen Typus auch in abstracto, d. i. unabhängig von der besonderen Darstellung, sofort gekennzeichnet erscheint, nämlich durch die Zahl der Symmetrielinien in Verbindung mit der Unterscheidung — »diasymmetrisch« oder »orthosymmetrisch« —, soweit diese Zahlen nach dem Vorstehenden mit dem letzteren Merkmal verträglich sind, ist für die diasymmetrischen Typen ohne Symmetrielinien eine abstrakte Charakterisierung nur für den Fall eines geraden p unmittelbar möglich, eben die Angabe des Fehlens von Symmetrielinien. Hingegen bei ungeradem p treten, wie wir sahen, zwei wesentlich verschiedene diasymmetrische hyperelliptische Typen ohne Symmetrielinien auf. Wir bemerken nun in der Darstellung durch die Riemannsche Fläche folgenden Umstand: Bei dem ersten diasymmetrischen Typus, ohne Symmetrielinie (Spiegelfall), bewirkt die charakteristische direkte involutorische Grundbewegung eine solche Zuordnung der durch die Symmetrie geschaffenen Punktpaare, bei welcher außer $p+1$ isolierten Fixpaaren noch eine ganze »Linie« weiterer Fixpaare entsteht; im anderen Falle (Diametralfall) ergeben sich nur $p+1$ isolierte Fixpaare. Die isolierten Fixpaare werden von den Windungspunkten der Riemannschen Fläche, die im ersten Falle auftretende Linie von Fixpaaren von den Punkten der Achse des Reellen geliefert.

Die von den genannten Punktepaaren gebildete Raumform ist in beiden Fällen eine geschlossene einseitige Raumform vom Geschlecht $p+1$; sie kann im Spiegelfalle durch ein Konformmodell repräsentiert werden, das man erhält, wenn man die obere Hälfte der zweiblättrigen Riemannschen Fläche nimmt und längs der Achse des Reellen übereinanderliegende Punkte zur Verheftung bringt, wodurch eine Falte entsteht (Fig. 48). Im Diametralfalle

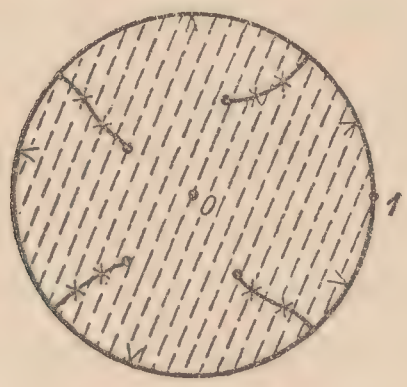


Fig. 48a. $(B, 4, 0)$, hyperelliptisch. Spiegeltyp. Nat. Konf. Mod.

Fig. 48b. $(B, 4, 0)$, hyperelliptisch. Diametraltyp. Nat. Konf. Mod. 2 assoziierte Flächen.

(p ungerade) ergibt sich ein natürliches Konformmodell, wenn man die betreffende über der Einheitskugel ausgebreitet gedachte Riemannsche Fläche durch Zentralprojektion auf die elliptische Ebene abbildet. Man erhält dadurch

eine relativ zur elliptischen Ebene zweiblättrige RIEMANNSche Fläche mit $p+1$ Windungspunkten, welche Anzahl, wie gesagt, gerade ist. Diese Fläche hat im Unendlichen der elliptischen Ebene entweder ein zweiseitiges, dem unendlich fernen schlichten MOEBIUS-Band der elliptischen Ebene (Grundband) übergelagertes Band oder zwei mit dem Grundband identische getrennte MOEBIUS-Bänder. Die beiden hierin bei festgehaltenen relativen Windungspunkten gegebenen Möglichkeiten der Bildung einer zweiblättrigen Relativfläche über der elliptischen Ebene mit $p+1$ (gerade Zahl) Windungspunkten liefern alle solchen zweiblättrigen Relativflächen (assoziierte einseitige hyperelliptische Flächen). Es ist jedoch zu bemerken, daß eine Bewegung der elliptischen Ebene in sich, bei der einer der Windungspunkte die unendlich ferne MOEBIUS-Linie überschreitet, bewirkt, daß die beiden möglichen Unendlichcharaktere sich austauschen, so daß doch die erwähnten Flächen über der elliptischen Ebene nur ein Kontinuum bilden.

Wir formulieren noch besonders das Ergebnis:

Den assoziierten Symmetriecharakteren einer und derselben diasymmetrischen zweiseitigen hyperelliptischen Raumform ohne Symmetrielinien vom Diametraltypus (p daher ungerade) entsprechen durch die symmetrische Paarung entstehende einseitige hyperelliptische Raumformen, die durch assoziierte einseitige RIEMANNSche Flächen über der elliptischen Ebene mit denselben $p+1$ Relativwindungspunkten dargestellt werden. Dieselben sind im allgemeinen nicht eineindeutig konform auf einander abbildbar (kongruent).

42 c. Eine einseitige geschlossene Raumform R vom Geschlecht $p \geqq 3$ werde jetzt abstrakt als eine **einseitige hyperelliptische Raumform** bezeichnet, wenn ihre zugehörige $\tilde{R}$ eine hyperelliptische Raumform ist, (was für die $(B, 3, 0)$ immer der Fall ist). Die $\tilde{R}$ wird dann eine diasymmetrische hyperelliptische Raumform vom Geschlecht $p-1$. Es kommen daher nur die von uns gefundenen Typen in Frage, und wir sehen, daß es für ungerades p nur einen Typus gibt, dargestellt durch das natürliche Konformmodell 48a, für gerades p hingegen zwei Typen, dargestellt durch die Konformmodelle 48a und 48b. Beide Typen gestatten eine typische Grundbewegung (Blättervertauschung). Während aber beim ersten Typus außer den p Drehpunkten noch eine Spiegellinie auftritt, fällt diese beim zweiten Typus weg. Beidemal überträgt sich die Grundbewegung auf die zugehörende $\tilde{R}$ in deren Grundbewegung mit nunmehr $2p$ Fixpunkten.

Anmerkung: Man kann die Frage aufwerfen, ob es auch eine relativ zweiblättrige RIEMANNSche Fläche über der elliptischen Ebene mit ungerader Anzahl der Windungspunkte gibt. Das ist jedoch nicht der Fall. Denn die Übertragung auf die Kugel durch Zentralprojektion würde dort eine diasymmetrische zweiseitige Fläche von geradem Geschlecht ergeben, was, wie wir sahen, nicht möglich ist.

Anmerkung betreffend die elliptische diametralsymmetrische Raumform: Die einseitigen Raumformen $p=2$ bilden, wie wir wissen, ein einziges Kontinuum im Gegensatz zu den Fällen $p=4, 6, 8, \cdots$ einseitiger hyperelliptischer Raumformen, wo wir zwei wesentlich verschiedene Kon-

tinuen fanden, dargestellt durch besondere natürliche Konformmodelle. Beide Konformmodelle haben nun offenbar auch im Falle $p = 2$ ihr Analogon. Das hierdurch entstehende Paradoxon klärt sich dadurch auf, daß in diesem Falle jedes Konformmodell der einen Art einem Konformmodell der anderen Art äquivalent ist, was bei $p = 4, 6, 8, \cdots$ niemals eintritt. Hat man nämlich eine zweiblättrige spiegeldiasymmetrische Riemannsche Fläche $p = 1$ ohne Symmetrielinien in der Blätterzerlegung gemäß Fig. 49, so ist die betreffende

Fig. 49.

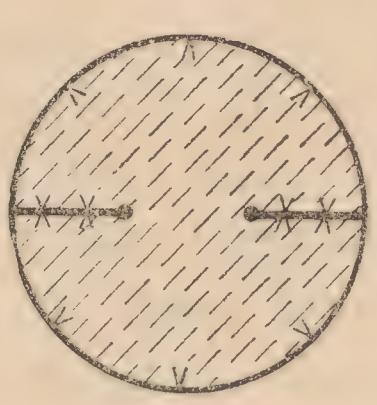


Fig. 49a.

Fig. 49b.

Spiegelung gleichbedeutend mit einer involutorischen Gleitspiegelung längs den gekennzeichneten Verzweigungsrückkehrschnitten. Die etwa blätterer-haltend angenommene Diametralzuordnung andererseits ist gleichbedeutend mit der involutorischen Gleitspiegelung längs den beiden vertikalen Geraden. Es bedarf also nur einer internen Grundbewegung der Riemannschen Fläche »parallel« (absolut verstanden) der Achse des Reellen um eine Strecke, deren Länge ein Viertel der Länge der Achse des Reellen beträgt (Viertelperiode), um die beiden Symmetriecharaktere ineinander überzuführen, womit dann auch die Abbildung der Modellfläche $(B, 2, 0)$ (Fig. 49a) auf eine Modellfläche gemäß Fig. 49b über der elliptischen Ebene gewonnen wird.

Unsere einseitigen Modellflächen $(B, 2, 0)$ können nur dann äquivalent sein, wenn sie durch lineare Transformation des Einheitskreises in sich bzw. durch Bewegung der elliptischen Ebene in sich ineinander übergeführt werden können. Dazu kommen jedoch noch die Scharen der Internbewegungen. Andererseits gilt beim Geschlecht $p \geqq 3$ der Satz, daß hier unsere Modellflächen der einseitigen hyperelliptischen Raumformen nur durch lineare Transformation bzw. Bewegung der elliptischen Ebene eineindeutig konform aufeinander bzw. auf sich selbst bezogen werden können. Insbesondere kann eine Fläche des Typus der Fig. 48a niemals einer Fläche des Typus der Fig. 48b konform äquivalent (kongruent) sein.

Die Beweise dieser Bemerkungen ergeben sich aus der Beziehung unserer Modellflächen zu den zweiseitigen hyperelliptischen Flächen. In der Tat gehört zu jeder solchen Modellfläche M eine zweiseitige $\widetilde{M}$ vom Geschlecht $p - 1$, deren direkte Darstellung durch eine hyperelliptische Riemannsche Fläche unmittelbar vom Modell aus durch Spiegelung am Einheitskreise bzw. durch Zentralprojektion der elliptischen Ebene auf die Kugel gewonnen wird.

VII. Die offenen hyperbolischen Raumformen endlicher Zusammenhangsordnung (≥ 3) mit besonderer Berücksichtigung der vier dreifach zusammenhängenden Typen.

43. Indem wir dazu übergehen, nunmehr die Synthese **der offenen Raumformen** zu entwickeln, wollen wir die Betrachtung zuvörderst auf diejenigen offenen Raumformen beschränken, die von **endlicher Zusammenhangsordnung**, und zwar **mindestens dreifach** zusammenhängend sind, und außerdem **nur hyperbolische Öffnungen** aufweisen. Die Raumform kann dabei **zweiseitig oder einseitig** sein.

Die erste Frage, die wir hier aufwerfen werden, ist die nach dem etwaigen Vorkommen parabolischer Substitutionen in der zugehörenden Fundamentalgruppe. Nehmen wir an, daß es eine solche Substitution gäbe, so hätten wir in der Raumform R einen geschlossenen Weg W, längs welchem die Uniformisierende ζ die betreffende Substitution erfährt. Dieser geschlossene Weg würde sich nun in der ζ-Ebene durch Vermittelung eines Zweiges und seiner längs W zu erhaltenden Fortsetzungen auf eine Linie abbilden, die nach beiden Seiten sich asymptotisch dem Fixpunkt nähert. Diese Linie erscheint daher entsprechend den einzelnen Zweigen in Stücke zerlegt, die aus einem derselben durch die Substitution und ihre Wiederholungen hervorgehen. In der ζ-Ebene kann man jetzt ohne weiteres eine, die Zerlegung in äquivalente Stücke beibehaltende Deformation vornehmen, durch welche der betrachtete Bildweg in einen Bahnkreis übergeführt wird; und dieser Bahnkreis kann seinerseits auf den Fixpunkt selbst zusammengezogen werden, wobei die absolute Länge des entsprechenden deformierten geschlossenen Weges W gegen null geht. Da W aber nicht homotop null ist, eben weil ζ längs ihm eine von der Identität verschiedene Substitution erfährt, muß dieser Deformationsprozeß den Weg W notwendig gleichmäßig aus jedem Näherungsbereich der Raumform hinausführen. In der Tat würde ja ein Drinbleiben auch nur eines Punktes wegen der sich allmählich einstellenden unendlich kleinen Länge bedingen, daß der Weg W während der Deformation homotop null würde. Verflüchtigt sich andererseits der Weg W bei der Deformation schließlich gleichmäßig in eine Öffnung, so muß er, weil er nicht homotop null ist, der einfachen oder mehrfachen Durchlaufung einer Öffnungslinie homotop sein, worunter wir eine Linie verstanden, welche von der Raumform nach außen ein zweifach zusammenhängendes Stück abgrenzt. (Öffnungstück.) Längs einer Öffnungslinie erfährt aber ζ nach dem Begriff der hyperbolischen Öffnung eine hyperbolische Substitution. Das ist ein Widerspruch, aus dem wir schließen, daß die Fundamentalgruppe einer endlich-vielfach zusammenhängenden einseitigen oder zweiseitigen Raumform mit lauter hyperbolischen Öffnungen nur hyperbolische Substitutionen eventuell nebst Gleitspiegelungen enthalten kann.

Nunmehr denken wir uns die Raumform in folgender Weise zerlegt. Wir ziehen zunächst jeder Öffnung der Raumform entsprechend eine Öffnungslinie in der Weise, daß diese Linien sich gegenseitig nicht treffen, vielmehr eine Zerlegung der Raumform (A, p, q) bzw. (B, p, q) in q Außenteile (Öff-

Fig. 50. Öffnungselement.

nungsstücke) und ein inneres Stück mit der topologischen Signatur der Raumform selbst bewirken. Den Innenteil zerlegen wir nun weiter in α-Elemente, wobei offenbar q α-Elemente mehr gebraucht werden als bei der geschlossenen Raumform (A, p, o) bzw. (B, p, o). Die Zahl der α-Elemente ist daher $2p+q-2=\mathfrak{c}$ bei zweiseitigen, hingegen $p+q-2=\mathfrak{c}$ bei einseitigen Raumformen. Nunmehr wird die Überlagerungsfläche der Raumform gebildet aus den Überlagerungsflächen der einzelnen α-Elemente und der Öffnungselemente. Man bemerkt dann, daß die von uns für die geschlossenen Raumformen durchgeführte Überlegung ohne irgendein neues erschwerendes Moment auch jetzt in Kraft tritt. Die Ersetzung der gezogenen Einteilungslinien durch die mit ihnen homotopen Rückkehrgeraden führt zu einer nach demselben topologischen Schema vor sich gehenden Zerlegung der Raumform in normierte Elemente, nämlich $2p+q-2$ bzw. $p+q-2$ Doppelsechsecke und q zweifach zusammenhängende normierte Öffnungselemente, wie Fig. 50).

Der Aufbau der allgemeinsten Raumform ist danach ebenfalls klar. Man hat etwa zunächst die Längen der Rückkehrgeraden zu geben, weiter die Kompositionsinvarianten (Markenabstände bzw. relative Markenabstände) längs allen Rückkehrgeraden, mit Ausnahme der q Öffnungslinien, wo ja für das Einsetzen des Öffnungselements eine rotierende Verschiebung desselben in sich bedeutungslos ist.

Um die Mannigfaltigkeiten (A, p, q) schlichtartig zu machen, kann man zunächst p Rückkehrschnitte ziehen, die die Mannigfaltigkeit nicht zerfällen. Dadurch ist ihr Zusammenhang $2p+q$ geworden und sie selbst schlichtartig. Es ist dann $2p+q-3$ die Anzahl der Linien, die man zur Zerlegung dieser schlichtartigen Fläche in α-Elemente gebraucht; also ist $3p+q-3$ die Anzahl der geschlossenen Linien, die bei der Zerlegung der (A, p, q) in α-Elemente benötigt wird. Jetzt ist die (A, p, q) unter Weglassung der Öffnungslinien in α-Elemente zerlegt. Folglich wird die Gesamtzerlegung durch $3p+q-3$ innere Rückkehrlinien und q Öffnungslinien bewirkt. Im ganzen finden sich somit $3p+2q-3$ Längeninvarianten (Längen der gezogenen Rückkehrlinien) und weiter $3p+q-3$ Kompositionsinvarianten (numerische Invarianten), zusammen $3(2p+q-2)=3\mathfrak{c}$ Invarianten.

Liegt eine einseitige Raumform (B, p, q) vor, so können wir sie z. B. durch p einufrige Rückkehrschnitte schlichtartig machen, wobei sie dann $(p+q)$-fach zusammenhängend wird. Es werden dann weitere $p+q-3$ Linien benötigt zur Zerlegung der schlichtartigen Fläche in dreifach zusammenhängende Elemente. Also finden wir eine Einteilung der Mannigfaltigkeit in α-Elemente mit Hilfe von $2p+q-3$ Linien. Dazu treten q Öffnungslinien. Wir haben somit im ganzen $2p+2q-3$ Längeninvarianten. Zu diesen kommen nun die Kompositionsinvarianten, zu welchen die p einufrigen Rückkehrschnitte und die q Öffnungslinien keinen Beitrag liefern. Danach haben wir $p+q-3$ Kompositionsinvarianten. Im ganzen finden sich $3(p+q-2)=3\mathfrak{c}$ Invarianten.

Dieselbe Anzahl ergibt sich bei Zugrundelegung eines beliebigen anderen Zerlegungsschemas, das eine Zerlegung der Mannigfaltigkeit in dreifach zusammenhängende Bereiche bewirkt. Man kann diesen Zerlegungsvorgang immer in der Weise vornehmen, daß man zuerst eine Aufschneidung in eine schlichtartige Mannigfaltigkeit vornimmt, wozu $p' + 2p'' = p$ Rückkehrschnitte (vgl. Nr. 3 der ersten Mitteilung) erforderlich sind.

Die Zahl $2p + q - 2$ bzw. $p + q - 2$ einer Mannigfaltigkeit endlicher Zusammenhangsordnung heißt die charakteristische Zahl der Mannigfaltigkeit und wird mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Sie ist gleich der Anzahl der dreifach zusammenhängenden Gebiete, in welche man die Mannigfaltigkeit zerlegen kann. Diese Bemerkung gilt auch, wenn die Mannigfaltigkeit geschlossen ist, wo dann $q = 0$ zu setzen ist. Vermehrt man die charakteristische Zahl um eine Einheit, so ergibt sich für offene Mannigfaltigkeiten die wohlbestimmte Anzahl der Querschnitte, die erforderlich sind, um die Mannigfaltigkeit einfach zusammenhängend zu machen, so daß dann $\mathfrak{c} + 2$ die Ordnung des Zusammenhanges (Zusammenhangszahl) ist; vgl. S. 387.

Als bisheriges Gesamtresultat für den Aufbau findet sich also, daß für jede geschlossene zweiseitige oder einseitige hyperbolische Raumform sowie für jede offene Raumform endlicher Zusammenhangsordnung $\geqq 3$, d. h. $\mathfrak{c} \geqq 1$ mit lauter hyperbolischen Öffnungen die Anzahl der Aufbauinvarianten gleich $3\mathfrak{c}$ ist.

44. Die vorstehenden allgemeinen Betrachtungen mögen für den Fall $\mathfrak{c} = 1$, d. h. für die **dreifach zusammenhängenden offenen Raumformen** durch weitere Betrachtungen fortgesetzt werden. Wir setzen dabei jetzt wieder voraus, daß **nur hyperbolische Öffnungen** vorkommen sollen. Zu betrachten sind vier wesentlich verschiedene topologische Typen, nämlich **(*A*, 0, 3)**,

Fig. 51a. (*A*, 0, 3.) Top. Mod.

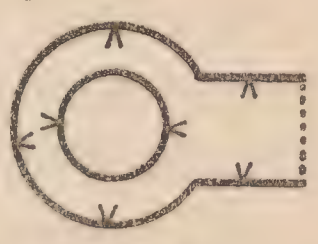


Fig. 51b. (*A*, 1, 1.) Top. Mod.

Fig. 51c. (*B*, 1, 2.) Top. Mod.

Fig. 51d. (*B*, 2, 1.) Top. Mod.

(*A*, 1, 1), **(*B*, 1, 2)**, **(*B*, 2, 1)**, die durch die nebenstehenden Figuren 51a bis 51d topologisch erläutert werden.

Im Falle **(*A*, 0, 3)**, d. i. im Falle der schlichtartigen dreifach zusammenhängenden Raumform mit **lauter hyperbolischen Öffnungen**, führt unsere Zerlegung ohne weiteres zu einem völlig bestimmten Elementarmodell in Gestalt der Fläche Fig. 51a, 1, die zugleich die Zerlegung in den Innenteil (Doppelsechseck) und der drei Außenteile (Öffnungsstücke) zeigt.

Neben diesem Elementarmodell ist von Interesse die Aufstellung eines Konformmodells. Ein solches erhalten wir, wenn wir die schraffierte obere Seite des Elementarmodells mittels eines unendlichen Produktes[1] auf die Fläche des Einheitskreises abbilden, wodurch dann die ganze Doppelfläche in eine

[1] Vgl. die Betrachtung Nummer 24 meiner Preisschrift Acta math., Bd. 50.

kreisförmige Doppelfläche übergeht, wie Fig. 51a, 2 darstellt. Zwei Kreisflächen (Einheitskreis) sind längs des Einheitskreises eine Falte bildend verheftet, und diese Falte selbst ist längs drei getrennten endlichen Stücken wieder aufgeschlitzt. Die so entstehende Berandung wird als der Fläche nicht angehörend

Fig. 51a, 1.
$(A, o, 3)$, 3 hyp. Öffn.
Nat. El. Mod.

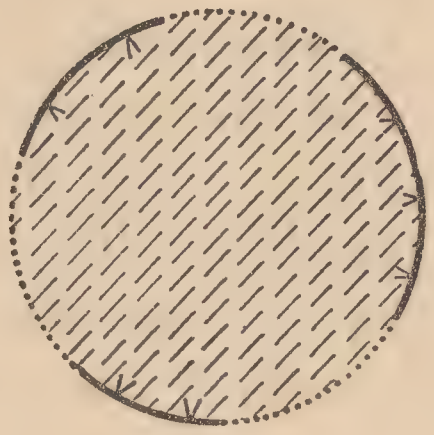


Fig. 51a, 2.
$(A, o, 3)$, 3 hyp. Öffn.
Nat. Konf. Mod.

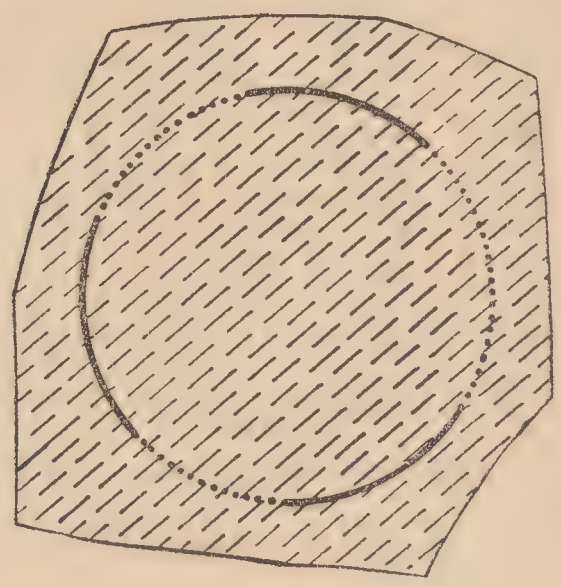


Fig. 51a, 3.
$(A, o, 3)$, 3 hyp. Öffn.
Nat. Konf. Mod.

betrachtet. An Stelle dieser Fläche tritt sofort, wenn man das untere Blatt am Einheitskreis spiegelt, die längs drei Intervallen des Einheitskreises aufgeschlitzte Vollebene (Fig. 51a, 3).

Die letztere Modellfläche ist ebenso wie die erstere, abgesehen von linearen Transformationen, die den Einheitskreis in sich transformieren, völlig bestimmt. Wir können diesen Sachverhalt z. B. dadurch erschließen, daß wir zunächst unter Heranziehung der Theorie der Ränderzuordnung den Nachweis der Regularität der Abbildungsfunktion auch längs den begrenzenden Schlitzen feststellen, die dabei als geschlossene Randlinien aufzufassen sind und einzeln durch die Anwendung einer Fundamentaltransformation (Wurzeltransformation) sofort in Kreise verwandelt werden können. Ist so die Regularität festgestellt, so erweitert sich nunmehr die Abbildung zu einer Abbildungsbeziehung zweier hyperelliptischer Riemannschen Flächen mit sechs Windungspunkten aufeinander. Eine solche kann, wie wir sahen, nur durch eine lineare Transformation vermittelt werden, die natürlich auch zweiter Art sein kann.

Eine andere instruktive, in diesen Zusammenhang hineinpassende Schlußweise ist die folgende. Man kann zunächst jede Fläche der Art Fig. 51a, 3, durch ein Iterationsverfahren uniformisieren. Auf Grund dieser Uniformisierung führen wir für jeden der beiden Schlitzbereiche die normierte Zerlegung in ein α-Element und drei Öffnungselemente durch. Die Kurven, welche diese Zerlegung bewirken, müssen dann in bezug auf den Einheitskreis symmetrisch ausfallen, weil sonst offenbar vermöge der Symmetrie des Schlitzbereiches bezüglich des Einheitskreises sofort eine zweite absolute Zerlegung gewonnen würde, die von der ersten verschieden wäre, was doch unmöglich ist, weil die normierten Öffnungslinien eindeutig bestimmt sind. Nachdem dies festgestellt ist, ergibt sich weiter, daß auch die Einzeichnung der normierten Querschnitte q in die gewonnenen symmetrischen Elemente symmetrisch ausfallen muß, aus demselben Grunde, nämlich wegen der eindeutigen Bestimmtheit dieser Querschnitte. Die in Rede stehenden Querschnitte stellen sich daher

ganz als Teilbögen des Einheitskreises dar. Nun müssen die beiden normierten Liniensysteme notwendig bei jeder Abbildung der beiden Schlitzbereiche aufeinander ihrerseits ineinander übergehen. Das bedeutet, daß die Peripherie des Einheitskreises bei der Abbildung in die Peripherie des Einheitskreises übergehen muß, daß infolgedessen das Innere des Einheitskreises eineindeutig auf das Innere oder das Äußere des Einheitskreises abgebildet wird; was nur durch lineare Funktionen möglich ist.

Die im vorstehenden gewonnenen beiden Konformmodelle des Typus $(A, 0, 3)$ können umgekehrt gegeben werden. Zwei solche Konformmodelle sind dabei nach den vorstehenden Entwicklungen dann und nur dann äquivalent, wenn sie durch lineare Transformation ineinander übergeführt werden. Insbesondere ergibt sich, daß eine konforme, also auch kongruente Bewegung einer solchen Modellfläche in sich nur durch lineare Transformationen vermittelt werden kann, die dabei erster oder zweiter Art sein können. Hieraus findet sich, daß es nur eine typische Internbewegung einer solchen Fläche in sich gibt, die sich bei dem Konformmodell Fig. 51 a, 2 als Blättervertauschung der Faltfläche und beim Konformmodell Fig. 51 a, 3 als Spiegelung am Einheitskreis darstellt.

Wir haben noch zu fragen nach der Gewinnung der Größe ζ bzw. der Größe $d\sigma$ des absoluten Linienelements für ein gegebenes Konformmodell des Typus Fig. 51 a, 2 oder Fig. 51 a, 3.

Offenbar gelingt dies für die Faltfläche durch eine einzige schon erwähnte Iterationskette, durch deren Vermittlung die Fläche des Einheitskreises in ein Kreisbogensechseck der Art Fig. 51 a, 1 verwandelt wird, wobei die drei Faltintervalle des Einheitskreises in die Orthogonalkreisbögen zum Einheitskreis übergehen. Die sich ergebende Größe $d\sigma$ hat offenbar in beiden Blättern der Faltfläche denselben Wert; andererseits ist sie im Falle der Fläche Fig. 51 a, 3 bezüglich des Einheitskreises symmetrisch in dem Sinne, daß symmetrische Linienelemente und Linien gleiche absolute Länge erhalten.

45. Wir betrachten weiter die dreifach zusammenhängenden Raumformen des Typus **$(A, 1, 1)$** (Fig. 51, b) **mit hyperbolischer Öffnung**. In diesem Fall können wir ein eindeutig festlegbares Elementarmodell, bei welchem die einzelnen Punkte sämtlich wieder als Einzelpunkte erscheinen, nicht angeben. Wohl aber wird es uns gelingen, in diesem Sinne ein bis auf lineare Transformationen eindeutig bestimmtes Konformmodell herzuleiten. Dieses Konformmodell wird von der zweiblättrig über der Fläche des Einheitskreises ($|z| < 1$) ausgebreiteten RIEMANNschen Fläche mit drei Windungspunkten erster Ordnung gebildet (Fig. 51 b, 3).

Wir zeigen zunächst, daß jede Raumform $(A, 1, 1)$ mit hyperbolischer Öffnung eindeutig konform auf eine solche Fläche übertragen werden kann. Dazu wollen wir uns die Raumform bzw. RIEMANNsche Mannigfaltigkeit zunächst topologisch durch eine solche Fläche repräsentiert denken. Wir führen dann in dieser Fläche drei Querschnitte, wie Fig. 51 b, 3 zeigt, aus, wodurch die Fläche in zwei einfach zusammenhängende Stücke zerlegt wird. Die dabei zur Anwendung gebrachten drei Querschnitte, deren jeder von Rand zu Rand

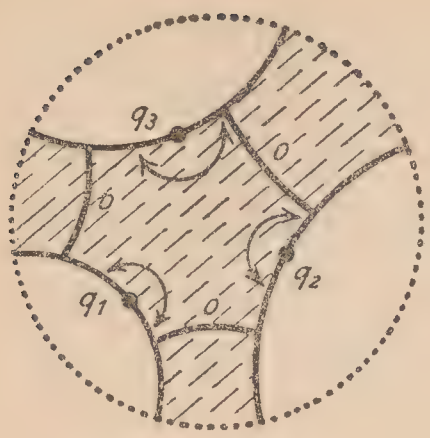


Fig. 51b, 1.

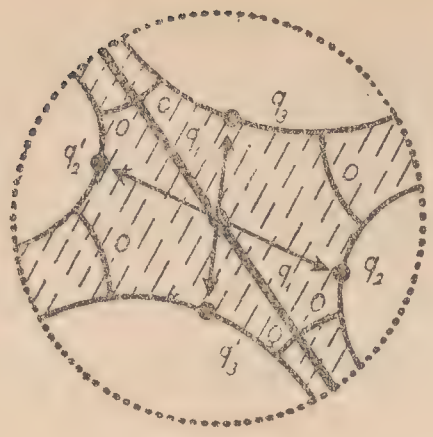


Fig. 51b, 2.
$(A, 1, 1)$, 1 hyp. Öffn.
Id. El.Mod.

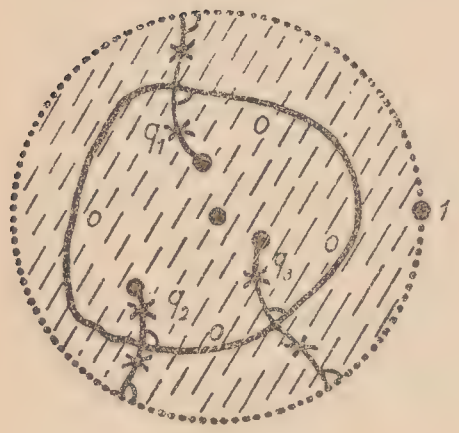


Fig. 51b, 3.
$(A, 1, 1)$, 1 hyp. Öffn.
Nat. Konf. Mod.,
zugleich top. Mod.,
gleichwertig 51b.

geht, sind abstrakt topologisch durch die Eigenschaft wesentlich charakterisiert, daß je zwei derselben die Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln. Sie werden in abstrakto so gewonnen: Zunächst werden nacheinander zwei getrennte Querschnitte hergestellt, welche unsere topologisch zusammenhängende Mannigfaltigkeit einfach zusammenhängend machen. Nachdem dies geschehen ist, zerfällt die Öffnung der Mannigfaltigkeit in vier Öffnungszipfel, die zyklisch geordnet sind. Der dritte Querschnitt muß dann innerhalb der gewonnenen einfach zusammenhängenden Fläche so bestimmt werden, daß er zwei im Zyklus gegenüberliegende Zipfel miteinander verbindet, wobei zwei Möglichkeiten bestehen, je nachdem, welches Paar gegenüber liegender Zipfel zur Verwendung gebracht wird. Eine so hergestellte Aufschneidung kann offenbar auf unendlich viele, topologisch wesentlich verschiedene Weisen geleistet werden, was an der Modellfläche sofort übersehen wird, da man die Windungspunkte ja auf unendlich mannigfaltige Weise mit dem Rand verbinden kann. Diese Arten der Aufschneidung der Modellfläche entsprechen offenbar den mannigfaltigen möglichen analogen Aufschneidungen der zweiblättrigen geschlossenen Riemannschen Fläche ($p = 1$) mit drei endlichen Windungspunkten und dem unendlich fernen Punkt als viertem Windungspunkt, die sich ergeben, wenn man die drei endlichen Windungspunkte mit dem Unendlichpunkte verbindet.

Wir denken uns jetzt weiter die besprochene Aufschneidung der Modellfläche durch die drei Querschnitte q_1, q_2, q_3 durch Einzeichnung einer Öffnungslinie o ergänzt, die jeden der gezogenen Querschnitte zweimal trifft und die Fläche in zwei Sechsecke nebst sechs jetzt nach innen bestimmt abgegrenzt erscheinenden Randzipfeln zerlegt. In Fig. 51 b, 3 wird die Öffnungslinie durch eine doppelt zu durchlaufende Linie dargestellt, die durch beide Blätter der Fläche verläuft. Entsprechend der jetzt gewonnenen Aufschneidung (Zerlegung) der Modellfläche denken wir uns die abzubildende Raumform durch Querschnitte q und eine Öffnungslinie o zerlegt. Wir können dann diese Zerlegung normieren, indem wir zunächst die Linie o durch ihre homotope Rückkehrgerade ersetzen, sodann die Querschnitte q durch normierte Querschnitte ersetzen gemäß dem Prinzip der Orthogonalität, das wir, wie in Nr. 37, zur Anwendung bringen. Jeder der normierten Querschnitte trifft die normierte Linie o in zwei verschiedenen Punkten, und zwar unter rechtem Winkel. Schwierigkeiten hinsichtlich der Durchführung (etwa Kollisionen) entstehen dabei in keiner Weise. Wir bemerken ferner, daß das topologische Zerlegungsschema in der normierten Zerlegung wiederkehrt.

Derjenige Teil der Raumform, der innerhalb der normierten o liegt (Innenteil), erscheint nunmehr in zwei Sechsecke mit lauter rechten Winkeln zer-

legt, die miteinander direkt kongruent sind, weil sie ja längs ihren Querschnittseiten auf der Raumform unmittelbar benachbart liegen. Diese kongruente Beziehung ist von der Art, daß die Querlinien selbst dabei gegenläufig aufeinander bezogen erscheinen, so daß auf jeder Querlinie ein Fixpunkt entsteht. Infolge des involutorischen Charakters dieser Zuordnung auf jeder der Querlinien ergibt sich, wie bei einer analogen Untersuchung in Nr. 41, daß die erwähnte kongruente Beziehung der Sechsecke aufgefaßt werden kann als eine involutorische kongruente Bewegung des Innenteils der Raumform, die in den erwähnten drei Fixpunkten den Charakter einer Wendebewegung besitzt. Diese Bewegung überträgt sich aus leicht erkennbaren Gründen auch auf den zweifach zusammenhängenden Außenteil, der durch die Endstücke der normierten Querstücke in sechs paarweise kongruente Stücke zerlegt wird. Indem wir je zwei durch die gefundene Bewegung gepaarte Punkte als einen »Punkt« erklären, erhalten wir eine RIEMANNsche Mannigfaltigkeit vom Typus $(A, 0, 1)$, bezüglich deren die ursprüngliche Mannigfaltigkeit als eine gewisse zweiblättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit mit drei relativen Windungspunkten erster Ordnung erscheint.

Denken wir uns nunmehr die ursprüngliche Raumform längs den drei Querschnitten aufgeschnitten, wodurch sie in zwei Stücke zerfällt, so ist jedes derartige Stück bei Zuziehung der erwähnten involutorischen Ränderbeziehung ein Repräsentant der erwähnten Raumform $(A, 0, 1)$; und es findet sich als Bild derselben in der ζ-Ebene ein ränderbezogener Bereich, wie Fig. 51, b zeigt. Die Rändersubstitutionen sind elliptische Drehungen der Periode 2. Setzt man dem Bereich 51 b, 1 einen zweiten solchen Bereich durch Ausübung einer der drei elliptischen Randsubstitutionen an, so wird der Drehpunkt der angewandten Substitution Mittelpunkt eines neuen Bereichs, der ein ideales Elementarmodell der ganzen Raumform liefert, die dann längs zwei Querschnitten aufgeschnitten erscheint; (Fig. 51 b, 2). Letztere Figur entspricht einem FRICKEschen »zentrierten Viereck mit lauter hyperbolischen Ecken«.

Auf den Bereich 51 b, 1 von dem man annehmen kann, daß er den Nullpunkt enthält, braucht man nur ein unendliches Produkt zur Anwendung zu bringen, um zur schlichten Fläche des Einheitskreises $(|z| < 1)$ zu gelangen, die jetzt wie in Fig. 51 b, 3 durch drei Einschnitte aufgeschnitten erscheint. Bilden wir die dazugehörige zweiblättrige Fläche mit den Anfangspunkten der Einschnitte als Windungspunkte, so hat man dadurch eine eineindeutige Abbildung der ursprünglichen Raumform auf eine Modellfläche wie Fig. 51 b, 3 tatsächlich gewonnen.

Abgesehen von linearen Transformationen des Innern des z-Einheitskreises in sich, gibt es auch nur ein solches Konformmodell für eine gegebene Raumform $(A, 1, 1)$. Nehmen wir in der Tat das Bestehen einer eineindeutig konformen Abbildung zwischen zwei verschiedenen Modellflächen unserer Art an, so würde sich zunächst ergeben, daß die normierten Öffnungslinien einander entsprechen müssen, daß mithin die beiden dadurch abgegrenzten Öffnungsteile einander entsprechen würden, wobei die Öffnungslinien regulär aufeinander bezogen wären. Führen wir nun die Uniformisierung der Modellflächen mittels je einer Iterationskette durch, so gehen die

erwähnten Öffnungsstücke in Kreisbogenzweiecke über, die als Abwicklungsbilder der Öffnungsstücke zustandekommen. Diese Kreisbogenzweiecke werden je von einem vollständigen orthogonalen Kreisbogen und einem Peripheriekreisbogen begrenzt. Die Beziehung dieser Zweiecke setzt sich nun durch Spiegelung fort und wird dann eine eineindeutige Beziehung der ganzen Fläche des Einheitskreises auf sich, die nur durch eine lineare Transformation vermittelt sein kann. Das bedeutet, daß die erwähnte Beziehung der Kreisbogenzweiecke auch auf den Peripheriebögen regulär ist, und das bedeutet rückwärts, daß die erwähnte Beziehung der Öffnungsstücke auch noch auf dem Einheitskreis regulär ist, daß sie also fortgesetzt werden kann. Bei dieser Fortsetzung aber wird die untersuchte Abbildungsbeziehung zu einer eineindeutigen konformen Beziehung zweier zweiblättrigen geschlossenen hyperelliptischen Flächen mit je sechs Windungspunkten aufeinander. Diese Beziehung aber ist linear. (S. Anmerkung im Text S. 421.)

Jede Konformmodellfläche unserer Art kann mithin auf sich selbst nur durch lineare Transformation abgebildet werden. Insbesondere finden wir, daß es nur eine typische Bewegung gibt, das ist die in der Blättervertauschung der Modellfläche dargestellte Bewegung. Die Bestimmung des absoluten Linienelementes für die Modellfläche wird durch das bereits vorhin zur Anwendung gelangte Iterationsverfahren geleistet.

46. Wir stellen nunmehr die entsprechende Überlegung für die dreifach zusammenhängenden Raumformen des Typus **(B, 1, 2) mit nur hyperbolischen Öffnungen** an. Für diese Raumform dient uns jetzt als topologisches Modell die zweiblättrige Faltfläche, die durch Fig. 51c, 1 dargestellt wird. Diese Fläche können wir dadurch einfach zusammenhängend machen, daß wir sie längs den beiden Faltlinien aufschneiden. Das bedeutet in abstracto, daß wir die Raumform längs zwei die Randlinien r_1 und r_2 verbindenden Querschnitten aufschneiden, die die Fläche einfach zusammenhängend machen. Jeder einzelne Querschnitt verwandelt die Fläche $(B, 1, 2)$ in eine Fläche $(B, 1, 1)$ (Kreuzhaubentypus), wie auch die Figur sofort erkennen läßt. Die längs f_1 und f_2 aufgeschnittene Modellfläche ist topologisch einem schlichten Achteck äquivalent (vgl. Fig. 51c, 3).

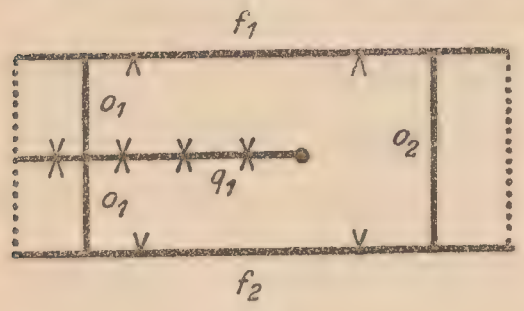


Fig. 51c, 1.
$(B, 1, 2.)$
Top. Mod., gleichwertig 51c.

Wir konstruieren nun in der Raumform die normierten Öffnungslinien o_1 und o_2. Bezüglich dieser normieren wir die Querschnitte f_1 und f_2 orthogonal, was keine Kollisionen herbeiführt und den topologischen Charakter der figürlichen Anordnung nicht ändert. Nunmehr lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf den Querschnitt q_1 der Fig. 51c, 1, welcher den Rand r_1 der Modellfläche mit sich selbst verbindet. Dieser Querschnitt q_1 wird nun in der Raumform ebenfalls orthogonal normiert bezüglich der Öffnungslinie o_1, was wieder zu keinen Kollisionen und zu keiner Veränderung der abstrakten topologischen Bilder führt. Nunmehr bemerken wir an Hand der Modellfläche (vgl. auch Fig. 51c, 2), daß der von o_1 und o_2 abgegrenzte Teil der Raumform durch die normierten Linien o_1, o_2, f_1, f_2, q_1 in zwei Innenteile zerlegt wird, welche die Gestalt zweier geradliniger Sechsecke mit lauter

rechten Winkeln haben. Diese Sechsecke sind einander kongruent, weil in beiden dieselben geradlinigen Strecken f_1, f_2, q_1 vorkommen, diese Strecken alle nur bis zu den Öffnungslinien hin genommen. Diese Kongruenz bietet auf den Linien f_1 und f_2 den Charakter der identischen Punktzuordnung, auf der Linie q_1 jedoch den Charakter der gegenläufigen Zuordnung dar, wobei ein Drehpunkt entsteht, den wir topologisch dem Windungspunkt der Modellfläche entsprechen lassen werden.

Das Ergebnis ist, daß wir eine involutorische Internbewegung der Raumform gefunden haben, die einen und nur einen isolierten Fixpunkt aufweist, wo die Bewegung lokal den Charakter einer Wendung darbietet, während dieselbe Eigenbewegung alle Punkte der Linien f_1 und f_2 festläßt, in bezug auf diese Linien also den lokalen Charakter einer internen Spiegelung darbietet.

Indem wir nunmehr je zwei durch die involutorische Eigenbewegung gepaarte Punkte der Raumform als einen »Punkt« auffassen, entsteht, wie die figürliche Anordnung zeigt, eine offene, einfach zusammenhängende RIEMANNsche Mannigfaltigkeit, von welcher ein topologisches Bild durch die obere Hälfte der Modellfläche geliefert wird, sofern wir gegenüberliegende Punkte des Einschnittes q_1 dieser oberen Hälfte miteinander durch Verheftung identifiziert denken. Das konforme Abbild dieser RIEMANNschen Mannigfaltigkeit in der vorhin betrachteten ζ-Ebene ist ein von drei getrennten orthogonalen Kreisbögen begrenzter Teil des ζ-Einheitskreises. Zwei dieser Orthogonalkreisbögen sind die Bilder der normierten Querschnitte f_1 und f_2, während der dritte, dem Einschnitt q_1 entsprechende, durch eine elliptische Substitution der Periode 2 auf sich selbst bezogen ist (Fig. 51 c, 2). Übt man auf diese Figur die elliptische Bewegung aus, so entsteht der schraffierte Bereich der Fig. 51 c, 3. Die Lagerung unseres Bereiches in Fig. 51 c, 2 ist so gewählt, daß der Punkt $\zeta = 0$ innerhalb des Bereiches liegt. Es bedarf jetzt nur der Anwendung eines unendlichen Produktes, um den schraffierten Bereich auf die schlichte Fläche eines z-Einheitskreises abzubilden, wobei wir durch nachträgliche lineare Transformation dafür Sorge tragen können, daß das Bild des erwähnten elliptischen Fixpunktes der Punkt $z = 0$ wird.

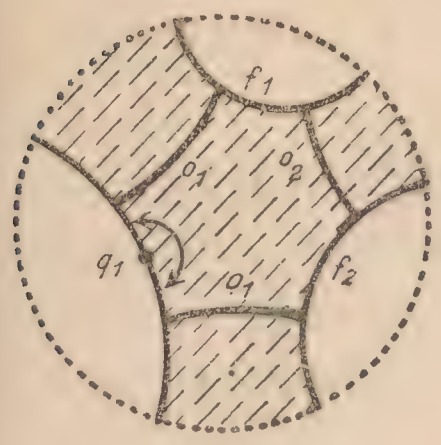


Fig. 51 c, 2.

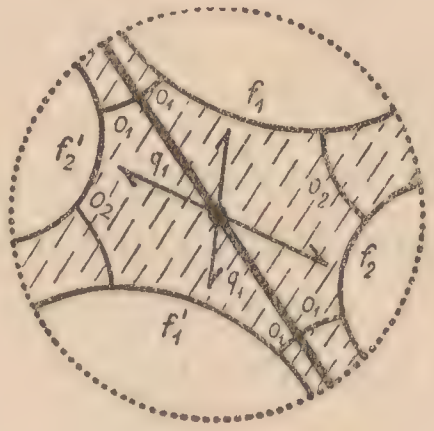


Fig. 51 c, 3.
(B, 1, 2), 2 hyp. Öffn. Id. El. Mod.

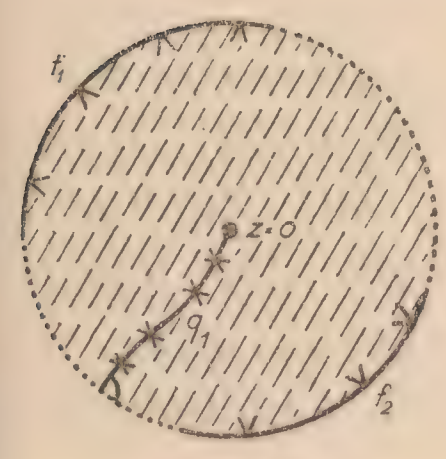


Fig. 51 c, 4.
(B, 1, 2), 2 hyp. Öffn. Nat. Konf. Mod.; zugleich top. Mod. gleichwertig 51 c, 1.

Bei der erwähnten Produktbildung ist eine Gruppe zugrunde zu legen, die durch drei elliptische Substitutionen der Periode 2 erzeugt wird. Die erste der drei Substitutionen ist die bereits genannte elliptische Substitution, deren einer Fixpunkt innerhalb des Einheitskreises liegt, während der andere spiegelbildlich symmetrisch zum Einheitskreise liegt. Weiter liefern die beiden anderen orthogonalen Kreisbögen je eine elliptische Substitution der Periode 2, deren Fixpunkte von

den Endpunkten dieser Bögen auf der Peripherie des Einheitskreises gebildet werden.

Das Endergebnis ist nun offenbar die eineindeutige konforme Abbildung der Raumform $(B, 1, 2)$ mit hyperbolischer Öffnung auf die längs zweier getrennter Bögen (in Fig. 51 c, 4 punktiert) des Einheitskreises aufgeschlitzt zu denkende Konformmodellfläche $(B, 1, 0)$.

Die gefundene Fläche kann ihrerseits, wie wir wissen, auf die Einheitskugel mit diametraler Punktepaarung konform und damit kongruent übertragen werden und diese wiederum durch Zentralprojektion auf die elliptische Ebene. Hiernach können wir sagen, daß jede dreifach zusammenhängende Raumform vom Typus $(B, 1, 2)$ mit hyperbolischen Öffnungen kongruent auf die längs zweier in ein und derselben Geraden liegenden Strecken aufgeschlitzte elliptische Ebene abgebildet werden kann. Wir können insbesondere annehmen, daß die Aufschneidung der elliptischen Ebene längs zweier Strecken der unendlich fernen Geraden dieser Ebene erfolgt, in welchem Falle man sofort übersieht, daß die typische Eigenbewegung dieser Raumform durch die Wendebewegung mit dem Nullpunkt als Fixpunkt dargestellt wird, eine Bewegung, die gleichzeitig auch als harmonische Spiegelung in bezug auf die unendlich ferne Gerade mit dem Nullpunkt als Perspektivitätszentrum angesehen werden kann.

Das durch Fig. 51 c, 4 dargestellte Konformmodell unserer Raumform läßt auch unmittelbar die einzige vorhandene typische Eigenbewegung dieser Raumform als Blättervertauschung erkennen.

Wir denken uns jetzt eine Modellfläche wie Fig. 51 c, 4 direkt gegeben. Dann erhebt sich die Frage nach der Bestimmung des absoluten Linienelementes $d\zeta$, d. h. der Uniformisierenden ζ. Diese Größe wird wiederum durch ein Iterationsverfahren gewonnen, das als Umkehrung jener Produktbildung angesehen werden kann. Das Iterationsverfahren ist auf die schlichte Fläche des z-Einheitskreises zur Anwendung zu bringen. Es besteht aus einer unendlichen Kette von Fundamentaltransformationen, deren einzelne entweder ein Peripherieintervall in einen orthogonalen Kreisbogen verwandelt oder einen von einem inneren Punkte des Einheitskreises ausgehenden Einschnitt, dessen Ausgangspunkt mit der Notierung 2 behaftet zu denken ist, zur Auflösung bringt. Im ersten Falle sind die beiden Verzweigungspunkte der Fundamentaltransformation die Endpunkte des betreffenden Peripheriebogens, im anderen Falle jener Ausgangspunkt in Verbindung mit seinem Spiegelpunkt bezüglich des Einheitskreises.

Weiter erhebt sich die Frage nach den eineindeutigen konformen Abbildungen einer Modellfläche in sich (Eigenbewegungen) bzw. nach den eineindeutigen konformen und also kongruenten Transformationen zweier Modellflächen aufeinander. Fassen wir die Frage sogleich in der letzteren allgemeineren Form an. Wir wollen dann zeigen, daß eine solche Transformation immer durch eine euklidische Drehung um den Nullpunkt oder durch eine Spiegelung an einer Geraden durch den Nullpunkt dargestellt wird.

Wir bemerken, daß jede so gedachte Beziehung zweier derartiger RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten R_1 und R_2 zugleich eine eineindeutig konforme Beziehung der zugehörenden $\tilde{R}_1$ auf die $\tilde{R}_2$ liefert. Die Flächen $\tilde{R}_1$ und $\tilde{R}_2$ werden aber ihrerseits durch Anwendung der Transformation $\sqrt{z}$ auf Flächen $\tilde{R}_1'$ und $\tilde{R}_2'$ abgebildet, die sich von der Fläche 51 a, 2 nur dadurch unterscheiden, daß statt dreier Schlitze längs des Faltungskreises vier solche Schlitze vorhanden sind, die sich dazu noch diametral entsprechen.

Wir schließen wie oben (S. 417, 418), daß die Schlitze bei der angenommenen Abbildung der R_1' auf die R_2' sich regulär entsprechen müssen. Ersetzen wir die unteren Blätter unserer zweiblättrigen Flächen $\tilde{R}_1'$ und $\tilde{R}_2'$ vermöge Spiegelung durch die Außenhälfte des Einheitskreises, so wird jetzt aus unserer Beziehung durch Anwendung der Spiegelung an den Schlitzen eine Beziehung zweier hyperelliptischer Flächen aufeinander, die, wie wir wissen, nur durch lineare Transformation bewirkt werden kann. Da unsere Beziehung aber ein diametrales Schlitzpaar wieder in ein diametrales Schlitzpaar verwandelt, muß der Nullpunkt sich selbst entsprechen.

Ein zweiter Linearitätsbeweis, bei dem die Beziehung zu den hyperelliptischen Flächen vermieden wird, ergibt sich, wenn man beachtet, daß die beiden Faltlinien der Modellfläche topologisch dadurch im Sinne der Homotopie völlig bestimmt sind, daß sie die einzig möglichen verschiedenen Querschnitte zwischen den Rändern herstellen, wie es ja bei einer zweifach gelochten oder punktierten projektiven Ebene (B, 1, 2) auch nur zwei wesentlich verschiedene Verbindungsquerschnitte zwischen den Punktierungen gibt. Dann müssen sich aber die Faltlinien der Flächen R_1 und R_2 als orthogonal zu den normierten Öffnungslinien normierte Querschnitte bei der Abbildung gegenseitig entsprechen. Die Abbildungsfunktion nimmt daher in beiden Blättern denselben Wert an, da sie bei Annäherung an eine Faltlinie in beiden Blättern gleichen Werten zustrebt. Wir haben es also mit einer eineindeutigen Abbildung zweier Kreisflächen aufeinander zu tun. Diese ist aber linear. —

Anmerkung: Auch der S. 417/418 geführte Linearitätsbeweis für die (A, 1, 1) gestattet eine analoge Modifikation. Offenbar müssen sich nämlich hier die normierten Öffnungslinien kongruent entsprechen, daher diametralen Punkten einer solchen diametrale Punkte der andern. Diametrale Punkte erscheinen aber in der Modellfläche als koinzidierend übereinanderliegende Punkte.

(Fortsetzung zu S. 401.)

zweiten Falle andererseits zweiufrig ist und die (B, 3, 0) in zwei Stücke zerlegt in der Form der Abspaltung eines MÖBIUS-Bandes. Beides widerspricht den für R_1 angenommenen Eigenschaften; womit unser Satz bewiesen ist. — Diese elementar topologische Beweisführung gelang mir erst nach einer anregenden Besprechung des Gegenstandes, die ich gelegentlich des Kongresses in Bologna (Sept. 1928) mit den Herren KEREKJARTO und VEBLEN hatte.

Die Beweismethode läßt zugleich erkennen, wie die von R verschiedenen einufrigen Rückkehrschnitte der (B, 3, 0), die dann ihrerseits die (B, 3, 0) immer einseitig lassen, sämtlich bestimmt werden können.

Weiter bemerkt man, daß die Methode sofort auch die (Nr. 34 a) mit Hilfe der Fundamentalgruppe topologisch bewiesenen Sätze betreffend die (B, 2, 0) liefert. Insbesondere gibt

Die Faltlinien (Symmetrielinien) und die Windungspunkte (Fundamentalpunkte) der Modellfläche bilden eine invariante Figur der Raumform $(B, 1, 2)$ (Fundamentalfigur). Diese Fundamentalfigur kann durch weitere invariante Linien vervollständigt werden, deren topologische Eigenart man der Fig. 51c, 5 entnehmen möge. Die beiden vorkommenden einufrigen Rückkehrschnitte R_1 und R_2 hat man sich auf der Raumform normiert zu denken. Ferner sind die Querschnitte q_1 und q_2 bezüglich o_1 und o_2 orthogonal normiert zu denken. Alle diese Linien sind so, wie f_1 und f_2, leicht durch ihre topologische Eigenart, bis auf die Normierung, im Sinne der Homotopie singulär bestimmt. Die normierten Linien R_1, R_2, q_1, q_2 schneiden sich paarweise im Fundamentalpunkte. (Rechte Winkel sind in der Figur durch Winkelbögen besonders gekennzeichnet.)

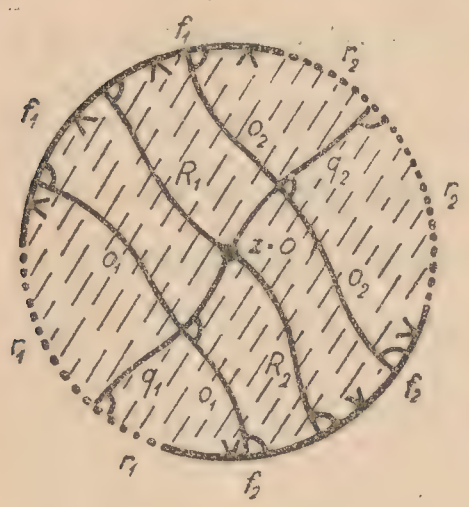


Fig. 51c, 5.
≡ Fig. 51c, 4 mit Fund.-Figur.

47. Die vorstehenden Betrachtungsweisen legen die Art und Weise der Behandlung der Raumform **$(B, 2, 1)$** (Fig. 51d) mit **hyperbolischer Öffnung** nahe. Wir können uns deswegen sehr kurz fassen. Die genannte topologische Modellfläche können wir auch so auffassen, wie Fig. 51d, 1 zeigt. Es findet sich jetzt eine Abbildung der Raumform auf ein Konformmodell der Art Fig. 51d, 5. Diese Fläche ist dann wieder bis auf lineare Transformationen, die das Innere des Einheitskreises (Konturkreises) in sich transformieren, völlig bestimmt. Sie läßt die einzige vorhandene typische Internbewegung als Blättervertauschung erkennen. Die Linie f, topologisch im Sinne der Homotopie als nicht zerfällender Querschnitt eindeutig bestimmt, die beiden Win-

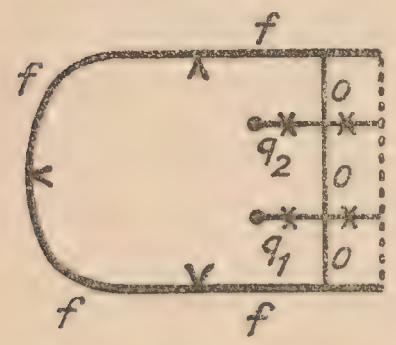


Fig. 51d, 1.
$(B, 2, 1.)$
Top. Mod., gleichwertig 51d.

---

es auch hier nur einen die $(B, 2, 0)$ zweiseitig machenden Rückkehrschnitt, der nun natürlich zweiufrig ist und die $(B, 2, 0)$ in ein $(A, 0, 2)$ verwandelt. Der Fall der $(B, 1, 0)$ liegt klar. Eine $(B, p, 0)$ hingegen, für die $p \geq 4$ ist, läßt unendlich viele verschiedene Rückkehrschnitte zu, die sie zweiseitig machen. Man kann offenbar, wenn man das Modell der p-fach gelochten Kugel mit p angesetzten Kreuzhauben zugrunde legt, dadurch lauter verschiedene solche Linien gewinnen, daß man die Löcher der Kugel in irgendeinem geschlossenen Zyklus durch p Querschnitte verbindet und die Einmündungsstellen durch die Kreuzhauben hindurch verbindet. —

Unter Verwendung unseres topologischen Satzes betreffend die $(B, 3, 0)$ können wir den Linearitätssatz und Unitätssatz für die Konformmodellflächen (Fig. 38a. S. 400) Riemannscher Mannigfaltigkeiten $(B, 3, 0)$ nunmehr ohne Heranziehung des Linearitätssatzes bzw. Unitätssatzes der hyperelliptischen Riemannschen Flächen folgendermaßen erbringen. Sind zwei solche Modellflächen konform eineindeutig aufeinander abgebildet, so müssen sich dabei die Faltlinien, als einzige und zwar normierte zweiseitig machende Rückkehrschnitte, entsprechen. Das besagt aber, daß die Abbildungsfunktion in beiden Blättern der Modellfläche längs der Faltlinie, also überhaupt identische Werte annimmt, daß mithin die Kreisscheiben schlechthin eineindeutig konform, daher linear aufeinander bezogen werden. Auch die Abbildung der $(B, 3, 0)$ auf eine Modellfläche kann ohne die S. 400 benutzte Beziehung zur hyperelliptischen Fläche und dem dazu gehörenden Linearitätssatze geleistet werden. Die längs R aufgeschnittene $(B, 3, 0)$ ist nämlich eine $(A, 1, 1)$. Wird diese noch längs eines inneren normierten Rückkehrschnittes zu einem normierten a-Element aufgeschnitten, so hat letztere zwei gleich lange Randgeraden und gestattet daher, wie das entsprechende Doppelsechseck sofort erkennen läßt, eine 180°-Drehung in sich, die sich auf der $(B, 3, 0)$ als involutorische Bewegung mit drei isolierten Fixpunkten (Drehpunkten, Fundamentalpunkten) und der Linie R als Spiegellinie darstellt.

(Fortsetzung S. 442.)

dungspunkte (Fundamentalpunkte) und der Rückkehrschnitt R, der topologisch der einzig mögliche, die Raumform zweiseitig machende Rückkehrschnitt ist, bilden zusammen die Fundamentalfigur. Die Gewinnung des ab-

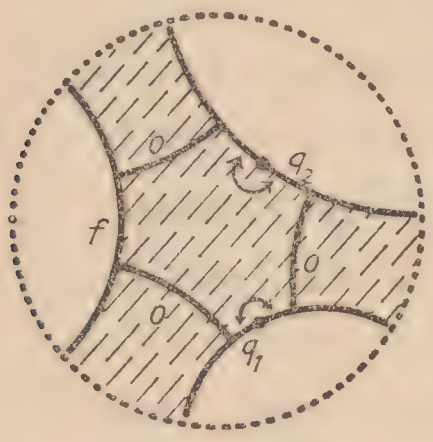


Fig. 51d, 2.

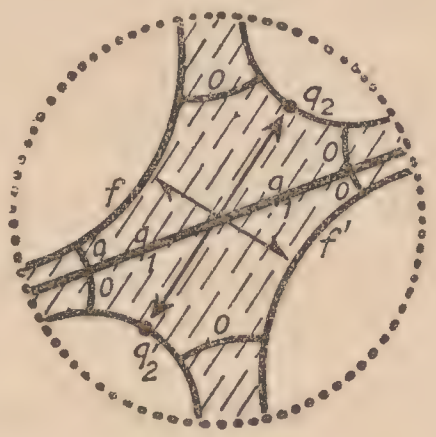


Fig. 51d, 3.
$(B, 2, 1)$, 1 hyp. Öffn.
Id. El. Mod.

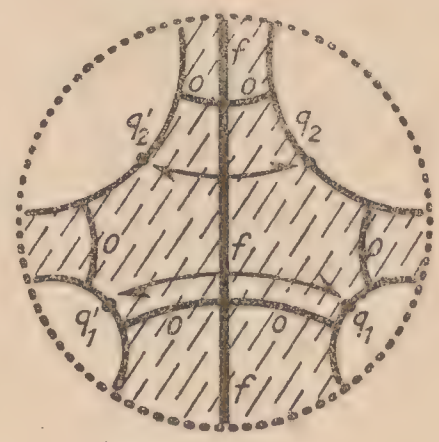


Fig. 51d, 4.
$(B, 2, 1)$, 1 hyp. Öffn.
Id. El. Mod.

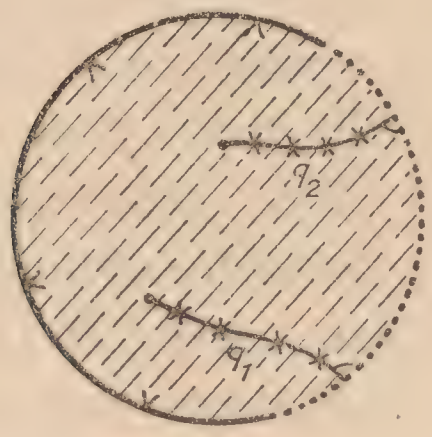


Fig. 51d, 5.
$(B, 2, 1)$, 1 hyp. Öffn.
Nat. Konf. Mod.

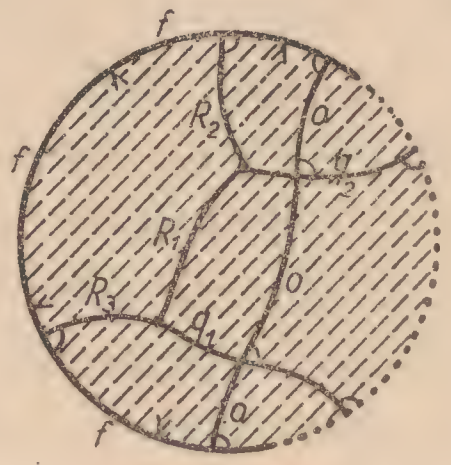


Fig. 51d, 6.
≡ 51 d, 5 mit eingetragener Fund. Figur.

soluten Linienelements bzw. der Uniformisierenden ζ zu einer gegebenen Modellfläche gelingt ebenfalls durch Iterationsmethoden, umgekehrt der Übergang von ζ zu z durch Produktbildung.

48. Wir kehren wieder allgemein zu den **mehrfach zusammenhängenden Raumformen** zurück, deren **Zusammenhangszahl** ≥ 3 ist, nehmen aber jetzt an, daß die zu betrachtenden Raumformen **mindestens auch eine parabolische Öffnung** haben. In diesem Fall ist es offenbar nicht möglich, eine topologisch vorgegebene Öffnungslinie geradlinig zu normieren, weil nämlich die Fixpunkte der der Öffnung entsprechenden Substitution nunmehr zusammenfallen. Dementsprechend werden wir, wieder von einer topologischen Zerlegung in $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c} = 2p + q - 2$ bzw. $p + q - 2$) dreifach zusammenhängende Teilbereiche (α-Elemente) und q Öffnungsstücke ausgehend, zunächst alle diejenigen Öffnungslinien löschen, die den parabolischen Öffnungen entsprechen. Nachdem dies geschehen ist, können wir jetzt alle an der Parzellierung teilnehmenden Rückkehrschnitte geradlinig normieren.

In der Tat erkennen wir zunächst, wieder anknüpfend an die Betrachtungsweise der Nr. 43 (S. 411), daß im vorliegenden Falle ein beliebiger geschlossener Weg, längs welchem die Uniformisierende ζ eine parabolische Substitution erfährt, deformatorisch äquivalent ist einem der soeben gelöschten Öffnungswege oder dem Multiplum eines solchen Weges, so daß also jede der in der Fundamentalgruppe der Raumform vorkommenden parabolischen Substitutionen entweder die Potenz einer von einer Öffnung herrührenden parabolischen Substitution ist, oder aber die vermöge einer Substitution der Fundamentalgruppe Transformierte einer solchen Substitution,

in welchem Falle sie ebenfalls als Potenz einer parabolischen Substitution der erwähnten Art angesprochen werden kann, da man nur einen passenden Zweig auszusuchen hat.

Es sei nunmehr W einer der nicht gelöschten Rückkehrschnitte unserer topologischen Zerlegung der Raumform. Ist dieser Schnitt ein einufriger Schnitt, so versteht sich von selbst, daß die Größe ζ längs dieses Weges keine parabolische Substitution erfährt, vielmehr eine Gleitspiegelung, die immer zwei getrennte Fixpunkte auf der Peripherie des Einheitskreises besitzt.

Ist zweitens W ein zerfällender Rückkehrschnitt und wird angenommen, daß ζ längs eines solchen Weges eine parabolische Substitution erfährt, so entspricht einem unendlichen Liniengewinde $W^{(\infty)}$, wie es in die Überlagerungsfläche eingeht, eine Bahnkurve der betreffenden parabolischen Substitution. Wir lenken jetzt unsere Aufmerksamkeit auf denjenigen der Zerfallsteile der Raumform, dessen W benachbarte Punkte sich abbilden auf innere Punkte der erwähnten Bahnkurve. Die Überlagerungsfläche dieses Teiles hat dann, da sie mindestens dreifach zusammenhängend ist, unendlich viele begrenzende Liniengewinde $W^{(\infty)}$. Indem wir einen Punkt innerhalb desselben Teiles laufen lassen, ausgehend von dem ursprünglich gewählten Gewinde $W^{(\infty)}$, werden wir in der ζ-Ebene die erstgewonnene Bahnkurve nicht überschreiten können, vielmehr stets in ihrem Innern bleiben. Den erwähnten unendlich vielen Gewinden $W^{(\infty)}$ müssen dann auch unendlich viele sich gegenseitig nicht treffende parabolische Bahnkurven, möglicherweise anderer parabolischer Substitutionen, die jedoch sicher denselben Fixpunkt haben, innerhalb der ersten entsprechen; und diese unendlich vielen Bahnkurven müssen an ein und denselben Gebietsteil der ζ-Ebene anstoßen, nämlich an dasjenige Gebiet, das das eineindeutige Abbild der erwähnten Teil-Überlagerungsfläche in der ζ-Ebene ist. Das ist aber offenbar unmöglich, weil die Bahnkurven alle in den Fixpunkten mit entgegengesetzt gerichteten Enden tangierend einlaufen. Schon drei solcher Bahnkurven können nicht mehr als Begrenzung eines und desselben Gebiets auftreten.

Ist W ein nichtzerfällender zweiufriger Rückkehrschnitt, so gilt dieselbe Betrachtungsweise nur mit dem Unterschied, daß an Stelle des Zerfallsteiles jetzt die ganze Raumform tritt, aufgeschnitten längs W.

Nach dem vorstehenden Ergebnis wollen wir nunmehr zur normierten Zerlegung der Raumform übergehen. Wir denken dabei in Analogie zum Falle der Raumform mit lauter hyperbolischen Öffnungen jedes innere α-Element durch Querschnitte wieder in zwei Sechsecke zerlegt. Weiter aber tritt nunmehr gegenüber früher das Neue auf, daß es auch an die Grenze der Raumform anstoßende dreifach zusammenhängende Elemente (parabolische Elemente) gibt, das sind nämlich solche, an denen mindestens eine, d. h. also entweder eine oder zwei parabolische Öffnungen, in einem einzigen Fall sogar drei parabolische Öffnungen teilnehmen, nämlich im Falle $(A, 0, 3)$ mit lauter parabolischen Öffnungen. Während wir die Rückkehrschnitte der Zerlegung einfach durch ihre homotopen Rückkehrgeraden ersetzen können, werden die Querschnitte wieder nach dem Prinzip der orthogonalen

Normierung geradlinig festgelegt, soweit es sich um Querschnitte ganz innerer α-Elemente handelt, während bei Querschnitten der parabolischen Elemente die Bedingung der Einmündung in die parabolische Öffnung selbst ein- bzw. zweimal an Stelle einer orthogonalen Normierung tritt.

Im übrigen bemerkt man leicht, daß sonst grundsätzliche Schwierigkeiten für die Zerlegung nicht auftreten. Will man nun umgekehrt zur Synthese der Raumformen einer bestimmten topologischen Gattung schreiten, indem man zugleich für die einzelne Öffnung vorschreibt, ob sie hyperbolisch oder parabolisch sein soll, so hat man jetzt als Aufbauinvarianten lediglich die Längen der an der Zerlegung beteiligten Rückkehrschnitte und die Kompositionsinvarianten längs derjenigen zweiufrigen Rückkehrschnitte, an welchen zwei dreifach zusammenhängende Elemente, nicht jedoch ein solches Element und ein hyperbolisches Öffnungselement zusammenstoßen. Man bemerkt, daß sich auf diese Weise die Anzahl der Aufbauinvarianten gleich $3\mathfrak{c}-q'$ ergibt, wenn mit q' die Anzahl der parabolischen Öffnungen bezeichnet wird.

Über die hier neu auftretenden dreifach zusammenhängenden Grenzelemente (parabolische Elemente) sind jedoch noch einige Bemerkungen am Platze. Wir haben zu unterscheiden zwischen parabolischen Elementen mit zwei Randlinien und einer parabolischen Öffnung, und parabolischen Elementen mit einer Randlinie und zwei parabolischen Öffnungen, schließlich, was nur im erwähnten Ausnahmefalle denkbar ist, das Element mit drei parabolischen Öffnungen. Die erste Kategorie bestimmt sich durch Angabe der Längen der zwei Randlinien, das zweite durch Angabe der Länge der einen Randlinie. Das dritte ist an sich vollständig bestimmt. Zur Erläuterung dienen die Figuren 52 bis 52b, deren erste die Konstruktion des das betreffende Element darstellenden Doppelfünfecks zeigt, deren zweite die Konstruktion des das betreffende Element darstellenden Doppelvierecks zeigt, während die dritte unmittelbar das die ganze Raumform darstellende Doppeldreieck mit drei Spitzen zeigt. Als Daten sind im Falle des Fünfecks die absoluten Längen (1, 2) und (6, 5) gegeben. Die Konstruktion vollzieht sich in der Reihenfolge, die durch die Numerierung der Punkte gekennzeichnet ist. Als Datum im Falle des Vierecks ist nur die Länge (1, 2) gegeben, während im Falle des Dreiecks kein absolutes Datum in Betracht kommt.

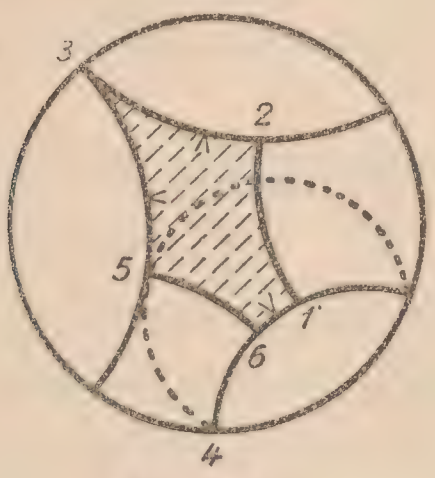


Fig. 52.

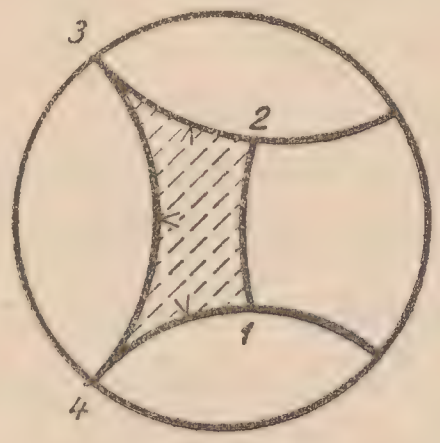


Fig. 52a.

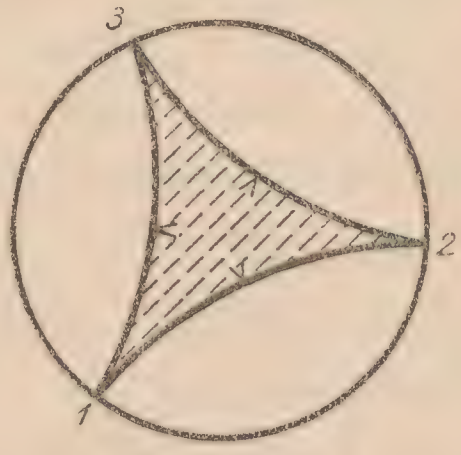


Fig. 52b.

49. Ein besonderes Interesse fordern wieder die **dreifach zusammenhängenden Raumformen mit mindestens einer parabolischen Off-**

nung, weil bei diesen typische Eigenbewegungen auftreten und weil es auch jetzt gelingt, für sie Konformmodelle, im Falle $(A, 0, 3)$ sogar ein Elementarmodell herzustellen. Diese Modelle sind in den Figuren 53 bis 55,1 in

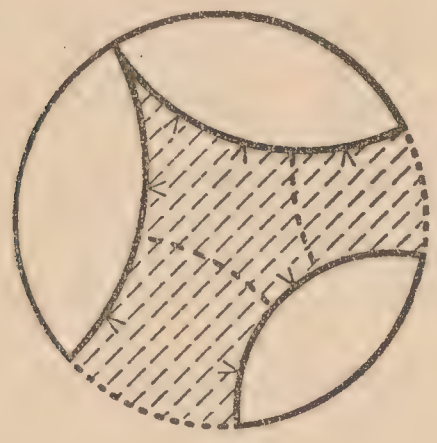


Fig. 53.
$(A, 0, 3)$,
2 hyp., 1 par. Öffn.
Nat. El. Mod.

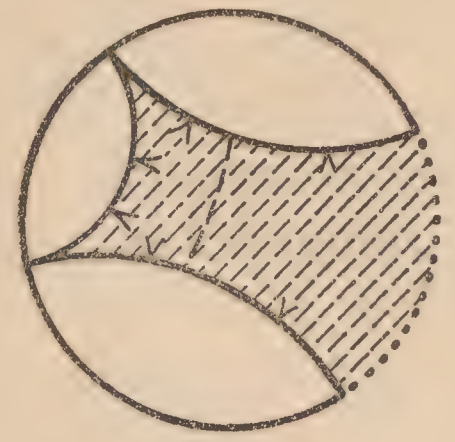


Fig. 54.
$(A, 0, 3)$,
1 hyp., 2 par. Öffn.
Nat. El. Mod.

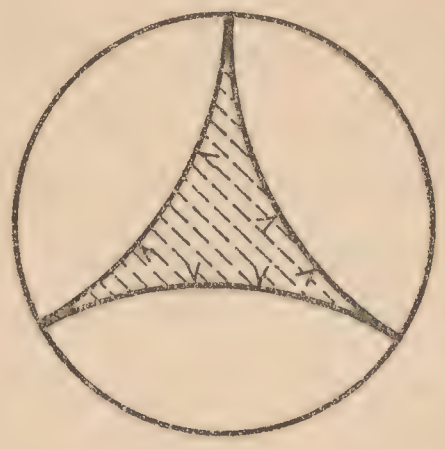


Fig. 55.
$(A, 0, 3)$, 3 par. Öffn.
Nat. El. Mod.

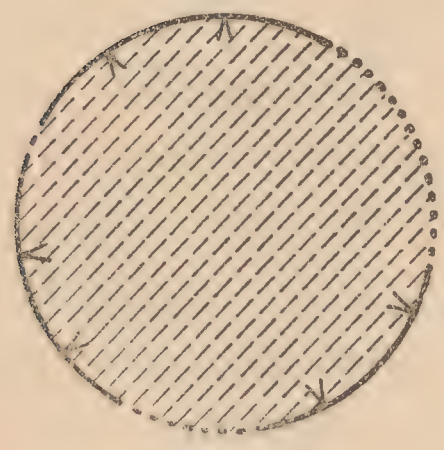


Fig. 53, 1.
$(A, 0, 3)$,
2 hyp., 1 par. Öffn.
Nat. Konf. Mod.

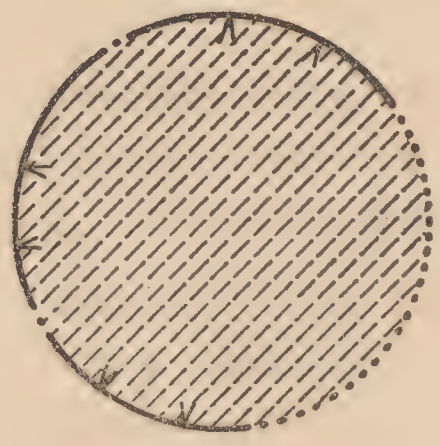


Fig. 54, 1.
$(A, 0, 3)$,
1 hyp., 2 par. Öffn.
Nat. Konf. Mod.

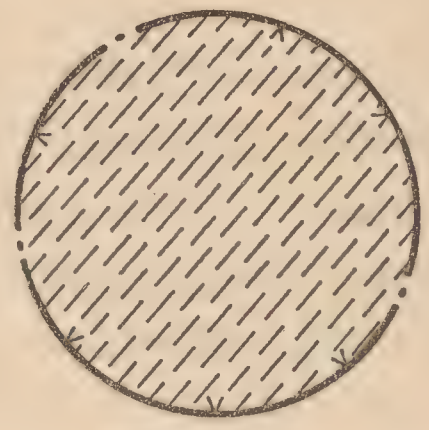


Fig. 55, 1.
$(A, 0, 3)$,
3 par. Öffn.
Nat. Konf. Mod.

leicht verständlicher Weise dargestellt. Die den parabolischen Öffnungen entsprechenden Punktierungen sind in den drei Konformmodellen durch ausgezeichnete Punkte kenntlich gemacht.

Zur Herleitung insbesondere der Konformmodelle, die sofort als Grenzfälle der früheren Modelle erkannt werden, machen wir die Bemerkung, daß eine endlich vielfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit offenbar dadurch in eine Raumform niedrigerer Zusammenhangsordnung verwandelt wird, daß man sie über die parabolischen Öffnungen hin abschließt; ein Vorgang, der dadurch bewirkt wird, daß man zunächst die Öffnung konform auf die schlichte Umgebung eines Punktes überträgt und nunmehr diesen Punkt selbst der Mannigfaltigkeit hinzufügt. Diese Bemerkung bedeutet für die dreifach zusammenhängenden Raumformen mit mindestens einer parabolischen Öffnung, daß sie punktierte, evtl. geschlossene »niedere Raumformen« sind. Die »niederen Raumformen« haben wir aber in Nr. 32 bis 36 behandelt. Die dort gewonnenen Modelle der niederen Raumformen bedürfen nur noch der Punktierung.

So ergibt sich z. B. für den Typus $(A, 1, 1)$ durch Abschließen der Typus $(A, 1, 0)$, in welchem die Punktierung nunmehr als Notierung wieder erscheint. Wir erhalten ein Periodenparallelogramm, dessen Eckpunkte 0, 2ω, $2\omega''$, $2\omega'$ wir der Notierungsstelle der Mannigfaltigkeit entsprechen lassen können. Durch Anwendung der Pe-funktion ergibt sich eine Übertragung des

Fundamentaldreiecks $(0, 2\omega, 2\omega')$ auf die aufgeschlitzte schlichte Ebene und des Parallelogramms auf die zweiblättrige Riemannsche Fläche mit drei endlichen Windungspunkten und einem vierten Windungspunkt im Unendlichen, der nunmehr wieder zu punktieren ist. Damit ist die Modellfläche Fig. 56 gewonnen.

Fig. 56. $(A, 1, 1)$, 1 par. Öffn. Nat. Konf. Mod.

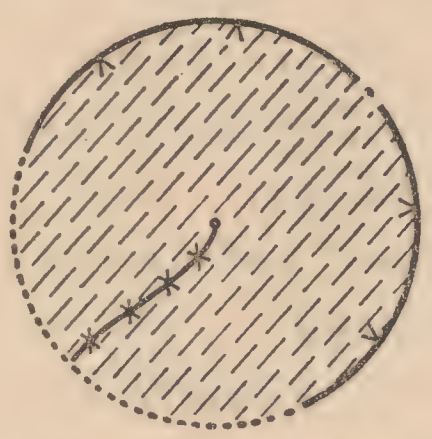


Fig. 57. $(B, 1, 2)$, 1 hyp., 1 par. Öffn. Nat. Konf. Mod.

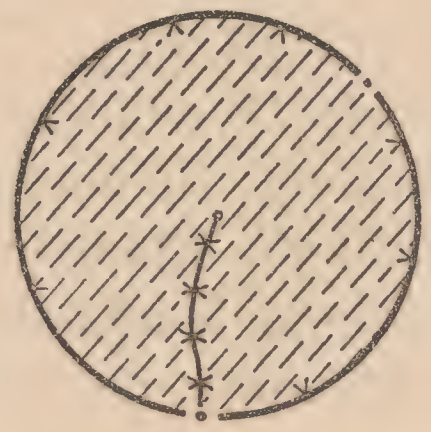


Fig. 58. $(B, 1, 2)$, 2 par. Öffn. Nat. Konf. Mod.

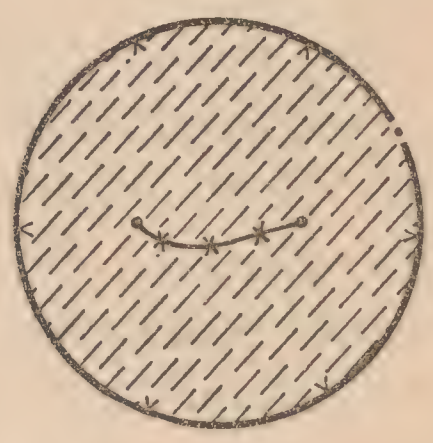


Fig. 59. $(B, 2, 1)$, 1 par. Öffn. Nat. Konf. Mod.

Umgekehrt kann zu einer punktierten Fläche (56) bei beliebiger Vorgabe derselben das absolute Linienelement z. B. so gewonnen werden: Man wendet auf die Ebene der Fläche zunächst die Vierertransformation an mit den drei endlichen Windungspunkten der Fläche als Verzweigungspunkten. Dadurch kommt man zu der Aufgabe, die in vier einem Kreis angehörenden Punkten punktierte schlichte Vollebene der Fundamentalabbildung zu unterwerfen. Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der Abbildung des Innern der erwähnten Kreisfläche auf ein orthogonales Kreisbogenviereck mit vier Spitzen. Diese Spitzenpolygonaufgabe aber wird durch eine Iterationskette gelöst.

Ein weiteres Eingehen auf die anderen Fälle dürfte sich erübrigen.

VIII. Die Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung mit Beispielen.

50. Wir wenden uns nunmehr den **offenen Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung** zu mit der Absicht, Analyse und Synthese derselben aus Elementen zu leisten. Dabei wollen wir uns zunächst auf den sozusagen allgemeinen Fall beschränken, wo die Raumform **keine Öffnung** darbietet, weder eine hyperbolische noch eine parabolische Öffnung.

Aus den Darlegungen der ersten Mitteilung (Nr. 6) ergibt sich die Möglichkeit der topologischen Zerlegung einer solchen Raumform in dreifach zusammenhängende Elemente in der Weise, daß gleichzeitig eine Hauptdarstellung der Raumform eingeführt wird: $R = \lim_{n \to \infty} R_n$. Jeder Teil R_n ist endlich-vielfach zusammenhängend, einseitig oder zweiseitig, von endlich vielen Randlinien begrenzt, die ganz im Innern von R verlaufen. Er erscheint zunächst in lauter Elemente (α), (β), (γ) zerlegt. Die vorkommenden Elemente (β) sind weiter je durch zwei zweiufrige Rückkehrschnitte in zwei α-Elemente zerlegt, desgleichen die vorkommenden Elemente (γ) durch einen einufrigen Rückkehrschnitt in ein α-Element verwandelt. Die an R_n anschließenden

Restteile der Raumform sind von der Art, daß an jede Begrenzung von R_n ein selbständiges, und zwar hier notwendig unendlich-vielfach zusammenhängendes Reststück anschließt.

Eine gewisse Ausnahmestellung nehmen die Raumformen $(A, \infty, 1)$ und $(B, \infty, 1)$ ein, für welche die Zerlegung in Elementflächen zunächst die Einführung eines ersten Elements vom Typus der Fig. 51b (S. 413) erfordert bzw. vom Typus der Fig. 51d (S. 413). Das letztere Element ergibt sich aus der topologischen Modellfläche (S. 174 der ersten Mitteilung) durch Zusammenziehung der beiden ersten Elemente in einziges Element. Die genannten beiden ausnahmsweise einzuführenden Elemente lassen sich aber beide durch Ziehung eines einzigen zweiufrigen Rückkehrschnittes in ein α-Element verwandeln.

Nach unserer Auffassung ist somit die gesamte Zerlegung der Raumform in α-Elemente nur die weitere Ausführung einer Hauptdarstellung der Raumform.

Indem wir die Argumentation der Nummer 48 nochmals durchgehen, bemerken wir sofort, daß dieselbe ohne weiteres, auf den vorliegenden Fall angewendet, zu dem Resultat führt, daß die Substitionen, die die uniformisierende Variable ζ längs den eingeführten Parzellierungslinien unserer α-Zerlegung erfährt, sämtlich hyperbolische Substitutionen sind, soweit sie nicht Gleitspiegelungen sind, was nur bei den einufrigen Rückkehrlinien eintritt, und zwar dann stets. Rufen wir uns weiter die Betrachtung der Nummer 43 in Erinnerung, so finden wir ohne weiteres, daß der eingeführten topologischen α-Zerlegung und Hauptdarstellung der Raumform eine normierte α-Zerlegung entspricht, die eine Ausschöpfung der Raumform nach demselben topologischen Schema bewirkt. Dasselbe gilt von der Hauptzerlegung, die ja nur eine Oberteilung der α-Zerlegung ist.

Dagegen ist es unmöglich, jetzt allgemein zu schließen, daß die erwähnte normierte Zerlegung eine volle Ausschöpfung der Raumform leisten müsse. Hier sind vielmehr zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, die durch den Diskontinuitätscharakter der Fundamentalgruppe auf dem Einheitskreise bestimmt sind. Es kann nämlich sein, daß die Fundamentalgruppe der Raumform auch noch auf dem Einheitskreise eigentlich diskontinuierlich ist. In diesem Falle befindet sich auf dem Einheitskreis eine perfekte unendliche Menge von Indiskontinuitätspunkten (Grenzpunkte der Gruppe), die kein Intervall des Einheitskreises ausfüllen kann. Das Vorhandensein eines solchen Intervalls würde nämlich zur Folge haben, daß dieses Intervall, wenn man es so groß wie möglich macht, durch die Substitutionen der Gruppe entweder in sich oder in ein anderes Indiskontinuitätsintervall übergeführt wird. Die Substitutionen nun, die das Intervall in sich transformieren, könnten dann, da die Gruppe keine infinitesimalen Substitionen enthält, innerhalb des Intervalls nur eigentlich diskontinuierlichen Charakter liefern, im Widerspruch zu dem angenommenen Indiskontinuitätscharakter des betreffenden ganzen Intervalls.

Ganz allgemein die hyperbolischen Raumformen klassifizierend, bezeichnen wir die geschlossenen hyperbolischen Raumformen als hyperbolische Raumformen des ersten Typus (genauer Diskontinuitätstypus im Gegen-

satz zu topologischen Typen), diejenigen offenen hyperbolischen Raumformen, deren Fundamentalgruppe auf dem Einheitskreis nirgends eigentlich diskontinuierlich ist, als hyperbolische Raumformen des zweiten Typus oder als hyperbolische Raumform des ersten Öffnungstypus, schließlich diejenigen offenen hyperbolischen Raumformen, deren Fundamentalgruppe auf dem Einheitskreis selbst noch eigentlich diskontinuierlich ist, abgesehen von den Grenzpunkten, deren Anzahl dann 0, 1, 2 (bei niederen Raumformen), ∞ (bei allen nicht niederen Raumformen) ist, als hyperbolische Raumformen des dritten Typus oder zweiten Öffnungstypus.

51. Wir kehren nach dieser Zwischenbemerkung zu unserer Fragestellung der Ausschöpfung der Raumformen durch die normierte α-Zerlegung zurück.

Wir bemerken, daß das Bild eines einzelnen α-Elements in der ζ-Ebene ein Abwicklungsbild ist, das von unendlich vielen Orthogonalkreisbögen begrenzt wird, den Bildern der begrenzenden Liniengewinde der betreffenden Überlagerungsmannigfaltigkeit $\alpha^{(\infty)}$. Dieses Bild werde mit $A^{(\infty)}$ bezeichnet. Der Bereich $A^{(\infty)}$ ist, genauer gesagt, ein unendlich-vielseitiges Spitzenpolygon, worunter wir einen einfach zusammenhängenden Teilbereich des ζ-Einheitskreises verstehen, der von unendlich vielen verschiedenen, vollständigen Orthogonalkreisbögen begrenzt wird, wozu als weitere Begrenzung nur noch Punkte, niemals jedoch ein Intervall des Einheitskreises hinzutritt. Daß $A^{(\infty)}$ in diesem Sinne ein Spitzenpolygon ist, kann man z. B. daraus erkennen, daß $A^{(\infty)}$ durch einen Spiegelungsprozeß aus einem inneren, von endlichen Orthogonalkreisbögen begrenzten Sechseck mit lauter rechten Winkeln entsteht. Jeder hierbei zum Vorschein kommende $A^{(\infty)}$ begrenzende Orthogonalkreisbogen liegt dann einem anderen in der Weise benachbart, daß man von ersterem zu letzterem durch Ablaufung einer Sechseckseite übergehen kann. Diese Sechseckseite erscheint aber in der ζ-Ebene immer kleiner und kleiner, je näher dieselbe sich bereits an der Peripherie des Einheitskreises befindet, da ja die absoluten Längen der Sechseckseiten fest bleiben.

Es werde nun der durch die normierte α-Zerlegung ausgeschöpfte Teil der Raumform R mit R^* bezeichnet, wobei dann R^* nur von inneren Punkten der Raumform R gebildet wird. Das vollständige Bild von R^*, das die Größe ζ entwirft, besteht nun offenbar aus unendlich vielen unendlich-vielseitigen Spitzenpolygonen der Art $A^{(\infty)}$, die zusammen in der ζ-Ebene offenbar ein einfach zusammenhängendes konvexes Gebiet A^* liefern. R^* liefert somit als Abwicklungsbild den konvexen Bereich A^*, der nur von vollständigen Orthogonalkreisbögen begrenzt sein kann, wenn von den auf dem Einheitskreis liegenden weiteren Begrenzungspunkten abgesehen wird.

Unsere Behauptung ist nun, daß A^* dann und nur dann mit der Fläche des Einheitskreises ($|\zeta| < 1$) identisch ist, wenn die Raumform eine solche des zweiten Typus ist; daß jedoch im anderen Falle, wenn R eine Raumform des dritten Typus ist, der Bereich A^* identisch ist mit demjenigen Teil E^* der Einheitskreisfläche, den man erhält, indem man über den Diskontinuitätsintervallen des Einheits-

kreises die orthogonalen Kreisbögen errichtet, womit dann zugleich gesagt ist, daß in diesem Fall A^* ein unendlich-vielseitiges Spitzenpolygon ist.

Zur Begründung des Vorstehenden stellen wir zunächst fest, daß der Bereich A^* durch die Substitutionen der Fundamentalgruppe immer nur in sich selbst transformiert wird. Denken wir nämlich an die topologische α-Zerlegung der Raumform, und denken wir uns jedes α-Element durch drei Querschnitte in zwei einfach zusammenhängende Sechsecke zerlegt, wie früher (Nr. 37), so erhalten wir eine topologische Sechseckzerlegung. Diese topologische Sechseckzerlegung überträgt sich auf die ζ-Ebene als eine Sechseckparzellierung des ganzen Innern des Einheitskreises, wobei keine Häufungssingularitäten innerhalb des Einheitskreises auftreten. Jedes solche Sechseck geht durch die Substitutionen der Fundamentalgruppe in unendlich viele andere, voneinander getrennte Sechsecke über, entsprechend den verschiedenen Substitutionen der Fundamentalgruppe. Nun machen wir wieder die Bemerkung, daß die Substitutionen der Fundamentalgruppe zwischen den korrespondierenden normierten Sechsecken genau die entsprechende Zuordnung vermitteln. Der Bereich A^* erscheint aber in lauter normierte Sechsecke zerlegt. Die normierten Sechsecke füllen geradezu den Bereich A^* aus. Damit ist schon klar, daß A^* als Ganzes durch die Substitutionen der Fundamentalgruppe in sich übergeht.

Jetzt möge angenommen werden, daß wir es mit einer Raumform des zweiten Typus zu tun haben. Wäre in diesem Falle A^* nicht mit dem ganzen Innern des Einheitskreises identisch, so würden die Peripherieintervalle des Einheitskreises, an welche A^* nicht herantritt, die also von den begrenzenden Bögen des Bereiches A^* überspannt werden, durch die Substitutionen nur unter sich ausgetauscht. Diejenigen Substitutionen nun, die dann etwa ein solches Intervall festlassen würden, würden eine Untergruppe ohne infinitesimale Substitutionen bilden, die in dem betreffenden Intervall notwendig eigentlich diskontinuierlich wäre. Dann wäre aber die Fundamentalgruppe selbst für das betreffende Intervall eigentlich diskontinuierlich. Das widerspricht der Annahme des zweiten Typus für die Raumform.

Wir betrachten andererseits den Fall einer Raumform des dritten Typus. Wir zeigen jetzt, daß A^* mit E^* identisch ist. Der Bereich A^* zerfällt in unendlich viele unendlich-vielseitige Spitzenpolygone $A^{(\infty)}$, die von den normierten α-Elementen herrühren. Man kann daher den Bereich A^* sich in der Weise aufgebaut denken, daß man nacheinander in einer passend gewählten Ordnung Bereiche $A^{(\infty)}$ nebeneinander legt, wobei in jedem Stadium wieder ein unendlich-vielseitiges Spitzenpolygon sich einstellt. Die begrenzenden Orthogonalbögen eines solchen zusammengesetzten Teilbereiches von A^* verbinden stets zwei Fixpunkte der Gruppe miteinander, die im einzelnen Falle entweder einer hyperbolischen Substitution oder einer Gleitspiegelung angehören. Die Fixpunkte der Substitutionen der Gruppe gehören nun aber zu den Grenzpunkten der Gruppe. Daraus folgt, daß unser zusammengesetzter Bereich in jeder Stufe Teilbereich des Bereiches E^* ist. Es ist folglich auch richtig, daß A^* selbst Teilbereich von E^* ist.

Wir nehmen nun an, es sei E^* doch umfassender als A^*. Dann gäbe es einen Grenzpunkt der Gruppe außerhalb A^*. Jeder Grenzpunkt ist nun entweder direkt ein Fixpunkt einer Gruppensubstitution oder ein Häufungspunkt von Fixpunkten(*). Denn die Menge der Fixpunkte (Untermenge der Grenzpunktmenge) geht durch die Gruppe in sich über. Die von den Fixpunkten freigelassenen Intervalle wären daher als invariante Intervallmenge notwendig mit den Intervallen der eigentlichen Diskontinuität auf dem Einheitskreis identisch; womit(*) dargetan ist. Beiläufig ist auch jeder Fixpunkt dann notwendig Häufungspunkt von Fixpunkten, wie sich sofort aus der Iteration der betreffenden den Fixpunkt besitzenden Substitution ergibt.

Wir sehen: wenn A^* nicht mit E^* identisch wäre, so läge außerhalb A^* und auch nicht auf der Grenze von A^* sicher mindestens ein Häufungspunkt von Fixpunkten der Gruppe. Andererseits wollen wir nunmehr zeigen, daß jeder Fixpunkt unzweifelhaft Grenzpunkt von A^* ist. Jeder Fixpunkt gehört ja zu einer Substitution der Fundamentalgruppe. Diese Substitution entspricht aber der Durchlaufung eines gewissen geschlossenen Weges W in der Raumform. Bei Durchlaufung dieses Weges wird man, von einem Punkt eines gewissen Sechseckes der topologischen Zerlegung ausgehend, zu dem ursprünglichen Sechseck zurückkehren. In der Überlagerungsform wird man jedoch zu einem anderen Sechseck der topologischen Zerlegung zurückkehren. Man hat dann den Satz, daß die beiden so bezeichneten Sechsecke durch die betrachtete Substitution ineinander übergehen. Dieselbe Substitution führt dann aber auch die normierten Sechsecke ineinander über. Das Entsprechende gilt auch von den Wiederholungen der Substitution. So sehen wir, daß den Iterationen der Substitution und ihrer Inversen eine Kette normierter Sechsecke entspricht, die nun ihrerseits sicher in A^* gelegen ist. Mithin gehören die Fixpunkte der Substitution sicher der Begrenzung von A^* an. Es entspricht danach dem topologischen geschlossenen Wege W eine homotope Rückkehrgerade, die ganz innerhalb R^*, d. i. innerhalb des Innenteiles der Raumform R verläuft.

Durch unsere vorstehende Betrachtung ist erwiesen, daß bei dem dritten Typus $A^* = E^*$ ist.

Die Fundamentalgruppe führt ($A^* = E^*$) in sich über. Wir behaupten, daß bei jeder Substitution der Fundamentalgruppe, die von der identischen Substitution verschieden ist, ein vollständiger Seitenaustausch stattfindet, d. h. daß keine Begrenzungsseite dieses Spitzenpolygons in sich transformiert wird. In der Tat würde man andernfalls sofort folgern können, daß es in diesem Falle eine eigentlich diskontinuierliche Untergruppe ohne infinitesimale Substitutionen gäbe, die eine Seite festlassen würde. Die betreffenden Substitutionen müßten dann die Seite gleichlaufend in sich überführen, da anderenfalls ein Fixpunkt auf der Seite auftreten würde. Sie könnten danach nur hyperbolische Substitutionen mit den Endpunkten der Seite als Fixpunkten sein, da sie als Gleitspiegelungen A^* als ganzes offenbar nicht in sich überführen würden. Die erwähnte Untergruppe würde also aus den Potenzen einer einzigen hyperbolischen Substitution gebildet. Das würde aber

bedeuten, daß die Raumform eine hyperbolische Öffnung besäße, was wir ausgeschlossen haben.

Den Begrenzungsseiten des Bereichs ($A^* = E^*$) entsprechen, können wir nunmehr sagen, in der Raumform gewisse geradlinige Querschnitte, die wir als Grenzgeraden der Raumform bezeichnen wollen. Jede dieser Grenzgeraden trennt von der Raumform ein Außenstück (Grenzhalbebene) ab, in ähnlicher Weise wie früher durch hyperbolische Öffnungslinien normierte zweifach zusammenhängende Öffnungsstücke (Grenzringe) abgetrennt wurden.

Der durch die Normierung der topologischen Zerlegung entstandene Bereich R^* (Innenteil von R) füllt bei einer öffnungsfreien hyperbolischen Raumform unendlich hoher Zusammenhangsordnung des dritten Typus die Raumform nicht aus, bildet vielmehr nur einen Teil der Raumform, der im allgemeinen von unendlich vielen Grenzgeraden begrenzt wird, die ihrerseits einfach zusammenhängende Grenzhalbebenen von der Raumform abtrennen. Es kann vorkommen, daß es nur eine solche Grenzgerade und entsprechend nur eine Grenzhalbebene gibt, wie wir später an Beispielen erläutern werden. Die Bilder der Grenzhalbebenen in der ζ-Ebene sind Kreisbögenzweiecke, deren jedes von einem vollständigen Orthogonalkreisbogen abgegrenzt wird. Jedes solche Kreisbogenzweieck kann seinerseits keine äquivalenten Punkte enthalten, da die Annahme solcher Punkte bedingen würde, daß das begrenzende Diskontinuitätsintervall des Einheitskreises in sich übergehen müßte, was dann auch der begrenzende Orthogonalkreisbogen tun müßte, von dem wir aber oben das Gegenteil bewiesen haben.

52. Zur **Synthese** der betrachteten hyperbolischen Raumformen übergehend, d. i. derjenigen hyperbolischen Raumformen **unendlich hoher Zusammenhangsordnung**, die **keine Öffnung** besitzen, werden wir nunmehr unter Zugrundelegung einer beliebigen Modellfläche des topologischen Typus und ihrer Zerlegung in α-Elemente für alle zweiufrigen und einufrigen Rückkehrschnitte dieser Zerlegung die absoluten Längen (Längeninvarianten) beliebig vorschreiben können und außerdem die Kompositionsinvarianten längs den zweiufrigen Rückkehrschnitten. Nach diesen Angaben ist der Teil R^* einer Raumform damit konstruktiv bestimmt als ein Aufbau von Doppelsechsecken nach bestimmter, durch das topologische Zerlegungsschema gegebener Regel.

Es ist dann die Frage zu beantworten, ob die so gewonnene R^* bereits eine vollständige Raumform darstellt, oder nur ein Fragment.

Stellt sie eine vollständige Raumform dar, so folgt aus unseren Überlegungen ohne weiteres, daß diese Raumform eine solche des zweiten Typus ist, daß also die Fundamentalgruppe auf dem ganzen Einheitskreis uneigentlich diskontinuierlich ist. Liegt andererseits nur ein Fragment vor, so bedeutet dies, daß insbesondere unser Unendlichkeitspostulat unerfüllt geblieben ist. Im letzteren Falle ist klar, daß das Abwicklungsbild dieses Fragmentes R^*, das wir wieder mit A^* bezeichnen, nur einen Teil des Einheitskreises ausfüllen kann, der sicher von lauter Orthogonalkreisbögen begrenzt wird und durch die Überlagerungsgruppe von R^* in sich übergeführt wird. Diese Gruppe ist dann offenbar auch innerhalb des ganzen Einheitskreises

eigentlich diskontinuierlich. So aufgefaßt definiert sie eine vollständige Raumform R, d. i. mit erfülltem Unendlichkeitspostulat; von dieser R ist ersichtlich das gegebene Fragment R^* der vollständige Innenteil. Hiermit ist auch klar, daß A^* ein unendlichvielseitiges Spitzenpolygon ist und mit dem Bereich E^* der Fundamentalgruppe zusammenfällt. Das zunächst gewonnene Fragment R^* wird durch Hinzufügung der an A^* anstoßenden Zweiecke (Grenzhalbebenen) in die R verwandelt. Diese Raumform ist vom dritten Typus.

Die einzige übrig bleibende Frage ist die nach einem übersichtlichen Kriterium für das Zustandekommen einer Raumform des zweiten oder dritten Typus.

Zur Beantwortung dieser Frage wählen wir in irgendeinem der am Aufbau beteiligten Sechsecke einen Punkt O, dessen eines Bild in der ζ-Ebene wir mit dem Nullpunkt zusammenfallen lassen können. Wir denken uns von dem Ausgangssechseck bzw. Doppelsechseck aus die allmähliche Ausschöpfung von R^* im Sinne einer Hauptdarstellung $R^* = \lim_{n\to\infty} R_n^*$ vorgenommen. In jeder Stufe (n) haben wir dann ein Gebilde, das nur aus endlich vielen Elementen zusammengesetzt ist. Die Berandung von R_n^* hat von o einen kürzesten Abstand d_n. Offenbar ist nun notwendig und hinreichend für das Zustandekommen des zweiten oder dritten Typus im ersten Falle die Konvergenz der mit dem Index n wachsenden Längen d_n gegen eine endliche Grenze, im zweiten Falle ihre Divergenz.

Die Größe d_n für R_n ist leicht bestimmbar, wenn R_n, wie hier angenommen wird, aus seinen Elementen aufgebaut vorliegt. Wir haben dann nämlich in der ζ-Ebene ein Abwicklungsbild $A_n^{(\infty)}$ von R_n^*. Dieses Abwicklungsbild läßt erkennen, daß es unter den unendlich vielen Loten, die man vom Punkt $\zeta = o$ auf die begrenzenden Orthogonalkreisbögen von $A_n^{(\infty)}$ fällen kann, ein kleinstes Lot gibt; und es ist dieses kleinste Lot auch wirklich konstruierbar. Hat man nämlich zunächst irgendein Lot gefällt, so kann man leicht aus den Daten der Aufbausechsecke von R_n berechnen bzw. konstruktiv ermitteln, daß, abgesehen von einer endlichen Anzahl der begrenzenden Orthogonalkreisbögen von $A_n^{(\infty)}$, alle anderen Seiten einen Abstand vom Nullpunkt haben, der größer als jener gewählte Abstand ist. Der für uns wichtigste kürzeste Abstand bleibt dann nur unter endlich vielen auszusuchen.

Beispiel. Es sei eine der Einfachheit halber öffnungsfrei angenommene Raumform synthetisch durch ihre Invarianten gegeben. Wir unterscheiden zwischen den Längeninvarianten (Längen der Randlinien der α-Elemente) und den numerischen Invarianten (Kompositionsinvarianten). Bleiben die Längeninvarianten in ihrer Gesamtheit alle unter einer endlichen Schranke, so behaupten wir, daß die Raumform eine solche des zweiten Typus ist, d. i. eine solche, deren Fundamentalgruppe auf dem Einheitskreis nirgends eigentlich diskontinuierlich ist. In der Tat würde bei Annahme des Gegenteils sich ein Gebiet $A^* = E^*$ ergeben, und die Fundamentalgruppe würde durch jede ihrer Substitutionen einen vollen Seitenaustausch dieses Gebietes bewirken, so daß keine Seite festbleibt; ausgenommen ist dabei lediglich die identische Substitution. Andererseits folgt

aus der Zusammensetzung des Gebietes A aus unendlich-vielseitigen Spitzenpolygonen $A^{(\infty)}$, die von den α-Elementen herrühren, daß jede Seite von A^* Häufungslinie einer Folge von Seiten der Näherungsbereiche $A_n^{(\infty)}$ ist. Nun sind diese Seiten von $A_n^{(\infty)}$ sämtlich Abwicklungen von Randlinien von α-Elementen des Aufbaues. Auf jeder solchen Linie sind also äquivalente Punkte zu finden, deren absoluter Abstand unterhalb der angenommenen endlichen Schranke liegt. Daraus ergibt sich aber, daß es auf jeder Seite von A^* äquivalente Punkte gibt, was, wie wir wissen, nicht möglich ist.

53. Die ganz allgemeine Unterscheidung zwischen den hyperbolischen Raumformen des zweiten und dritten Typus[1] gewinnt einen besonders bemerkenswerten Charakter, wenn wir uns klarmachen, daß wir durch Anwendung eines Quotienten zweier Poincaréschen Reihen gleicher Dimension $\leqq -4$ den Übergang von jeder hyperbolischen Fundamentalgruppe des dritten Typus zu einer berandeten Riemannschen Fläche machen können, die allgemein gesprochen, teils von geschlossenen regulären Linien, teils von offenen regulären Linien begrenzt wird, die beide von den Diskontinuitätsintervallen auf dem Einheitskreis herrühren. Wir sehen so, daß jede hyperbolische Raumform des dritten Typus äquivalent ist einer Riemannschen Fläche mit wahrer »freier« Berandung. Die so gewonnene Riemannsche Fläche bietet dabei ein Maximum wahrer freier Berandung in dem Sinne dar, daß jede andere mit ihr äquivalente Riemannsche Fläche, sofern sie überhaupt auch freie reguläre Berandung besitzt, in solcher mit der Äquivalenz gesetzter Abbildungsbeziehung zur ersteren steht, daß die vorhandene freie reguläre Berandung der letzteren Fläche eineindeutig regulär auf einen Teil, im günstigsten Falle auf das Ganze der freien regulären Berandung der ersteren Riemannschen Fläche bezogen wird. Hat umgekehrt irgendeine gegebene Riemannsche Fläche freie reguläre Berandung, so liefert sie eine hyperbolische Raumform des dritten Typus. Wir können demnach sagen in einem nicht mißzuverstehenden Sinne, daß die hyperbolischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten des dritten Typus diejenigen offenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind, die eine ideale freie Berandung besitzen, womit eben eine Berandung gemeint ist, die durch passende Abbildung tatsächlich realisiert werden kann. Die volle ideale freie Berandung kann auf dem Wege über die Uniformisierung unter Anwendung Poincaréscher Reihen in der geschilderten Weise mit einem Schlage realisiert werden.

Eine Riemannsche Fläche, deren unmittelbar mit der Riemannschen Fläche gegebene freie reguläre Berandung zugleich die volle ideale Berandung derselben realisiert, heißt regulär komplett (kurz komplett). In diesem Sinne wären alle geschlossenen Riemannschen Flächen sowie alle offenen Riemannschen Flächen des zweiten Typus eo ipso komplett. Hingegen wäre eine Riemannsche Fläche des dritten Typus in der Regel nicht komplett. Stets kann man aber von dieser durch eineindeutige konforme Abbildung zu einer äquivalenten Riemannschen Fläche übergehen, die komplett ist. Alsdann werden wir zwischen den geschlossenen freien regulären Rand-

[1] Vgl. die Bemerkungen der Nummer 53 mit Nr. 39 der Preisschrift (Acta math. Bd. 50).

linien und offenen freien regulären Randlinien zu unterscheiden haben. Die ersteren entsprechen genau den vorhandenen hyperbolischen Öffnungen der durch die RIEMANNSCHE Fläche dargestellten RIEMANNSCHEN Mannigfaltigkeit, die letzteren den vorhandenen Halböffnungen. Bei ersteren tritt zur geschlossenen regulären Linie eine geschlossene Rückkehrgerade hinzu, die mit ersterer die betreffende hyperbolische Öffnung abgrenzt, bei letzteren zur einzelnen offenen freien regulären Begrenzungslinie eine Grenzgerade innerhalb der RIEMANNSCHEN Fläche, die mit ersterer zusammen die betreffende Halböffnung (Grenzzweieck der ζ-Ebene) abgrenzt.

54. Wir kehren zurück zur **Synthese** der offenen Raumformen **unendlich hoher Zusammenhangsordnung**. Zu erledigen sind noch diejenigen Raumformen, die **hyperbolische oder parabolische Öffnungen** besitzen. In diesem Falle knüpfen wir wieder an die von uns in der ersten Mitteilung gewonnenen topologischen Ergebnisse an. Danach kann jede solche Raumform topologisch im Sinne einer Hauptdarstellung zerlegt werden, wobei nur Elemente (α), (β), (γ) vorkommen, wozu noch Öffnungsstücke hinzutreten. Indem wir in einer solchen Zerlegung alle diejenigen Öffnungslinien löschen, die parabolische Öffnungen der Raumform abgrenzen, gewinnen wir eine neue Zerlegung, die, abgesehen von eigentlich inneren Elementen (α), (β), (γ) (die übrigens auch ganz in Wegfall kommen können)[1], nur noch hyperbolische, zunächst unnormierte Öffnungen und weiter dreifach zusammenhängende Grenzelemente (parabolische Elemente) mit mindestens einer, höchstens zwei parabolischen Öffnungen besitzt, die jetzt als Ganzes dem Element angehören.

Nach dieser leichten Umgestaltung der topologischen Zerlegung haben wir eine solche Zerlegung gewonnen, die wir ohne weiteres wieder der Normierung unterwerfen können. Diese normierte Zerlegung, bei der jedes der oben genannten Elemente (β) und (γ) in bekannter Weise noch in α-Elemente zerlegt gedacht werden kann, führt nun wieder dazu, einen Innenteil R^* der Raumform R herauszuheben, dessen Auftreten als wirklicher, nicht mit R identischer Teil der ganzen Raumform davon abhängig ist, ob die Raumform vom dritten Typus oder vom zweiten Typus ist. Das ζ-Bild von R^* ist eben wieder der Bereich ($A^* = E^*$) des ζ-Einheitskreises, der von den über den Diskontinuitätsintervallen der Peripherie errichteten Orthogonalkreisbögen abgegrenzt wird. Es sind hiernach dem Innenteil R^* angehörend zu betrachten alle inneren normierten α-Elemente von R, ferner alle normierten parabolischen Elemente, die nämlich die parabolischen Öffnungen aufnehmen. Wiederum ergibt sich ohne prinzipielle neue Schwierigkeiten der Beweisführung auch die Möglichkeit des Zustandekommens von Grenzgeraden und Grenzhalbebenen der Raumform. Solche Halbebenen müssen bei Raumformen des dritten Typus jedenfalls dann auftreten, wenn hyperbolische Öffnungen und also Grenzringe fehlen.

Die Synthese der Raumformen unendlich hoher Zusammenhangsordnung mit Öffnungen ist nach dem Vorstehenden klar. Nehmen hyperbo-

[1] Vgl. die Bemerkung (*) auf S. 437.

lische Öffnungselemente am Aufbau teil, so kommt unbedingt eine Raumform des dritten Typus zustande. Nehmen aber keine hyperbolischen Öffnungen teil, so hängt das Zustandekommen einer Raumform des dritten Typus davon ab, ob die monotone Folge der d_n, die auch jetzt leicht zu bilden ist, gegen eine endliche Grenze konvergiert oder divergiert. Werden bei der Bestimmung der Größen d_n die vorhandenen hyperbolischen Öffnungslinien außer Betracht gelassen, so ist die Endlichkeit des Grenzwertes der d_n immer die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die durch den Aufbau gewonnene Raumform Grenzhalbebenen besitzt.

55. Wir betrachten zum Schluß einige **Beispiele** zunächst schlichter Bereiche, dann in Nr. 56 mehrblättriger Bereiche unendlich hoher Zusammenhangsordnung.

a) Eine Raumform unendlich hoher Zusammenhangsordnung werde in Form einer Riemannschen Fläche definiert, indem man die z-Ebene mit unendlich vielen Punktierungen versieht, die sich nur gegen den unendlich fernen Punkt häufen. Wir wissen, wie man zu einer solchen Riemannschen Mannigfaltigkeit das absolute Linienelement bzw. die Uniformisierende durch Anwendung von Iterationsketten gewinnen kann, indem man etwa, zunächst zwei der endlichen Punktierungen in Verbindung mit dem unendlich fernen Punkt allein berücksichtigend, die dazugehörende Uniformisierende (Modulfunktion) durch eine Iterationsmethode bestimmt, weiter die dann gewonnene Kreisfläche ($|z'| < 1$) mit den nunmehr einzuzeichnenden unendlich vielen Punktierungen, die sich nur gegen die Peripherie häufen, ihrerseits durch eine Iterationskette uniformisiert.

Zwei Raumformen der beschriebenen Art können nur in der Weise äquivalent sein, daß der Übergang von der einen zur anderen durch eine ganze lineare Transformation bewirkt wird. Denn eine angenommene konforme eineindeutige Beziehung zwischen zwei solchen Gebieten muß an den Punktierungsstellen stetig, daher auch regulär sein, so daß sie eine reguläre eineindeutige Abbildung der ganzen endlichen Ebene auf sich selbst darstellt.

Die definierten Raumformen sind ferner, behaupten wir, immer hyperbolische Raumformen vom zweiten Typus. Jedenfalls ist eine solche Raumform wegen ihres unendlich hohen Zusammenhangs zunächst sicher eine hyperbolische Raumform. Wäre sie weiter vom dritten Typus, so würden wir einen Punkt ζ^* eigentlicher Diskontinuität auf dem ζ-Einheitskreis haben, den wir durch einen kleinen orthogonalen Kreisbogen isolieren können. In dem abgegrenzten Zweieck würde, wenn es genügend klein gewählt ist, die Funktion $z(\zeta)$ jeden Wert, den sie annimmt, nur einmal annehmen. Sie müßte sich ferner bei Annäherung der Variablen ζ an das begrenzende Peripherieintervall des Zweiecks gleichmäßig dem Werte unendlich nähern, so daß der reziproke Wert sich gleichmäßig dem Werte null nähern würde. Dann aber müßte die Funktion $z(\zeta)$ eine Konstante sein, die den Wert null hat. Tatsächlich ist aber $z(\zeta)$ keine Konstante.

Da die Raumform als eine solche des zweiten Typus erkannt ist, können wir nun weiter folgendes behaupten. Wird eine topologische Zerlegung der in der angegebenen Weise punktierten z-Ebene in dreifach zusammenhängende Ele-

mente vorgenommen, indem man etwa zunächst zwei Punktierungen umschließt, darauf eine weitere usf., so liefert die entsprechende normierte Zerlegung ein reguläres Liniensystem der z-Ebene, das im Endlichen keine Häufung aufweist, vielmehr die ganze z-Ebene ausschöpft. Wir haben hier ein Beispiel, wo bei der Zerlegung, so wie sie hier gewählt wurde, kein einziges inneres Element vorkommt, sondern nur parabolische Grenzelemente (*).

b) Es wird an Stelle der im vorhergehenden Beispiel betrachteten ganzen z-Ebene nur die Fläche $|z| < 1$ zugrunde gelegt und mit unendlich vielen Punktierungen versehen, die sich gegen die ganze Peripherie häufen. Die zugehörende Größe ζ und das absolute Linienelement werden dann wieder sofort durch eine Iterationskette gewonnen. Ferner ergibt sich nach Analogie einer vorhergehenden Betrachtung sofort, daß zwei solche Flächen nur in der Weise äquivalent sein können, daß sie durch eine lineare Transformation ineinander übergeführt werden, die die Fläche des Einheitskreises in sich transformiert.

Wir behaupten, daß jede solche RIEMANNsche Fläche dem zweiten Typus angehört. Andernfalls würde man z. B. durch Anwendung eines unendlichen Produktes oder eines Quotienten von POINCARÉschen Reihen von der Größe ζ zu einer mit der gegebenen äquivalenten RIEMANNschen Fläche übergehen können, die ein freies reguläres Randstück besitzt. Faßt man diese Fläche als RIEMANNsche Mannigfaltigkeit auf und schließt die parabolischen Öffnungen ab, indem man sie auf die schlichte Umgebung des Nullpunktes hilfsweise abgebildet denkt, so kann man diese Fläche ihrerseits auf das Innere des Einheitskreises abbilden nach dem Fundamentalsatz der konformen Abbildung. Dabei muß dem freien Randteil ein freies Intervall des Einheitskreises regulär entsprechen, weil man ja die betreffende Fläche über einen regulären Randteil hinweg auf ihrer Rückseite symmetrisch fortsetzen könnte, wobei dann eine Fundamentalabbildung des Ganzen entstehen würde, die den freien Randteil einem orthogonalen Kreisbogen entsprechen ließe. Von da aber würde sich elementar wieder die erwähnte Abbildung der Fläche selbst (ohne Rückseite) mit der behaupteten Regularität längs des freien Randteiles ergeben. Die ursprüngliche schlichte Fläche $|z| < 1$ mit ihren Punktierungen wäre nunmehr auf eine ebensolche Fläche mit freiem Peripherieteil abgebildet, was nicht möglich ist, da eine solche Abbildung, wie bemerkt, sicher nur durch eine lineare Transformation bewirkt werden kann.

Als Folgerung dieses Ergebnisses findet sich, daß eine Ausschöpfung der punktierten Fläche ($|z| < 1$) analog dem Falle a) in der Normierung ebenfalls eine singularitätenfreie volle Ausschöpfung der Fläche ($|z| < 1$) durch geschlossene reguläre Linien liefert.

Anmerkung: Das erwähnte unendliche Produkt liefert übrigens unmittelbar eventuell nur im Sinne bedingter Konvergenz die Abbildung auf die punktierte Fläche des Einheitskreises, was jedoch hier nicht näher begründet zu werden braucht, nachdem die Abbildung selbst jedenfalls sichergestellt ist.

c) Wir betrachten von neuem die Fläche ($|z| < 1$) und denken sie uns irgendwie punktiert, so jedoch, daß die Punktierungen sich nur

gegen die Peripherie häufen, daß andererseits nicht alle Peripheriepunkte Häufungspunkte werden. Dann liegen auf der Peripherie endlich oder abzählbar unendlich viele freie Intervalle. Wir bemerken dann wieder, daß zwei solche Flächen nur vermöge linearer Transformation äquivalent sein können. Ferner bemerken wir, daß die Uniformisierung wieder durch eine Iterationskette geleistet wird, wobei sich sofort zeigt, daß die betreffende Riemannsche Mannigfaltigkeit vom dritten Typus ist. Weiter ergibt sich, daß jede solche Fläche, wie auch jede Fläche (*a*) und (*b*), komplett ist, d. h. daß ihre tatsächliche freie Berandung den Diskontinuitätsintervallen auf dem ζ-Einheitskreis voll entspricht. Die Annahme des Gegenteils würde nämlich nach den vorhergehenden Ausführungen sofort den Übergang zu einer neuen äquivalenten Fläche ($|z| < 1$) derselben Art ermöglichen, die wirklich komplett ist; diese müßte aber aus der gegebenen durch lineare Transformation entstehen.

Schöpfen wir nun die Fläche durch geschlossene Linien in wiederholt geschilderter Weise aus, so findet sich eine Normierung dieser Zerlegung, bei der die normierten geschlossenen Parzellierungslinien nicht den Einheitskreis ausschöpfen, vielmehr ebenso viele von regulären Querschnitten des Einheitskreises (Grenzgeraden) begrenzte Halböffnungen freigelassen werden, als freie Randintervalle existieren, (vgl. Fig. 60, wo die stark gezeichneten Randpunkte die Häufungspunkte der inneren Punktierungen sind, darunter eine ganze Häufungsstrecke).

Fig. 60.

56. Beispiel d) Wir gehen wieder von der ganzen z-Ebene aus und konstruieren darüber diejenige zweiblättrige Riemannsche Fläche, deren Windungspunkte als eine unendliche, nur gegen den Punkt ∞ sich häufende Gesamtheit gegeben sei. Diese Fläche ist durch ihre Windungspunkte eindeutig bestimmt, ihre Uniformisierung durch Iterationsmethoden bietet keine Schwierigkeit. Sie ist vom topologischen Typus $(A, \infty, 1)$. Sie ist ferner eine hyperbolische Raumform vom zweiten Typus, was nach Analogie von a) bewiesen wird.

Zwei solche Flächen können nur vermöge ganzer linearer Transformationen äquivalent sein. Denken wir uns nämlich einen solchen Fall vorliegend und werde dann statt ∞ der Nullpunkt als Häufungspunkt gedacht, während ∞ innerer Punkt sein soll. Sei $z'(z)$ die abbildende Funktion. Diese ist über der gewöhnlichen z-Ebene zweideutig. Summe und Produkt der beiden Zweige sind eindeutige Funktionen, die insbesondere im Nullpunkt stetig in null übergehen, also auch dort regulär sind. Sie sind insbesondere rationale Funktionen höchstens zweiten Grades. Also hat die Funktion $z'(z)$ nur endlich viele Verzweigungspunkte. Daraus folgt, daß $z'(z)$ für gewisse Windungspunkte der zweiblättrigen Riemannschen Fläche der z-Ebene in beiden Blättern denselben Wert hat, daß sie daher aus Gründen der analytischen Fortsetzung überhaupt eindeutig sein muß, also rational, also ersichtlich linear.

Die ausschöpfenden Linien können wir jetzt analog den bei a) gezogenen wählen, jedoch jede in beiden Blättern ziehen, wobei, wenn immer

ein Windungspunkt nach dem anderen einbezogen wird, die Linien abwechselnd durch beide Blätter mit sich selbst koinzidierend laufen oder zu Paaren übereinander liegend koinzidieren. Die normierten Linien bewahren dann die erwähnten Koinzidenzen und schöpfen die ganze Fläche tatsächlich aus.

e) und f) Zweiblättrige Fläche ($|z|<1$) mit unendlich vielen Windungspunkten, die sich nur gegen die Peripherie des Einheitskreises häufen, wie die Punktierungen in (*b*) bzw. (*c*) (topologischer Typus $(A, \infty, 1)$. Es gelten die dem Fall b) und c) ganz analogen, sofort erkennbaren Behauptungen und Argumentationen. Eine wesentlich neue Betrachtung ist nur nötig, um die Linearität jeder Äquivalenzabbildung zweier solcher Flächen aufeinander zu beweisen.

Wir denken uns dazu die beiden aufeinander abgebildeten Flächen so transformiert, daß der unendlich ferne Punkt beide Male innerer Punkt ist, daß ferner als Begrenzung statt des Einheitskreises die geradlinige endliche Strecke von (-1) nach $(+1)$ tritt.

Wenn die Beziehung $z'(z)$ zwischen den ursprünglich kreisförmig begrenzten Flächen übereinanderliegende Punkte immer wieder übereinanderliegenden Punkten zuordnet, so ist klar, daß wir es mit einer linearen Transformation zu tun haben. Wird angenommen, daß das nicht der Fall ist, so können wir annehmen, daß in der nunmehr transformierten Ebene zwei verschiedene Pole erster Ordnung der neuen Funktion $z'(z)$ auftreten. Die beiden symmetrischen Grundfunktionen der Zweige sind dann zwei eindeutige Funktionen mit zwei Polen erster Ordnung, die außerdem bei Annäherung an die Grenzstrecke sich beschränkt verhalten und reellen Werten zustreben. Das Bild, welches eine solche symmetrische Funktion von der schlichten in der angegebenen Weise aufgeschlitzten z-Ebene entwirft, ist somit eine Fläche, die nur zweimal den unendlich fernen Punkt schlicht überdeckt, im übrigen notwendig die ganze Ebene, abgesehen von einer endlichen, auf der Achse des Reellen enthaltenen Strecke überall zweiblättrig bedeckt. Diese Bildfläche kann dann nur endlichviele Windungspunkte aufweisen, da sie ja einfach zusammenhängend ist. Sie wird also von einem Streckenzuge begrenzt, der sich als freier Rand darbietet. Unter diesen Umständen muß sich die betrachtete Funktion auf dem Begrenzungsschlitz der z-Ebene notwendig beiderseits regulär verhalten. Man kann dies jedenfalls behaupten, sobald gezeigt ist, daß es auch nur eine einzige Funktion gibt, die zwischen den beiden in Betrachtung stehenden Flächen eine eineindeutige Abbildung der inneren Punkte leistet und dabei zugleich auf dem Rande regulär ist. Eine solche Funktion gibt es aber. Man gewinnt sie, wenn man die beiden aufeinander bezogenen Flächen über ihre Begrenzung hinweg spiegelbildlich fortsetzt, so daß man zwei geschlossene Flächen vom Geschlecht null erhält. Diese können nach dem Fundamentalsatz der konformen Abbildung je auf die Kugelfläche abgebildet werden, wobei den beide Hälften gegeneinander abgrenzenden Symmetrielinien Kreise entsprechen müssen. Dann kann man aber auch eine Abbildung herstellen, die die ganzen geschlossenen Flächen

so aufeinander abbildet, daß dabei die beiden Originalhälften sich gegenseitig entsprechen.

Anmerkung: Selbstverständlich hätte man sich auch des Satzes bedienen können, daß der Imaginärteil längs des Schlitzes von (-1) bis $(+1)$ der z-Ebene beschränkt ist und gegen null geht; infolgedessen dann nach dem Spiegelungsprinzip der Potentialfunktionen die analytische Fortsetzbarkeit und Regularität auf dem Schlitz selbst geschlossen werden kann.

Nach den gewonnenen Ergebnissen steht jetzt fest, daß die beiden betrachteten symmetrischen Grundfunktionen der Zweige der Funktion $z'(z)$ elementare algebraische Funktionen sind, daß mithin die Beziehung $z'(z)$ eine elementare algebraische Beziehung ist, was wir auch auf die ursprünglichen kreisförmig begrenzten Flächen übertragen können.

Hiernach lassen sich nicht nur ein, sondern sogar unendlich viele Windungspunkte der z-Fläche angeben, wo die ursprüngliche Funktion $z'(z)$ regulär ist, also in beiden Blättern des zugehörenden Windungsflächenstückes denselben Wert annimmt. Dann ist aber erkannt, daß $z'(z)$ überhaupt eine eindeutige Funktion ist, was nun auch umgekehrt für $z(z')$ behauptet werden kann. Demnach ist $z'(z)$ eine lineare Funktion, die das Innere des Einheitskreises in sich transformiert. —

Andere Methode des Linearitätsbeweises. Die soeben gebotene Beweismethode ist, wie man leicht bemerkt, auch auf überall m-blättrige Flächen über dem z-Einheitskreise ausdehnungsfähig. Eine andere Methode der Beweisführung, die allerdings diese Ausdehnungsfähigkeit nicht besitzt, dürfte trotzdem von Interesse sein.

Wir nehmen an, es möge die Abbildung $z'(z)$ koinzidierenden Punkten nicht allgemein wieder koinzidierende Punkte zuordnen. Dann können wir den Fall so gestalten, daß von den beiden über dem Nullpunkte der z-Ebene liegenden Punkten der eine einen Bildpunkt liefert, der mit dem Nullpunkte der z'-Ebene koinzidiert, der andere hingegen einen mit diesem Punkte nicht koinzidierenden gewöhnlichen Punkt. Nunmehr werde die Funktion $\frac{z'(z)}{z}$ betrachtet. Diese hat genau eine Nullstelle erster Ordnung und genau eine Unendlichkeitsstelle erster Ordnung. Die Werte, welche diese Funktion bei gleichmäßiger Annäherung an den z-Einheitskreis erhält, nähern sich ihrem absoluten Betrage nach gleichmäßig dem Werte 1. Das bedeutet, daß die zweiblättrige Fläche der z-Ebene durch die Funktion $\frac{z}{z'}$ auf eine Fläche übertragen wird, die den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt nur einfach bedeckt und infolge der bemerkten Eigenschaft der Randabbildung ihre Blätterzahl weder innerhalb noch außerhalb des Einheitskreises der Bildebene ändern kann. Die Abbildung erfolgt daher auf einen schlichten Bereich, der den Nullpunkt und Unendlichpunkt in seinem Innern enthält. Nun ist aber die Riemannsche Fläche der z-Ebene sicher nicht schlichtartig, so daß ein Widerspruch vorliegt.

Die letzt geschilderte Beweismethode läßt sofort erkennen, daß der Linearitätssatz auch für solche zweiblättrigen Flächen über der Fläche des

Einheitskreises gilt, deren Windungspunktzahl endlich, und zwar größer oder gleich 3 ist.

Anmerkung: Bei zweiblättrigen RIEMANNschen Flächen über der ganzen endlichen Ebene hat man sofort den Übergang zu geschlossenen zweiblättrigen Flächen vermöge Abschließung der gegebenen Flächen im Unendlichen. Es ergibt sich, daß die Abbildungsbeziehung hier nur durch eine ganze lineare Transformation vermittelt werden kann, wenn die Zahl der endlichen Windungspunkte größer oder gleich 3 ist.

Bemerkung: Je zwei der unter (a) bis (f) fallenden RIEMANNschen Flächen können nur durch lineare Transformationen eineindeutig konform aufeinander abgebildet werden. Insbesondere kann eine über der ganzen Ebene ausgebreitete solche Fläche nicht auf eine über dem Einheitskreis ausgebreitete Fläche unserer Art eineindeutig abgebildet werden; was man sofort erkennt, wenn man unmittelbar die symmetrischen Funktionen einer solchen Abbildungsfunktion betrachtet, die beschränkt wären und also Konstanten sein müßten.

55a. Die von uns in den Beispielen betrachteten Raumformen waren als RIEMANNsche Flächen gegeben (Konformmodelle), zu denen die zugehörenden Uniformisierenden und damit die Absolutmessung durch Anwendung von Iterationsketten gewonnen wurde. Unsere Analyse dieser Raumformen, nämlich ihre Zerlegung in Elemente, läßt umgekehrt sofort erkennen, wie der synthetische Elementaraufbau dieser Raumformen vorzunehmen ist, wobei das eventuelle Vorkommnis der zusätzlichen Grenzhalbebenen in seiner Bedeutung bereits allgemein als Unterscheidungskriterium gewürdigt ist.

Es ist nun die Frage, wie man vom gegebenen Elementarmodell zum Konformmodell gelangt, ohne Berufung auf den allgemeinen Fundamentalsatz der konformen Abbildung für einfach zusammenhängende RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten, und wie sich der Unterschied zwischen den in den Ziffern (a) und (b) bzw. (d) und (e) definierten Raumformen von der Seite der Elementarmodelle ausdrückt.

Offenbar erscheinen die Fälle (a) und (b) bzw. (d) und (e) beim synthetischen Aufbau zunächst ungetrennt. Es ergeben sich Fundamentalgruppen des zweiten Typus, d. h. solche, die auf dem ganzen Einheitskreise uneigentlich diskontinuierlich sind. Diese Gruppen lassen nun eine Unterscheidung in folgender Weise zu: Das unendliche Produkt $\Pi' |\omega_n|$, erstreckt über die mit dem Punkte $\zeta = 0$ äquivalenten Punkte ω_n konvergiert oder divergiert, was darauf hinauskommt, daß die Summe der Abstände der Punkte ω_n vom Einheitskreise, $\Sigma (1 - |\omega_n|)$, entweder konvergiert oder divergiert. Im ersten Falle werden wir im Bilde auf die Fläche des Einheitskreises, im letzteren Falle auf die ganze z-Ebene kommen. Der Übergang selbst wird bewirkt durch ein im ersten Falle absolut konvergentes, im zweiten Falle bedingt konvergentes unendliches Produkt. Die absolute Konvergenz tritt natürlich auch bei (c) und (f) ein.

Liegt eine den Fällen (a) oder (b) entsprechende Raumform vor, so geschieht der Übergang zum Konformmodell in wesentlicher Analogie zu den Entwicklungen der Nummern 13—17 der Preisschrift. Einen brauchbaren Fundamentalbereich der Gruppe erhält man, wenn man von den unendlich

vielen parabolischen Öffnungen der Mannigfaltigkeit etwa lauter getrennte Querschnitte nach der einen vorhandenen nicht isolierten Grenze der Mannigfaltigkeit zieht. Die Begrenzung des Fundamentalbereichs, der sich so ergibt, wird von lauter Querschnitten des Einheitskreises gebildet, deren jeder zwei voneinander verschiedene bestimmte Endpunkte auf der Peripherie des Einheitskreises bekommt. Dieser bestimmte Endigungscharakter ist, entsprechend der Einmündung des einzelnen Querschnitts der Mannigfaltigkeit in seine parabolische Öffnung, klar, entsprechend seiner zweiten Endigung gegen die nicht isolierte Begrenzung hingegen eine Folge des Umstandes, daß wir gerade den Fall der vollen Ausschöpfung der Raumform durch die normierten Elemente haben. In bezug auf die durch diesen Fundamentalbereich erzeugte Gruppe Γ mit lauter parabolischen Erzeugenden ist das Produkt $\zeta \cdot \Pi' \frac{\zeta_n}{\omega_n}$ zu bilden, das die Übertragung der Raumform auf das gesuchte Konformmodell leistet.

Der Fall der zweiblättrigen Fläche (Ziffer (d) und (e)) ist grundsätzlich nicht schwieriger. Die durch die Abwicklung der Raumform gelieferte Größe ζ ist eine relativ verzweigte Uniformisierende bezüglich der durch die involutorische Eigenbewegung definierten einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit M, die zum Zwecke der Gewinnung des Konformmodells auf die schlichte Fläche des Einheitskreises bzw. der ganzen endlichen Ebene abzubilden ist. Die Mannigfaltigkeit M weist unendlich viele Verzweigungsstellen (Stigmata) auf, wo die Größe ζ von erster Ordnung verzweigt ist. Wir haben von diesen Stellen aus wieder Querschnitte in der M nach Analogie von vorhin zu ziehen und bekommen dann einen Fundamentalbereich mit lauter elliptischen Randsubstitionen der Periode 2, der die Gruppe erzeugt, in bezug auf welche jetzt das unendliche Produkt anzusetzen ist.

(Fortsetzung zu S. 422.)

Werden die Punktepaare der involutorischen Bewegung je als ein »Punkt« genommen, so entsteht eine mit dem geschlossenen Rand R versehene einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, durch deren Abbildung auf die Kreisscheibe die verlangte Abbildung der $(B, 3, 0)$ auf eine Konformmodellfläche gewonnen wird. — Etwas anders gestaltet sich der Übergang, wenn man die Nr. 45 (S. 415) gegebene Behandlung der offenen $(A, 1, 1)$ als solcher verwendet; dabei würde dann die zu letzterer gehörende Uniformisierende die vermittelnde Rolle übernehmen. — Die letzterwähnte Hauptuniformisierende ζ_1 der $(A, 1, 1)$ ist zugleich auch eine Uniformisierende ζ der $(B, 1, 1)$, nämlich eine solche, deren Variabilitätsbereich von der ganzen Ebene gebildet wird, die dabei mit einer perfekten Menge diskreter Grenzpunkte auf dem Einheitskreise ausgestattet erscheint. Der Übergang zwischen beiden wird durch eine Abbildung vermittelt, bei der der ζ_1-Einheitskreisfläche ein unendlichvielseitiges Spitzenpolygon der ζ-Einheitskreisfläche entspricht. Demnach gelangt man von ζ_1 zu ζ durch eine Iterationskette, von ζ zu ζ_1 durch ein unendliches Produkt.

Hiernach wird klar, wie man den Übergang von ζ zum Konformmodell allein durch Bildung unendlicher Produkte bewerkstelligen kann, deren erstes ζ_1 liefert, das zweite von ζ_1 zu z führt. D. h. wir sind in der Lage, den Zusammenhang zwischen Konformmodell und Elementarmodell der $(B, 3, 0)$ in beiden Richtungen durch organische Rechnungsprozesse zu leisten (2 Produktbildungen bzw. 2 Iterationsketten). Vgl. hierzu Nr. 45, wo die $(A, 1, 1)$ mit hyperbolischer Öffnung behandelt wird.

Adresse an Hrn. Max Rubner zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 25. Juli 1928.

Hochgeehrter Herr Kollege!

An Ihrer heutigen Jubelfeier, da sich ein halbes Jahrhundert vollendet, seit Sie die Doktorwürde erlangten und in den Kreis der Jünger der Wissenschaft eintraten, nehmen wir besonders lebhaften Anteil, bildet doch ein Großteil Ihrer Arbeiten eine Zierde der Veröffentlichungen unserer Akademie.

Ungewöhnlich war der Lauf Ihres akademischen Weges! Beginnend in C. Voits physiologischer Anstalt, wurden Sie auf Grund Ihrer auch für die Gesundheitslehre bahnbrechenden ernährungsphysiologischen Arbeiten schon bald aus der Physiologie heraus auf den Lehrstuhl für Gesundheitslehre an die Universität nach Marburg an der Lahn berufen. Das war die Zeit, in der Sie die Gültigkeit des Gesetzes der Erhaltung der Kraft beim tierischen Stoffwechsel bewiesen und die Lehre vom Stoffwechsel zu einer Lehre vom Kraftwechsel vertieften und erweiterten. Aber die Kraftwechseluntersuchungen blieben nicht das einzige Gebiet, auf dem Sie wichtige Tatsachen und Gesetzmäßigkeiten ans Licht brachten, es gibt vielmehr kein Gebiet der Gesundheitslehre, auf dem Sie nicht Neues geschaffen hätten. Kein Wunder, daß Sie bald mit an der Spitze der Forscher auf dem Gebiet der Gesundheitslehre standen und bei Robert Kochs Abgang als dessen Nachfolger hierher berufen wurden. Grundlegend sind Ihre Untersuchungen über die Lebensbedingungen der Kleinlebewesen, geradezu erschöpfend, durch neue Arbeiten nicht mehr zu überholen, die über die physikalischen Eigenschaften und physikalischen Wirkungen der verschiedenen Kleidungsstoffe und Bekleidungsarten. Stark erweitert wurde Ihr Einfluß in dem von Ihnen vertretenen Fach durch Ihr berühmtes »Lehrbuch der Hygiene«.

Aber Ihre Arbeiten, namentlich die über Ernährung, über die Ausnützung der verschiedenen Nahrungsstoffe und ihre gegenseitige Vertretbarkeit sowie über die Beziehungen des Stoff- und Kraftwechsels zur Körpergröße und Körperoberfläche, die sich alle durch ihre mustergültige Genauigkeit auszeichnen, waren nicht nur für die Gesundheitslehre, sondern auch für die allgemeine Physiologie so hervorragend, daß Sie von dem freilich glänzenden hygienischen Seitenweg wieder auf die als Jüngling von Ihnen gewählte physiologische Laufbahn zurückberufen wurden.

Nach Übernahme des physiologischen Lehrstuhles unserer Universität arbeiteten Sie auf dem Gebiet der Ernährungsphysiologie und dem der tierischen Wärme rastlos und äußerst erfolgreich weiter.

Ein besonderes Verdienst erwarben Sie sich auch durch die Anregung zur Errichtung der Anstalt für Arbeitsphysiologie durch die Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft und als ihr erster Vorstand.

Und niemals darf unser deutsches Volk vergessen, wie Sie, von tiefer Vaterlandsliebe getrieben, im Weltkrieg Ihre ganze Arbeitskraft in den Dienst des Vaterlandes stellten und durch zahlreiche gründliche Untersuchungen über den Nährwert der einzelnen pflanzlichen Nahrungsmittel und ihre Ersatzmöglichkeit wichtigste Aufklärungsarbeit leisteten.

Ganz besonderen Dank endlich schuldet und entbietet Ihnen die Akademie für Ihre nunmehr fast 10jährige Tätigkeit als Beständiger Sekretar. Allen Aufgaben, die sich bei der Leitung unserer Angelegenheiten ergeben, haben Sie sich stets mit voller Hingebung gewidmet, so manche unserer Festsitzungen durch erhebende und belehrende Ansprachen eindrucksvoll gestaltet und unsere Belange im Verkehr mit den deutschen und gegenüber den fremden Akademien umsichtig und wirkungsvoll vertreten.

Mit unserem lebhaften Dank verbinden wir den herzlichen Wunsch, daß Sie in unverminderter Frische und Leistungsfähigkeit, noch lange Jahre an unserer Spitze stehend, der deutschen Wissenschaft und der Preußischen Akademie Ihre hochbewährte Kraft auch weiterhin weihen können.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Beobachtungen am Orangkehlsack[1].

Von R. Fick.

(Vorgetragen am 14. Juni 1928 [s. oben S. 223].)

Hierzu Taf. IV—VI.

Durch die Güte des Hrn. Geheimrat Heck, dem ich auch an dieser Stelle herzlichen Dank dafür aussprechen möchte, erhielt ich die Möglichkeit, an der Leiche des männlichen, einige Jahre im hiesigen Zoologischen Garten gehaltenen Orang aufs neue einen Orangkehlsack zu untersuchen, ein Gegenstand, mit dem ich mich bereits vor 33 Jahren eingehend befaßt hatte[2]. Schon bei seinen Lebzeiten bemerkte ich, daß auch dieser Orang im Besitze eines ganz ansehnlichen Kehlsackes sein mußte, wenn ich ihn auch niemals sich irgendwie aufblähen, sondern nur als schlaffe Wamme unter dem Kinn am Hals herabhängen sah. In den letzten Wochen, wo der Orang deutliche Zeichen entzündlicher Vorgänge in seinen Atemwerkzeugen erkennen ließ, schien der Sack, auch nach Ansicht des Hrn. Kollegen Heck, etwas Flüssigkeit zu enthalten, da er bei Bewegungen mehr hin- und herschwappte als früher.

Das Aussehen des Kehlsackes am Gipsabguß der Leiche vor der künstlichen Blähung des Sackes zeigt Bild 1. Man erkennt an ihm deutlich die seitlichen und unteren Grenzen des Kehlsackes am Hals. Die Behaarung war in seinem Bereich entschieden spärlicher als am übrigen Körper.

Wir füllten nach der Herausnahme der tuberkulösen Brusteingeweide den Kehlsack mit Leimlösung und verbrauchten dazu etwa 6—7 Liter. Dann nahm ich selbst die Darstellung des Halshautmuskels vor, um jede Verletzung des Kehlsackes zu vermeiden, da ich von der Präparation vor 33 Jahren her wußte, wie unangenehm für die Weiterpräparation das Anschneiden des leimgefüllten Sackes ist, wie es damals geschah, da der Präparant in der Achselhöhle ganz unvermutet auf einen Ausläufer des Sackes stieß. Der Halshautmuskel überzog auch hier den ganzen vorderen Teil des Sackes, wie Bild 2 erkennen läßt.

Der Kehlsack erstreckte sich auch bei diesem Orang bis in die beiden Achselhöhlen hinein, und zwar sowohl vor als auch hinter dem Schlüsselbein und überdies in die Nische zwischen dem Kopfnicker und den Zungenbeinmuskeln.

---

[1] Ausführlichere Angaben werden in der Zeitschrift für Säugetierkunde erscheinen.

[2] R. Fick. Vgl. anatom. Untersuchungen an einem erwachsenen Orang. His' Archiv f. Anatomie u. Entwicklungsgesch. Leipzig 1895, S. 1—100, und derselbe: Beobachtungen an einem zweiten erwachsenen Orang-Utang und einem Schimpansen. Ebenda S. 289ff.

Auf Bild 2 erkennt man den Hauptachselsack der linken Körperseite. Dieser ist eine Abzweigung des Hauptsackes, die sich zwischen dem Schlüsselbeinteil (pars clavicularis) und dem Brustteil (p. sternocostalis) des großen Brustmuskels (m. pectoralis majore) in die Achselhöhle hinuntergestülpt hat. Auf der rechten Körperseite war auch ein solcher vorderer Achselsack zwischen den beiden Muskelteilen in die Achselhöhle hineingeschoben, wie Bild 3 erkennen läßt, während Bild 4 die Verhältnisse auf der linken Körperseite wiedergibt, nachdem der untere Teil (Brust-Rippenteil = pars sternocostalis) des Großen Brustmuskels weggenommen war. In Bild 4 liegt daher der Zusammenhang des Hauptbeutels mit dem linken Achselsack vollkommen frei zu Tage.

Am unteren Ende des Sackes erkennt man eine Einkerbung, die von einem Gefäßnervenstrang herrührte. Solche Einschnürungen waren an verschiedenen Stellen der Sackausläufer zu beobachten, wie ich es auch bereits an den Leipziger Riesenorangs hatte feststellen können.

Man sieht auf Bild 4 auch eine kleine Aussackung des Hauptbeutels in die Spalte zwischen den Schlüsselbeinteil (p. clavicularis) des großen Brustmuskels und den Deltamuskel (m. deltoides) hineinragen.

Eine wichtige Abweichung von dem früher von mir untersuchten Kehlsack besteht darin, das hier die beiden »Kehlsackstiele« (s. Bild 5), die zwischen Schildknorpel und Zungenbein herauskommen, mit keinem Muskel in Verbindung stehen, während bei dem früheren beiderseits der »Griffel-Zungenbeinmuskel« (m. stylohyalis) sich statt an das Zungenbein an den Kehlsackstiel ansetzte. Auf Bild 5 und 6 sieht man hier sehr deutlich, daß der »Griffel-Zungenbeinmuskel« hier ganz wie beim Menschen auf beiden Seiten sich mit allen Fasern an das Zungenbein ansetzt. Auf Bild 6 erkennt man, daß der Schulter-Zungenbeinmuskel (m. omohyalis) sich unter dem linken Kehlsackstiel, zwischen ihm und dem Schild-Zungenbeinmuskel (m. thyreohyalis) durchlaufend an den Zungenbeinkörper ansetzt.

Überraschenderweise ergab sich, daß der große unpaare Sack nicht wie bei dem von mir beschriebenen Riesenorang »Anton« aus zwei gleichgroßen, miteinander verschmolzenen Säcken beider Körperseiten bestand, sondern nur mit der rechten Kehlkopftasche in offener Verbindung stand. Der linke »Kehlsackstiel« endete blind an der Hinterwand des rechten Sackes, wie Bild 7 erkennen läßt, wo der linke Kehlsackstiel vom Kehlkopf her etwas aufgeblasen ist und so die Hinterwand des großen Kehlsackes etwas von hinten her vorwölbt, während man auf der rechten Körperseite in den offenen Zugang vom großen Sack in den rechten Kehlsackstiel eine Strecke weit hineinschauen kann.

Auf der Rückseite des Präparates fiel vor allem die gegenüber dem Menschen ganz andere Lage des »Zäpfchens« auf, das, statt vom Gaumensegel aus herunterzuhängen, als ein beträchtlicher Wulst auf der Ober- bzw. Hinterseite des Gaumens liegt und mit seinem hinteren Ende noch etwa fingerbreit vom hinteren Gaumenrand entfernt bleibt (s. Bild 8).

An der Rückwand des Kehlkopfes spielen nicht wie beim Menschen die Gießbeckenknorpel die Hauptrolle, sondern die mächtigen Keilknorpel (cartil. cuneiformes Wrisbergi), während die Gießbeckenknorpel nur unbedeutende Höckerchen zu beiden Seiten des unteren Endes der hinteren Kehl-

kopfeingangsspalte darstellen (Bild 8). Noch besser übersieht man die ganze Größe der Keilknorpel, wenn man den Kehlkopf aufschneidet (s. Bild 9). Man erkennt dann, wie sie von der Kehldeckel-Gießbeckenfalte, in der sie einen hornförmigen Höcker bilden, bis zum Taschenband herunterreichen und stark nach innen vorspringen. Bei Zusammenlegung der aufgeschnittenen Hinterwand des Kehlkopfes können die Keilknorpel beider Seiten leicht zum Zusammenstoßen gebracht werden, was man sich auch schon nach dem Bild 8 leicht vorstellen kann.

Endlich fanden sich in der Kehlkopfschleimhaut schwarzgefärbte Flecken, wie ich sie bereits beim »Anton« abgebildet habe (s. Bild 8 und 9).

Was die Bedeutung des Kehlsackes anlangt, so bin ich nach meinen früheren und den neuen Erfahrungen an den lebenden Orangs und meinen früheren Untersuchungen an Kehlkopfmodellen mit künstlichen Schallblasen in C. Ludwigs physiologischer Anstalt in Leipzig der Überzeugung, daß der Kehlsack nicht stimmverstärkend wirken kann, weil er viel zu weich und schlaff ist, und daß er auch nicht als »Windkessel« zur Hervorbringung langgezogener Töne dient, sondern wohl als ein »Schreckmittel« zu deuten ist, denn seine Aufblähung läßt den Orang entschieden »fürchterlich« erscheinen[1].

Berlin, 17. Juni 1928.

---

[1] Hr. Kollege Schlenk wurde beim Anblick des gefüllten Sackes an die »Schreckstellung« der Gabelschwanzraupe erinnert, die beim Erschrecken unter dem Kopf eine kropfartige Verdickung, die sich ganz hart anfühlt, erkennen läßt.

Ausgegeben am 18. Oktober.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

Bild 1.

Gipsabguß des Orangkopfes und Kehlsackes vor der Füllung.

Bild 2.

Gipsabguß des Kopfes und Kehlsackes nach der Füllung des Sackes und Präparation des ihn bedeckenden Halshautmuskels. In der linken Achselhöhle unteres Ende eines Achselsackes.

Bild 3.

Orangleiche in Rückenlage von rechts. Halshautmuskel teilweise abpräpariert. Vom großen Sack schiebt sich eine dicke Abzweigung in die Achselhöhle, teilweise bedeckt vom unteren Teil (p. sternocostalis) des Großen Brustmuskels.

Bild 1.

Gipsabguß des Orangkopfes und Kehlsackes vor der Füllung.

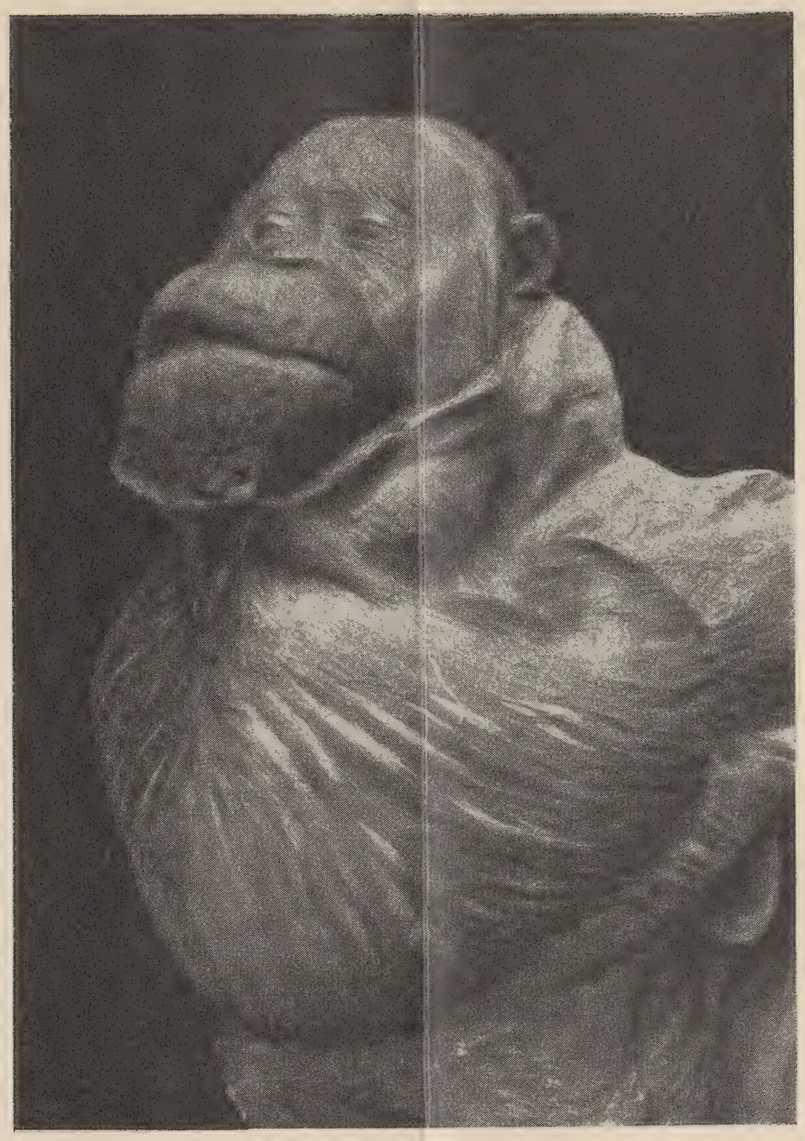


Bild 2.

Gipsabguß des Kopfes und Kehlsackes nach der Füllung des Sackes und Präparation des ihn bedeckenden Halshautmuskels. In der linken Achselhöhle unteres Ende eines Achselsackes.

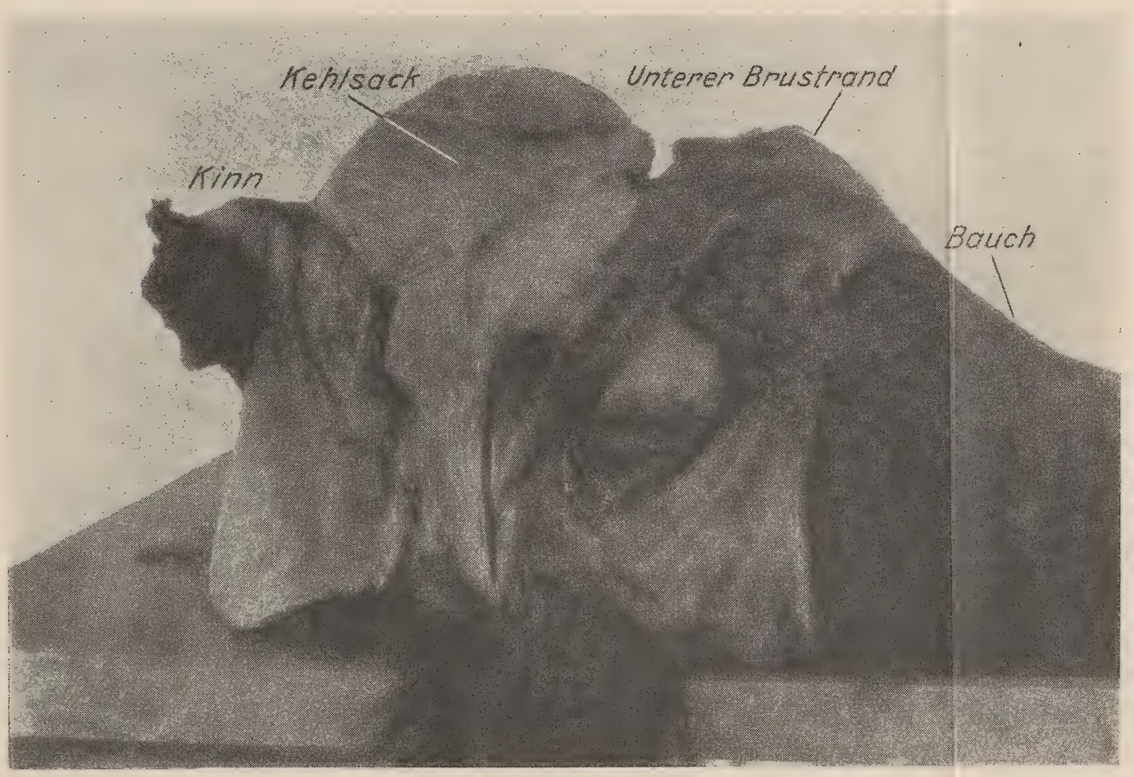


Bild 3.

Orangleiche in Rückenlage von rechts. Halshaut muskel teilweise abpräpariert. Vom großen Sack schiebt sich eine dicke Abzweigung in die Achselhöhle, teilweise bedeckt vom unteren Teil (p. sternocostalis) des Großen Brustmuskels.

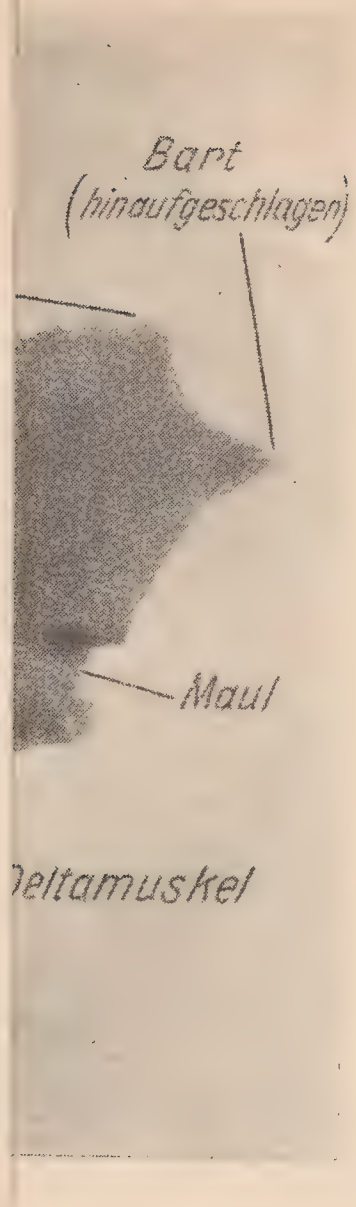


Bild 4.

Orangleiche in Rückenlage, von links gesehen. Linker Achselsack (unten eingekerbt) ganz freigelegt durch Wegnahme des unteren Teils des Großen Brustmuskels.

Bild 6.

Bild 5.

Oben: Zunge mit Kiefer-Zungenbeinmuskel (m. mylohyalis) von unten gesehen; seitlich die mächtigen Unterkiefer-Speicheldrüsen. Zungenbein mit wagerecht gelegten Griffel-Zungenbeinmuskeln (m. stylohyalis). Vorn der Endverlauf der Brustbein- und Schulter-Zungenbeinmuskeln zum Zungenbeinkörper. Seitlich die zwei Stiele des Kehlsackes mit dem Kehlsack in breitem Zusammenhang, oben die Schild-Zungenbeinlücke durchbohrend.

Bild 6.

Oben: Zunge von der linken Seite. Unterkiefer-Speicheldrüsen. Zungenbeinkörper und Zungenbeinhorn. Griffel-Zungenbeinmuskel nach hinten abwärts gelegt, läuft über, der Schulter-Zungenbeinmuskel unter dem linken Kehlsackstiel durch.

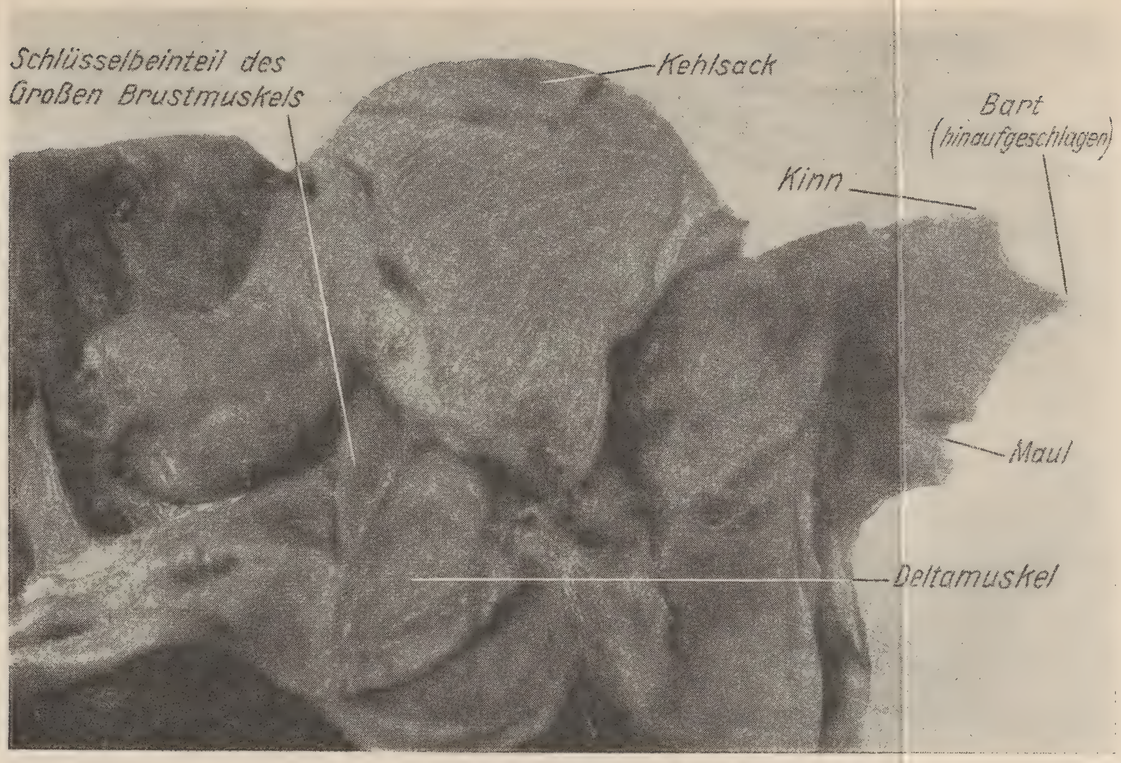


Bild 4.

Bild 4.

Orangleiche in Rückenlage, von links gesehen. Linker Achselsack (unten eingekerbt) ganz freigelegt durch Wegnahme des unteren Teils des Großen Brustmuskels.

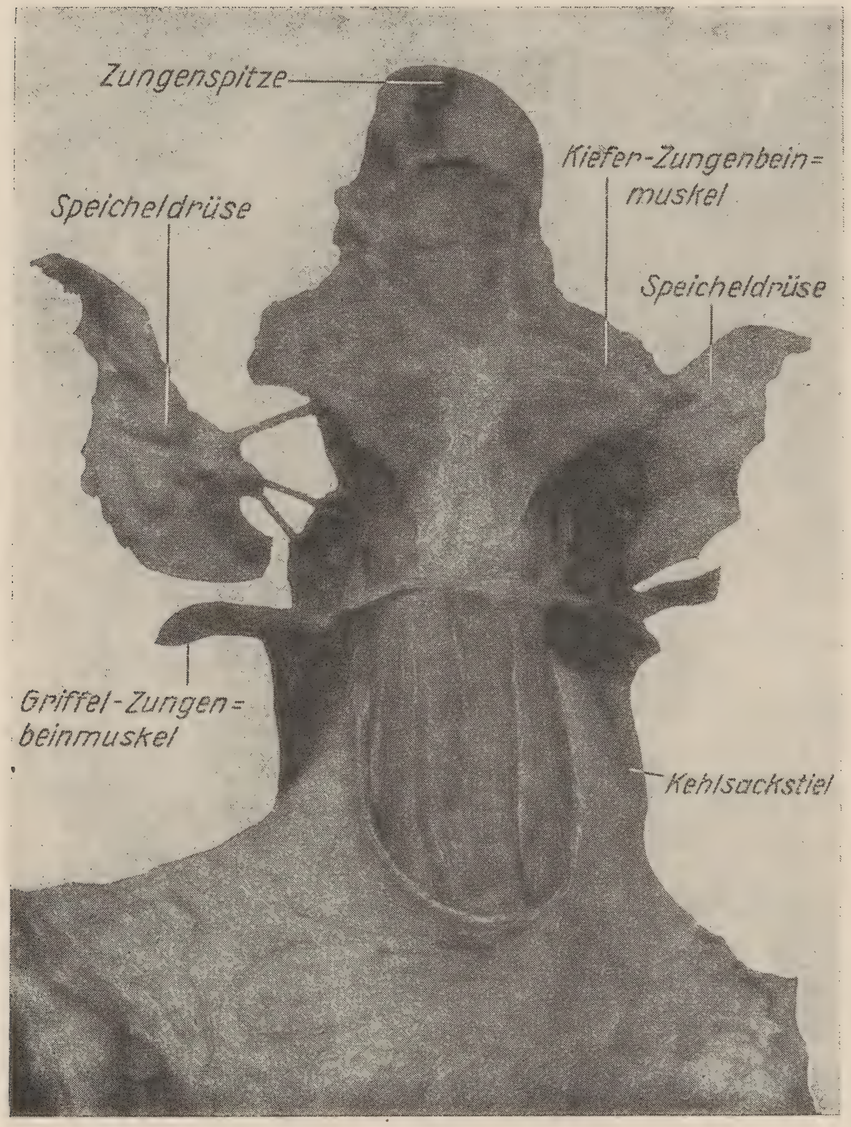


Bild 5.

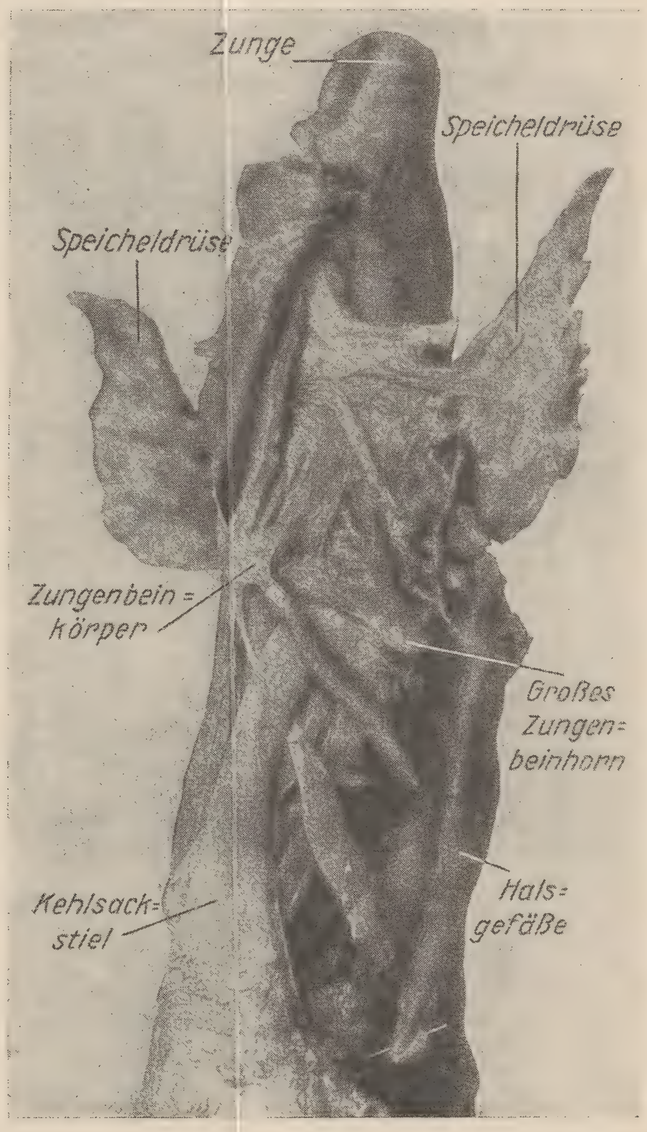


Bild 6.

Bild 5.

Oben: Zunge mit Kiefer-Zungenbeinmuskel (m. mylohyalis) von unten gesehen; seitlich die mächtigen Unterkiefer-Speicheldrüsen. Zungenbein mit wagerecht gelegten Griffel-Zungenbeinmuskeln (m. stylohyalis). Vorn der Endverlauf der Brustbein- und Schulter-Zungenbeinmuskeln zum Zungenbeinkörper. Seitlich die zwei Stiele des Kehlsackes mit dem Kehlsack in breitem Zusammenhang, oben die Schild-Zungenbeinlücke durchbohrend.

Bild 6.

Oben: Zunge von der linken Seite. Unterkiefer-Speicheldrüsen. Zungenbeinkörper und Zungenbeinhorn. Griffel-Zungenbeinmuskel nach hinten abwärts gelegt, läuft über, der Schulter-Zungenbeinmuskel unter dem linken Kehlsackstiel durch.

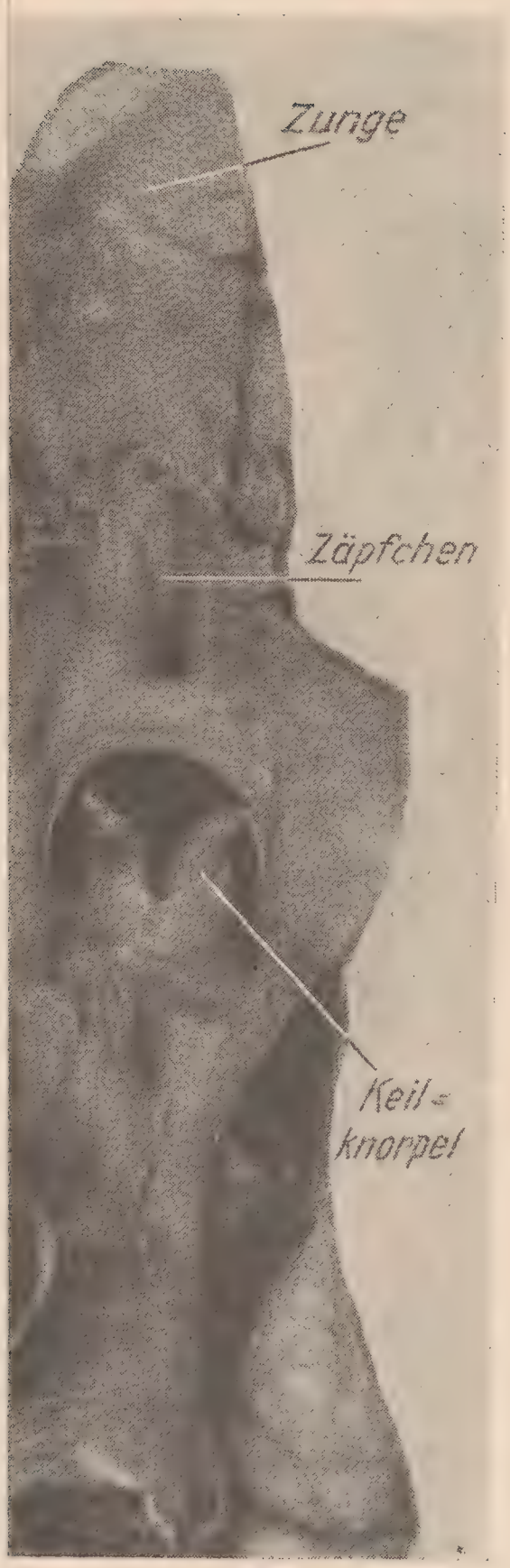


Bild 8.

Bild 7.

Oben: Zunge mit Zungenbeinmuskeln von der Unterseite und vorn gesehen. Kehlsack aufgeschnitten; in der Hinterwand der offene Eingang zur rechten Kehlkopftasche mit Pfeil bezeichnet. Die große Blase daneben ist das künstlich vom Kehlkopf her aufgeblähte blinde Ende der linksseitigen Kehlkopftasche, die hier von hinten her mit der Hinterwand des großen (nur mit der rechten Kehlkopfseite offen verbundenen) Kehlsackes verwachsen ist.

Bild 8.

Oben: Zunge von oben her. Zungengrund bedeckt vom Gaumensegel (vorderer Schnittrand unregelmäßig zackig der Zunge aufliegend). Auf dem Gaumensegel Zäpfchenwulst, der aber den hinteren Rand des Gaumensegels nicht erreicht! Unpaarer, einheitlich runder Gaumenbogen überlagert die Rückwand des Kehlkopfes, an der die Keilknorpel mächtige Hörner bilden. Die Spitzen der Gießbeckenknorpel ganz niedrig am unteren Ende der hinteren Spalte des Kehlkopfeinganges. Das Gaumensegel bzw. die Hinterwand des Kehlkopfes geht nach unten in die Vorderwand der Speiseröhre über.

Bild 9.

Kehlkopf von hinten aufgeschnitten, von hinten gesehen. Oben Kehldeckel, seitlich, namentlich links gut sichtbar, die mächtigen Keilknorpel, seitlich davon die niedrigen Gießbeckenknorpel und die mit Haken seitwärts gezogenen hinteren Schnittränder des Ringknorpels. Beiderseits die Kehlkopftaschen zwischen Taschen- und Stimmband. Rechts ist von der Kehltasche ein Glasrohr in den Kehlsack eingeführt; das Glasrohrende hat das Taschenband etwas eingebuchtet. Farbflecken an den Stimmfalten und anderen Stellen.

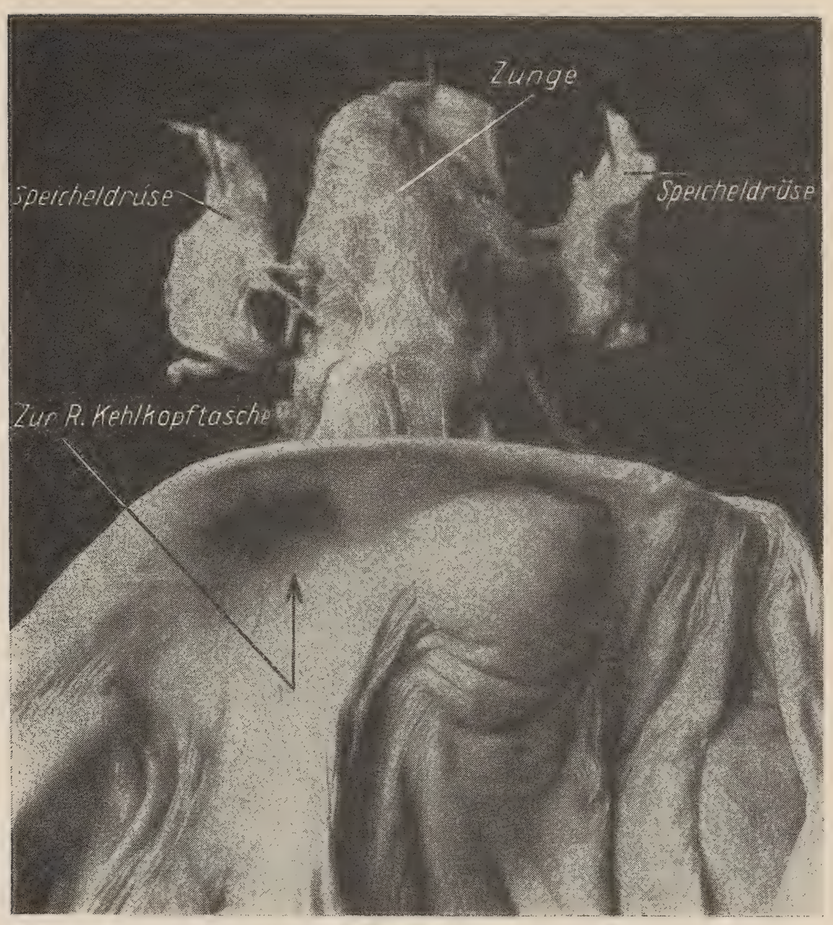


Bild 7.

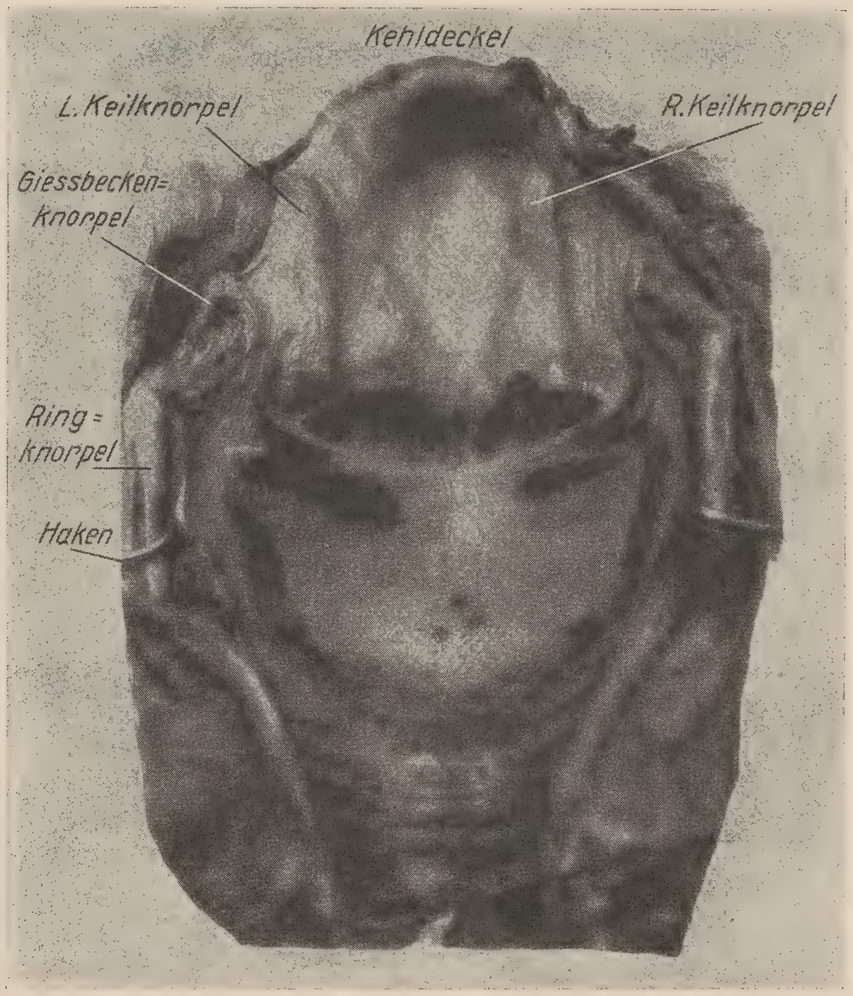


Bild 9.

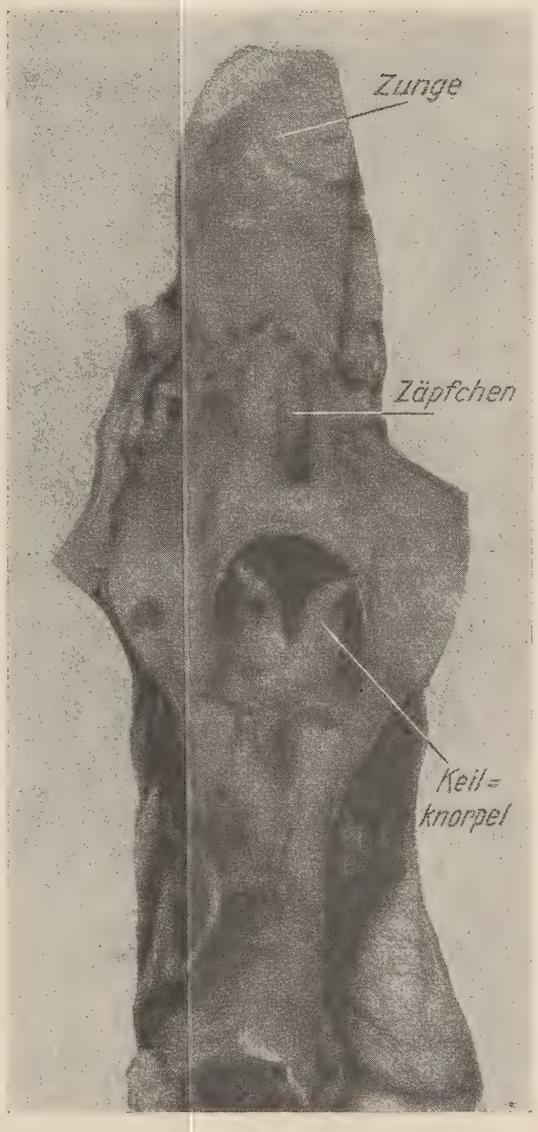


Bild 8.

Bild 7.

Oben: Zunge mit Zungenbeinmuskeln von der Unterseite und vorn gesehen. Kehlsack aufgeschnitten; in der Hinterwand der offene Eingang zur rechten Kehlkopftasche mit Pfeil bezeichnet. Die große Blase daneben ist das künstlich vom Kehlkopf her aufgeblähte blinde Ende der linksseitigen Kehlkopftasche, die hier von hinten her mit der Hinterwand des großen (nur mit der rechten Kehlkopfseite offen verbundenen) Kehlsackes verwachsen ist.

Bild 8.

Oben: Zunge von oben her. Zungengrund bedeckt vom Gaumensegel (vorderer Schnittrand unregelmäßig zackig der Zunge aufliegend). Auf dem Gaumensegel Zäpfchenwulst, der aber den hinteren Rand des Gaumensegels nicht erreicht! Unpaarer, einheitlich runder Gaumenbogen überlagert die Rückwand des Kehlkopfes, an der die Keilknorpel mächtige Hörner bilden. Die Spitzen der Gießbeckenknorpel ganz niedrig am unteren Ende der hinteren Spalte des Kehlkopfeinganges. Das Gaumensegel bzw. die Hinterwand des Kehlkopfes geht nach unten in die Vorderwand der Speiseröhre über.

Bild 9.

Kehlkopf von hinten aufgeschnitten, von hinten gesehen. Oben Kehldeckel, seitlich, namentlich links gut sichtbar, die mächtigen Keilknorpel, seitlich davon die niedrigen Gießbeckenknorpel und die mit Haken seitwärts gezogenen hinteren Schnittränder des Ringknorpels. Beiderseits die Kehlkopftaschen zwischen Taschen- und Stimmband. Rechts ist von der Kehltasche ein Glasrohr in den Kehlsack eingeführt; das Glasrohrende hat das Taschenband etwas eingebuchtet. Farbflecken an den Stimmfalten und anderen Stellen.

1928 XXIV

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 18. Oktober. (S. 449)

HABERLANDT: Die Lage des Zellkerns in der Eizelle der Angiospermen und ihre physiologische Bedeutung. (S. 450)

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XXIV. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 18. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Hahn sprach über Elemente und Atomarten der letzten Reihe des Periodischen Systems.

Die letzte Reihe des Periodischen Systems ist gegenüber den vorhergehenden unvollständig. Uran mit der Ordnungszahl 92 ist das letzte uns bekannte Element. Dieses und das Thorium sind die einzigen primären Grundstoffe der letzten Horizontalreihe. In den übrigen Stellen sind nur radioaktive Umwandlungsprodukte des Urans und Thors bekannt. Das Element 87 (Ekacäsium) ist überhaupt unbekannt, und Versuche, es aufzufinden, sind gescheitert.

Aus gewissen Gesetzmäßigkeiten über das Vorkommen von Elementen gerader Ordnungszahl konnte man vermuten, daß außer dem bekannten aktiven Radium ein mit dem Radium isotopes inaktives Ekabarium in Bariummineralien existierte. Die Suche nach einer solchen Substanz bei Verarbeitung von 220 kg Bariumbromid ergab ein negatives Resultat. Ein Ekabarium kann sicher nicht in einer Konzentration $2 \cdot 10^{-10}$ in Bariummineralien vorkommen.

2. Hr. Haberlandt überreichte eine Mitteilung über »die Lage des Zellkerns in der Eizelle der Angiospermen und ihre physiologische Bedeutung«.

Es wird gezeigt, daß die scheitelständige Lage des Zellkerns in der befruchteten Eizelle verschiedener Angiospermen zu einem lokalen Flächenwachstum der Wandpartie am Scheitel der Zelle führt, so daß es zu einer Sprossung kommt, die sich durch eine Einschnürung von dem basalen Teile der Eizelle abgliedert. Es liegt sonach ein neues Beispiel für die Beziehungen zwischen Lage und Funktion des Zellkerns vor.

3. Hr. Einstein legte einen Aufsatz von Hrn. R. Weitzenböck in Laren (Holland) vor: Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus. (Ersch. später.)

Es wird zunächst darauf hingewiesen, daß die Theorie des Fernparallelismus durch Weitzenböck und andere Mathematiker schon früher ausgebildet worden ist. Gegenüber diesen Theorien unterscheidet sich die Einsteinsche lediglich durch die zusätzliche Bedingung der »Drehungsinvarianz«. Sodann wird das allgemeine Bildungsgesetz der Invarianten der Einsteinschen Theorie abgeleitet und die Variation an den Hamilton-Integralen der einfachsten derartigen Invarianten durchgeführt. Zum Schluß wird gezeigt, daß man in einem vierdimensionalen Raume Verschiebungsgesetze aufstellen kann, die sich durch Tensoren von weniger als ingesamt 10 voneinander unabhängigen Komponenten ausdrücken lassen.

Die Lage des Zellkerns in der Eizelle der Angiospermen und ihre physiologische Bedeutung.

Von G. Haberlandt.

Mit 4 Textfiguren.

I.

Seit langem weiß man, daß die Zellkerne im Eiapparat der Angiospermen eine bestimmte Lage einnehmen: in den beiden Synergiden liegen sie meist mikropylewärts im basalen Teil derselben, in der Eizelle dagegen von der Mikropyle abgekehrt in ihrer Scheitelpartie. Kommt nun dieser Lage des Eikerns eine bestimmte physiologische Bedeutung zu, steht sie in Beziehung zu seiner Funktion?

Bei vielen Pflanzen hängt die stark exzentrische Lage des Eikerns zweifellos nur damit zusammen, daß durch die erste Teilung der befruchteten Eizelle zwei ungleich große Tochterzellen erzielt werden sollen: eine basale größere Zelle, die zum Suspensor oder zur untersten Zelle desselben wird, und eine apikale kleinere Zelle, aus der direkt oder indirekt der Embryo hervorgeht. So erscheint dieser schon von Anfang an in den Embryosack vorgeschoben und möglichst günstigen Ernährungsbedingungen ausgesetzt, sofern er überhaupt mit seiner ganzen Oberfläche Nährstoffe aufnimmt. In vielen Fällen steht die bedeutende Größe der Suspensorzelle auch unmittelbar im Dienste der Ernährung des Embryos, indem sie als Haustorium fungiert. — Wenn so die scheitelständige Lage des Eikerns nur die exzentrische Lage des Phragmoplasten und damit die ungleiche Größe der beiden Tochterzellen der Eizelle bestimmt, so ist es verständlich, daß der zweizellige Vorkeim eine mehr oder minder ellipsoidische, eiförmige oder stumpfkegelige Gestalt besitzt, und daß an der Grenze der beiden Zellen keine Einschnürung oder höchstens die Andeutung einer solchen zu beobachten ist. Dieses Verhalten zeigen nach den Angaben und Abbildungen bei Hofmeister, v. Hanstein, Hegelmaier, Strasburger u. A. die Vorkeime von *Atherurus ternatus*, *Funkia ovata*, *Brachypodium*, *Chelidonium majus*, *Glaucium luteum*, *Nicotiana Tabacum*, *Petroselinum sativum*, *Geranium pratense*, *Tropaeolum majus*, *Helleborus foetidus* u. a. m.

Bei verschiedenen Pflanzen kommt der scheitelständigen, der Zellwand stark genäherten Lage des Eikerns, außer der soeben erwähnten, noch eine andere Bedeutung zu. Die Wand der befruchteten Eizelle zeigt nicht überall gleichmäßiges Flächenwachstum; dieses lokalisiert sich vielmehr genau über

dem Eikern und seiner Umgebung, so daß am Zellscheitel eine runde, blasige Vorstülpung der Membran, eine Sprossung zustande kommt, die sich von der größeren basalen Partie der Eizelle durch eine auffallende Einschnürung abgliedert. Erst dann tritt die erste Teilung ein.

Ich habe diesen Vorgang vor einigen Jahren zuerst im »Mikroskopischen Praktikum« an Präparaten meiner Schüler bei *Ornithogalum nutans* beobachtet. Er interessierte mich aus dem Grunde, weil er ein neues, besonders beachtenswertes Beispiel für die Beziehungen darstellt, die nach meinen schon vor mehr als 40 Jahren angestellten Untersuchungen zwischen der Lage und der Funktion des Zellkernes bei den Pflanzen bestehen. Wenn in einer Pflanzenzelle lokalisiertes Dicken- oder Flächenwachstum der Wand eintritt, so liegt der Kern in der Regel in der Nähe der betreffenden Wandpartie, zuweilen sogar unmittelbar an dieser. So werden z. B. die Wurzelhaare oft direkt über den Zellkernen der Initialzellen angelegt (*Pisum sativum*, *Cucurbita pepo*). Das gleiche gilt auch für die Thyllen mancher Pflanzen. Bei *Monstera deliciosa* z. B. stülpen sich die genau über den Kernen gelegenen Wandpartien der parenchymatischen Mutterzellen der Thyllen in die Lumina der Gefäße vor. Aus diesen und anderen analogen Beobachtungen war zu folgern, daß die Anregung zu dem lokalisierten Membranwachstum vom Kern als Träger des »Idioplasmas« ausgeht. Da wir uns heutzutage die Genwirkung als eine stoffliche vorstellen, so ist der Vorteil der unmittelbaren Nachbarschaft von Kern und Wachstumsstelle ohne weiteres einleuchtend.

II.

Das als Sprossung zu bezeichnende Wachstum der befruchteten Eizelle ist schon vor 80 Jahren von W. Hofmeister bei *Gagea arvensis* und *silvestris* (II, S. 22, Taf. IX, Fig. 13, 14) beobachtet, mit wenigen Worten beschrieben und auch abgebildet worden. Er sagt darüber folgendes: »Die Membran des Keimbläschens zeigt bald an der Stelle, wo der abgeplattete untere Kern ihr anliegt, eine seichte Ausstülpung, die kurz darauf vom übrigen weit größeren Raume des Keimbläschens durch eine Querscheidewand geschieden erscheint.« Nach den Abbildungen (III. Taf. XXIII, Fig. 2 und Taf. VII, Fig. 9) zu urteilen, hat Hofmeister die Sprossung auch bei *Crocus vernus* und *Bulbocodium ruthenicum* beobachtet, sich aber nicht darüber geäußert. Dagegen beschreibt er den Vorgang bei Oenothereen (*Godetia quadrivulnera* und *Oenothera Sellowii* (I. S. 788, Taf. VIII, Fig. 6, 20a und 23) ganz kurz folgendermaßen: »Das befruchtete Keimbläschen nimmt durch einseitiges Spitzenwachstum eine birnenförmige Gestalt an.« — Diese vereinzelten Beobachtungen Hofmeisters sind aber unbeachtet geblieben oder in Vergessenheit geraten.

In der späteren Literatur über die Entwicklung des Embryos der Angiospermen ist mir zunächst die Angabe Hegelmaiers (S. 12, Taf. I, Fig. 40—42) aufgefallen, daß bei *Ranunculus bulbosus* der Vorkeim in seiner mittleren Region oft eine »eigentümlich eingeschnürte Form« besitzt. Besonders instruktiv sind die vorhin zitierten Abbildungen. Über die Lage des Kernes gibt Hegelmaier nichts an, doch ist er in Fig. 40 nahe am Scheitel der kopf-

förmigen Ausstülpung der Eizelle eingetragen. In neuerer Zeit beschreibt Renner (S. 120, Textfig. 4) die erste Entwicklung der befruchteten Eizelle von *Oenothera biennis* und *biennis* × *muricata* folgendermaßen: »Die rundliche Blase (gemeint ist die Eizelle) treibt am Scheitel eine ziemlich schmale Ausstülpung und wird dadurch flaschenförmig (Textfig. 4*c*); der Kern und die Hauptmasse des Plasmas halten sich im engen Spitzenteil. Jetzt tritt der Eikern in Teilung.« Also eine Bestätigung der Hofmeisterschen Angabe.

Dies ist alles, was ich in der Literatur über diesen Gegenstand auffinden konnte. Doch kann ich die eine oder andere Beobachtung übersehen haben.

III.

Im folgenden soll nun an einigen Beispielen die in Rede stehende Erscheinung genauer, als es bisher geschehen ist, beschrieben werden.

Ornithogalum nutans. Zur Untersuchung diente Alkoholmaterial; die häufige Schrumpfung der Protoplasten und ihre Plasmolyse beeinträchtigte

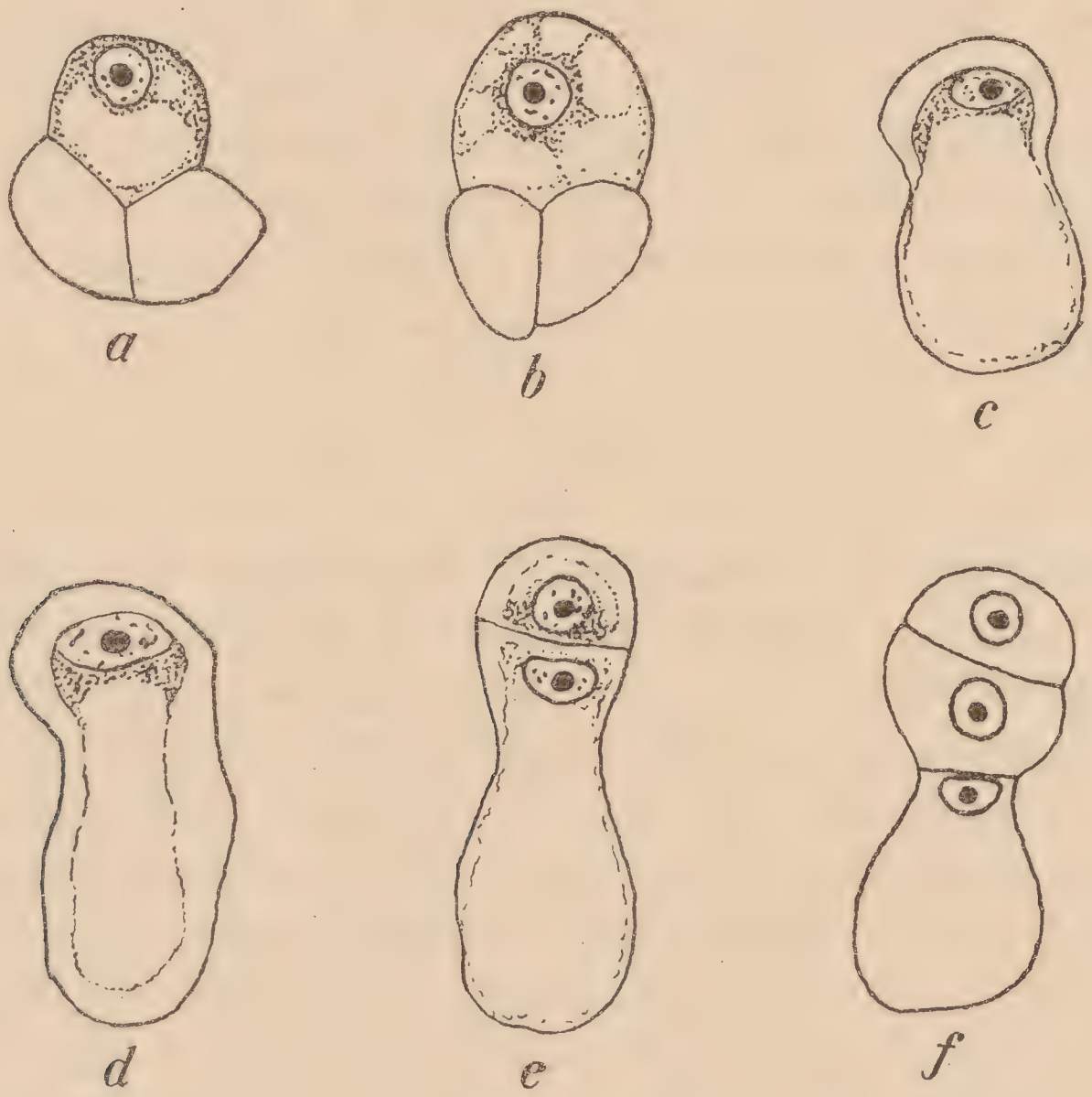


Fig. 1. Ornithogalum nutans. a befruchtete Eizelle mit den Synergiden. Der Kern ist bereits dem Scheitel genähert. *b* desgleichen, der Kern liegt noch nahezu in der Mitte. *c* und *d* die Eizelle hat über dem Kern ihre Wand vorgestülpt; unterhalb der Sprossung die Einschnürung; Plasmolyse. *e* zweizelliger Vorkeim; die Scheidewand in der Mitte des Kopfes. *f* dreizelliger Vorkeim.

die Feststellung der Kernlagerung in keiner Weise. Die Präparate wurden aus freier Hand hergestellt und mit Methylgrün gefärbt. — In der eben befruchteten Eizelle, die halbkugelförmig über die beiden Synergiden vorragt (Fig. 1 *b*), liegt der Kern von einer Plasmahülle umgeben, an Plasmafäden aufgehängt, nahezu in der Mitte, doch schon merklich dem Scheitel des Eies genähert. Bald aber rückt er bis an die Wand des Scheitels heran (Fig. 1 *a*), der er sich schließlich dicht anschmiegt, wobei er Linsenform annimmt.

Fig. 2. Alisma plantago. a befruchtete Eizelle, Kern scheitelständig. *b* desgleichen, Sprossung und Einschnürung. *c* desgleichen, Eizelle gekrümmt. *d* und *e* zweizelliger Vorkeim. *f* desgleichen, etwas älteres Stadium; die obere Tochterzelle zeigt ebenfalls Sprossung. *g* desgleichen, Suspensorzelle im Absterben begriffen. *h* desgleichen. *i* dreizelliger Vorkeim, Scheidewand im Kopfe.

Nunmehr stülpt sich durch gesteigertes Flächenwachstum die darüber gelegene Wandpartie so stark aus, daß die inzwischen ihrer ganzen Länge nach gewachsene Eizelle biskuit- oder flaschenförmig wird (Fig. 1 *c*, *d*). Die Einschnürung ist meist stark ausgeprägt. Der Kern verläßt jetzt seine wandständige Lage am Zellscheitel und wandert bis gegen die Mitte des blasigen Kopfteiles der Zelle zurück, worauf dann die erste Teilung erfolgt. Die erste Querwand liegt also nicht an der Einschnürungsstelle, wie man vermuten möchte, sie halbiert vielmehr den Kopfteil des Vorkeims, wie wir die geteilte Eizelle von nun an nennen müssen (Fig. 1 *e*). Häufig nähert sich die Querwand der Einschnürung, doch nur selten erreicht sie dieselbe.

Bald darauf teilt sich die obere Tochterzelle gleichfalls durch eine Querwand, womit die Entwicklung des eigentlichen Embryos beginnt (Fig. 1 *f*).

Alisma plantago. Fixiert wurde mit Gilsons Gemisch, die Mikrotomschnitte wurden mit Eisenhämatoxylin und Orange G gefärbt. — In der befruchteten Eizelle liegt der Kern, von reichlichem Plasma umgeben, schon frühzeitig am Zellscheitel, der Wand dicht genähert, von ihr aber noch durch einen schmalen Plasmasaum getrennt, der etwa 3 μ dick ist (Fig. 2 *a*). Dann kommt es zur Sprossung, wobei die sich streckende Eizelle sich häufig etwas krümmt (Fig. 2 *b*, *c*). Diese auffallende Krümmung ist übrigens oft schon vorhanden, bevor noch die Einschnürung eintritt. Der Kern wandert nun zurück, und zwar so weit, daß die erste Querwand an der Einschnürungsstelle entsteht (Fig. 2 *d*, *e*). Die sich blasig erweiternde Suspensorzelle enthält zunächst noch reichlich Plasma; bald degeneriert aber ihr stark vergrößerter Kern, und das Plasma stirbt ab; die Zellwand fältelt sich. Die obere Tochterzelle streckt sich nun stark in die Länge, wird 2—3 mal so lang als breit, nachdem ihr Kern bis zum Zellscheitel emporgewandert ist, wo er von der Wand nur durch eine etwa 2 μ dicke Plasmaschicht getrennt wird (Fig. 2 *f*, *g*, *h*). Diese Kernlagerung läßt vermuten, daß das Flächenwachstum der Membran nicht der ganzen Zellänge nach gleichmäßig erfolgt, sondern wie bei wachsenden Wurzelhaaren und Lebermoosrhizoiden am Scheitel lokalisiert ist. Bevor die nächste Zellteilung eintritt, erfolgt dicht unter dem Kern gewöhnlich eine abermalige Einschnürung, die Sprossung wiederholt sich, wenn auch in geringerem Ausmaße (Fig. 2 *f*, *g*, *h*). So wird die oberste Zelle des dreizelligen Vorkeims gebildet, aus der der Kotyledo hervorgeht. Die mittlere Zelle teilt sich dann nach Famintzin in vier Zellen; die oberste liefert den mittleren Teil des Embryos mit der Stengelknospe, die nächstfolgende wird zur Wurzel, die dritte zur Hypophyse, und die vierte ergänzt den Suspensor. Die ersten Entwicklungsstadien der befruchteten Eizelle bzw. des Vorkeims hat Famintzin nicht beobachtet, die zweimalige Sprossung und ihre Beziehung zur Kernlagerung nicht gesehen. Auch v. Hanstein ist sie entgangen, wenn auch seine in Sachs' Lehrbuch der Botanik, 4. Aufl. 1874, S. 566 reproduzierten Abbildungen die Einschnürung des Vorkeims deutlich erkennen lassen. Ebensowenig hat J. H. Schaffner die hier beschriebenen Vorgänge beobachtet; seine stark schematisierten Abbildungen lassen nichts davon erkennen.

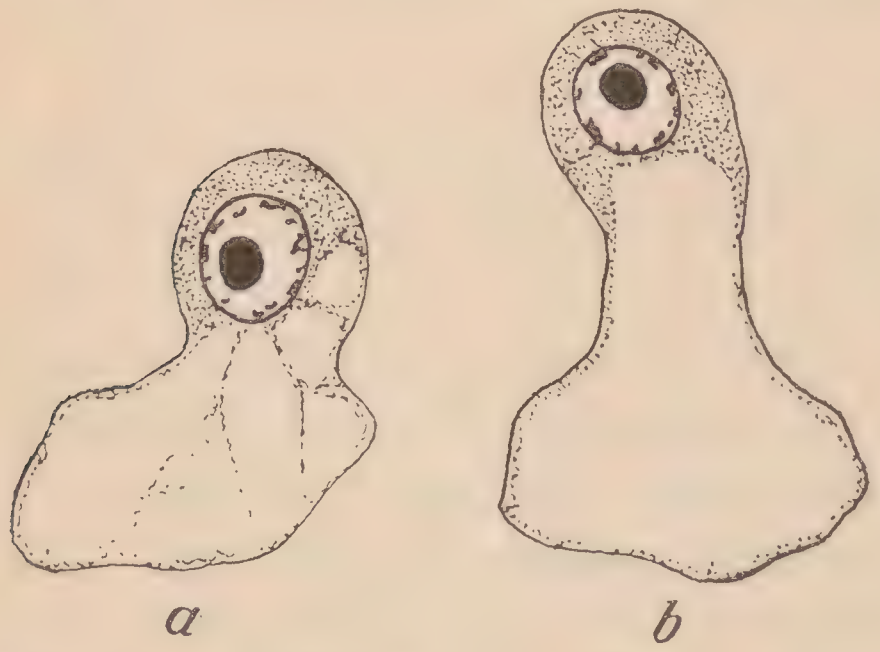


Fig. 3. Eucomis undulata. a befruchtete Eizelle mit seitlicher Sprossung. *b* etwas älteres Stadium.

Eucomis undulata (Scilleae). Fixierung mit Chrom-Essigsäure, Färbung der Mikrotomschnitte mit Eisenhämatoxylin und Orange G. Die Eizelle und ihr Kern sind ungewöhnlich groß. Erstere liegt mit breiter Basis der Embryosackwand an, so daß die Sprossung über dem Kern sehr auffallend ist (Fig. 3 *a*). Die Einschnürungsstelle verlängert sich zu einem langen Halse, dem der runde Kopf aufsitzt, der ganz mit Plasma erfüllt ist und den Kern enthält (Fig. 3 *b*). Die weiteren Entwicklungsstadien

habe ich nicht verfolgt. Es ist anzunehmen, daß die erste Querwand nicht im Halsteile, sondern wie bei *Ornithogalum* im Kopfe angelegt wird. Aus der Kernlagerung darf dies gefolgert werden.

Oenothera Lamarckiana. Fixierung mit Chrom-Essigsäure, Färbung der 10 μ dicken Mikrotomschnitte mit Eisenhämatoxylin und Orange G. Den oben zitierten Angaben RENNERS ist nur wenig hinzuzufügen. Die Sprossung der befruchteten Eizelle erfolgt schon, bevor noch dieselbe ihre Gestalt und Größe wesentlich verändert hat (Fig. 4 *a*, *b*, *c*). Der scheitelständige Kern ist ganz nahe an die Wand herangerückt, so daß die Dicke der Plasmaschicht, die dazwischen liegt, nur 1.7—2 μ beträgt. Die Einschnürung und die daraus sich ergebende Flaschenform der Zelle ist sehr auffallend. Nun streckt sich auch

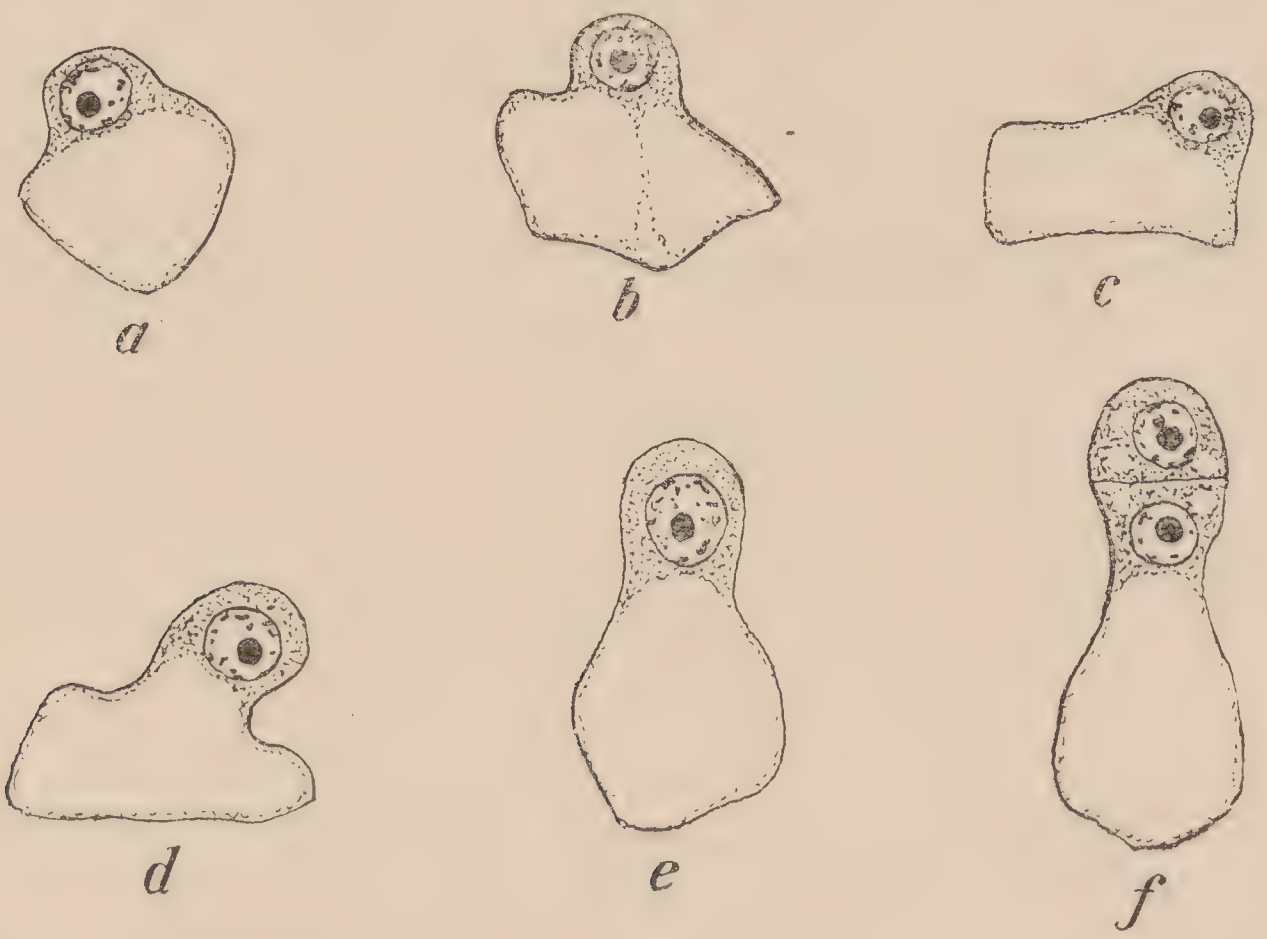


Fig. 4. Oenothera Lamarckiana. *a* befruchtete Eizelle mit beginnender Sprossung. *b* desgleichen. *c* desgleichen mit stark seitlicher Sprossung. *d* desgleichen, Sprossung in der Mitte. *e* typische Form der Eizelle nach erfolgter Sprossung. *f* zweizelliger Vorkeim. Scheidewand in der Mitte des Kopfes.

ihr blasiger Fußteil etwas, und der Kern wandert bis ungefähr in die Mitte des Kopfes zurück (Fig. 4 *e*). Jetzt tritt die Querteilung ein, so daß die erste Scheidewand nicht an der Einschnürungsstelle, sondern mehr weniger über ihr, im Kopfe angelegt wird (Fig. 4 *f*). Nach RENNERS Abbildungen (Textfig. 4 *d*, *e*, Fig. 6 *b*, Fig. 7 *d*) zu urteilen, scheint dies auch bei *Oenethera biennis* × *muricata*, *muricata* × *biennes* und *Lamarckiana* × *biennis*, wenn auch nicht regelmäßig, der Fall zu sein. — Sehr schön zeigt diese Lage des Eikerns bei *Ranunculus bulbosus* die Abbildung HEGELMAIERS (Taf. 1 Fig. 42). —

Man darf wohl annehmen, daß der beschriebene Wachstumsmodus der befruchteten Eizelle, der als echte Zellsprossung zu bezeichnen ist, bei den Angiospermen eine ziemliche Verbreitung besitzt; namentlich bei Monocotylen dürfte er häufiger vorkommen. Von der Sprossung der Hefezellen und der Basidien unterscheidet sich die Eizellsprossung sehr wesentlich dadurch, daß bei ersteren die Kerne erst nachträglich in die Tochterzellen bzw. Basidiosporen einwandern. Beziehungen zwischen den Orten der Sprossung und der Lage der Kerne sind hier nicht vorhanden.

Es ist gewiß bemerkenswert, daß die bei den höheren Pflanzen so häufig festzustellenden Beziehungen zwischen Lage und Funktion des Zellkerns in verschiedenen Fällen schon zu Beginn der embryonalen Entwicklung sich geltend machen.

Literaturverzeichnis.

Famintzin, A., Embryologische Studien, Mémoires de l'académie des sciences de St. Pétersbourg, VII, S., T. XXVI, 1879.

Haberlandt, G., Über die Beziehungen zwischen Funktion und Lage des Zellkernes bei den Pflanzen, Jena 1887.

v. Hanstein, A., Die Entwicklung des Keimes der Monokotylen und Dikotylen, Bot. Abhandlungen aus dem Gebiete der Morphologie und Physiologie, I. Heft, Bonn 1870.

Hegelmaier, F., Vergleichende Untersuchungen über die Entwicklung dikotyledoner Keime, Stuttgart, 1878.

Hofmeister, W., I. Untersuchungen des Vorganges der Befruchtung der Oenothereen, Bot. Zeitung, 5. Jahrg., 1847.

Derselbe, II. Entstehung des Embryos der Phanerogamen, Leipzig 1849.

Derselbe, III. Neue Beiträge zur Kenntnis der Embryobildung der Phanerogamen, Abhandl. der Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften, Bd. VI u. VII, 1857.

Renner, O., Befruchtung und Embryobildung bei *Oenothera Lamarckiana* und einigen verwandten Arten, Flora, 107. B., 1914.

Schaffner, J. H., The embryosac of *Alisma Plantago*, Bot. Gazette, V. XXI, 1896.

Ausgegeben am 29. Oktober.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XXV. XXVI

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 25. Oktober. (S. 457)
Klassensitzung am 1. November. (S. 460)
HOFMANN: Nitrit-Nitratbildung aus Ammoniak und Sauerstoff an alkalischen Oberflächen. (S. 461)
R. WEITZENBÖCK: Differentialinvarianten in der EINSTEINschen Theorie des Fernparallelismus. (Mitteilung vom 18. Oktober.) (S. 466)

Library of Congress
JAN 12 1929

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XXV. Gesamtsitzung. 25. Oktober.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Jaeger sprach über Ursprung und Kreislauf des philosophischen Lebensideals.

In der Überlieferung erscheinen die Gestalten der ältesten Denker von Thales bis Pythagoras und Demokrit als die Repräsentanten eines eigentümlichen Lebensstils der geistigen Konzentration und stolzen Verachtung aller äußeren Güter, im Gegensatz dazu macht eine andere Art von Berichten sie zu gesetzgeberischen und politischen, mitten im Leben stehenden Männern. Beide Beleuchtungen sind nur Reflexe der späteren Philosophie und ihrer Ideale von Plato an. Erst dort hat das Ideal des wissenschaftlichen Lebens seine ethische Begründung gefunden durch die Umstellung der Erkenntnis auf das Problem des Staates und des Gesellschaftsaufbaus, wodurch ihr zugleich der höchste praktische Wert gegeben wurde. Aber Wissenschaft und Praxis trennten sich bald als zwei eigengesetzliche Welten, und die Entwicklung endigte bei Dikaiarch, dem Schüler des Aristoteles, damit, daß das wissenschaftliche Leben die Führung an das praktische und politische Leben abgibt, während das letztere der geistigen Grundlegung verlustig geht, die Plato ihm durch seine philosophische Weltanschauung gegeben hatte. Platos Typus des kontemplativen Lebens wirkt später fort im religiösen und mystischen Lebensideal des Mönchtums. An das politische Lebensideal des Dikaiarch knüpfen die Römer bei der Übernahme der philosophischen Bildung der Griechen an.

2. Hr. Heymann legte eine aus dem Nachlaß von Emil Seckel durch Hrn. Prof. Dr. Paul M. Meyer herausgegebene Abhandlung »Zum sog. Gnomon des Idioslogos« vor.

Den Gnomon des Idioslogos, die Dienstanweisung des Kaisers Augustus an den Vorsteher des Sonderkontos der Staatskasse in der römischen Provinz Ägypten für alle nicht etatsmäßigen Einnahmen, die in einer griechischen Bearbeitung aus der Zeit des Kaisers Antoninus Pius vorliegt, hatte Hr. Seckel zur juristischen Kommentierung übernommen und diese für die §§ 1—57 durchgeführt. Aus den in seinem Nachlaß vorgefundenen Manuskripten hat sie Hr. Paul M. Meyer herausgegeben, ergänzt und dem heutigen Stande der Forschung angepaßt. Es handelt sich hier um den wichtigsten juristischen Papyrus der Kaiserzeit, der vor allem unsere Kenntnis des Ehe-, Erb- und Statusrechts nach vielen Seiten erweitert.

3. Hr. Burdach überreichte die 2. Hälfte des 1. Teiles des II. Bandes seines Werkes »Vom Mittelalter zur Reformation«: »Briefwechsel des Cola di Rienzo«, hrsg. von Konrad Burdach und Paul Piur (Berlin 1913—1928),

4. Hr. Carl Stumpf seine Bücher »Gefühl und Gefühlsempfindung« (Leipzig 1928), »William James, nach seinen Briefen. Leben, Charakter, Lehre« (Charlottenburg 1928) und »Tafeln zur Geschichte der Philosophie« von C. Stumpf und P. Menzer (4. Aufl. Berlin 1928),

5. Hr. Heymann seine Abhandlung über die »Reichsbahnkreuzung« (Sonderabdruck).

6. Hr. Lenz übersandte einen Sonderabdruck seiner Arbeit über die »Begegnung König Wilhelms I. mit dem Kaiser Franz Joseph in Gastein am 3. August 1863«,

7. Hr. Sering sein Werk »Deutschland unter dem Dawes-Plan« (Berlin und Leipzig 1928),

8. Hr. Kehr sein Werk »Papsturkunden in Spanien, Vorarbeiten zur Hispania Pontificia«, Band II »Navarra und Aragon«, Teil II: »Urkunden und Regesten« (Berlin 1928),

9. Hr. von Laue sein Werk »Optik der bewegten Körper. Die Spiegelung und Brechung des Lichtes an der Grenze zweier isotroper Körper. Interferenz und Beugung elektromagnetischer Wellen« (Sonderabdruck, Leipzig 1928).

10. Das korrespondierende Mitglied Hr. F. Ll. Griffith übersandte einen Sonderabdruck seiner Arbeit »Christian Documents from Nubia«,

11. das korrespondierende Mitglied Hr. Rudolf Geyer sein Werk »Gedichte von ʿAbû Baṣîr Maimûn ibn Qais al-ʾAʿšâ (London 1928),

12. das korrespondierende Mitglied Hr. Luschin Ebengreuth seine Schrift »Häuser- und Gassenbuch der inneren Stadt Graz« (Graz 1928),

13. das korrespondierende Mitglied Hr. Alfred Stern den I. Band seines Werkes »Geschichte Europas von 1848 bis 1871« (2. Aufl., Stuttgart und Berlin 1928),

14. das korrespondierende Mitglied Hr. Kneser sein Buch: »Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart« (Leipzig und Berlin 1928).

15. Hr. Hesse legte die 9. Lieferung des »Nomenclator animalium generum et subgenerum« (Berlin 1928) vor.

16. Vorgelegt wurden ferner der 6. Band von »Jean Pauls Sämtlichen Werken« (Weimar 1928), der 8. Fasc. des 5. Bandes des »Thesaurus linguae Latinae« (Leipzig 1928), die 17. Lieferung des »Rheinischen Wörterbuches« (Bonn 1928), die 12. Lieferung des »Altfranzösischen Wörterbuches« von Tobler-Lommatzsch (Berlin 1928); sodann »Monumenta Germaniae historica, Scriptores rerum Germanicarum«, Nova Series, Band V: »Quellen zur Geschichte des Kreuzzuges Kaiser Friedrichs I.«, herausgegeben von A. Chroust (Berlin 1928) und der 3. Fasc. des Supplementbandes der mit Unterstützung der Akademie herausgegebenen »Opuscula Ichneumonologica« von Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht (Blankenburg i. Thür. 1928).

17. Endlich wurden vorgelegt die Arbeit von Gustav Berthold Volz »Friedrich der Große und seine sittlichen Ankläger« (Sonderabdruck) und das von Hans Teske bearbeitete Glossar zum 35. Bande der »Chroniken der deutschen Städte vom 14. bis ins 16. Jahrhundert« (Stuttgart und Gotha 1928).

18. Zu wissenschaftlichen Zwecken sind bewilligt worden:

durch die physikalisch-mathematische Klasse

2000 *RM* für eine Studienreise des Frl. Prof. Dr. Rhoda Erdmann (Berlin) nach Neapel zu Arbeiten an der dortigen Zoologischen Station;

durch die philosophisch-historische Klasse

400 *RM* für die Ausgabe der Briefe B. G. Niebuhrs,

900 *RM* für die Fortführung des Thesaurus linguae Latinae,

4000 *RM* für die Fortführung der Arbeiten des Hrn. Prof. Dr. Burdach an seinem Werke »Vom Mittelalter zur Reformation« und

1000 *RM* für die Herausgabe baskischer Texte durch Hrn. Prof. Dr. Wilhelm Schulze.

Die Akademie hat das korrespondierende Mitglied ihrer physikalisch-mathematischen Klasse Hrn. Wilhelm Wien in München am 31. August 1928 durch den Tod verloren.

Ausgegeben am 28. November.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

XXVI. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 1. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

1. Hr. Hofmann sprach über Nitrit-Nitratbildung aus Ammoniak und Sauerstoff an alkalischen Oberflächen.

Es wird die Oxydation von Ammoniak zu Nitrit-Nitrat an alkalischen Oberflächen und die spezifische Wirksamkeit der Aktivatoren untersucht. Im besonderen wird die unterschiedliche Wirkung von Kupfer und Silber sowie das Verhalten von Silber unter ammoniakalischen Lösungen behandelt.

2. Hr. Ludendorff legte eine Abhandlung von Prof. Hagen in Rom vor, betitelt »Die Geschichte des Nebels Barnard 86«. (Ersch. später.)

Mit Hilfe eines bisher unbekannten Briefes von Caroline Herschel gelingt es, das Objekt, das Wilhelm Herschel als »Loch im Himmel« bezeichnete, mit dem Nebel Barnard 86 zu identifizieren.

3. Hr. Hofmann überreichte sein »Lehrbuch der anorganischen Chemie« (6. Aufl., Braunschweig 1928).

Nitrit-Nitratbildung aus Ammoniak und Sauerstoff an alkalischen Oberflächen.

Von K. A. Hofmann.

Ich habe in den Berichten d. d. chem. Gesellschaft **60**, S. 1190 (1927) nachgewiesen, daß Ammoniak-Luftgemische an alkalischen Oberflächen schon bei Temperaturen unter 400° mit erheblicher Geschwindigkeit Nitrate bilden, ohne daß Verluste durch sonstigen Zerfall des Ammoniaks eintreten, wenn die Versuchsbedingungen so getroffen werden, daß außerhalb der alkalischen Flächen kein Umsatz zwischen obigen Gasen stattfindet.

Grundbedingung für diese, der natürlichen Nitrifizierung ähnliche Salpeterbildung aus Ammoniak ist die alkalische Reaktion der Kontaktflächen und die Gegenwart von freiem molekularem Sauerstoff. Sauerstoffüberträger in Form von höheren Oxyden liefern überwiegend freien Stickstoff.

Als erstes faßbares Produkt entsteht Nitrit nach der rein stöchiometrischen Gleichung: $2NH_3 + 3O_2 + 2NaOH = 2NO_2Na + 4H_2O$. Aus dem Nitrit entsteht weiterhin in schneller Reaktion das Nitrat. Weil hierbei die Bildungswärme von $1NaNO_2$ etwa 78 Cal beträgt, ist thermochemisch der glatte Verlauf der Reaktion begründet, aber es ist kinetisch nicht denkbar, daß der Umsatz zwischen einer so großen Zahl von Molekülen sich in einer Stufe vollzieht. Nimmt man aber Zwischenstufen an, dann wird es zunächst nicht verständlich, warum auf dem Weg von NH_3 zu NO_2Na sich keine Gelegenheit finden soll für die Bildung von N_2 aus abgebauten NH_3-Molekülen.

Die Erklärung hierfür gründet sich auf den Nachweis, daß primär ein äußerst reaktionsfähiges Lückengebilde aus dem Ammoniak hervorgeht, und als solches wird die Imidgruppe ... NH angenommen. Für die technische Ammoniak-Luftverbrennung an Platinnetzen bei 600—700° hat F. Raschig[1] das verwandte Diimid N_2H_2 als Zwischenstufe angenommen, während M. Bodenstein und L. Andrussow[2] an dessen Stelle das Nitroxyl HNO setzen. Für das Auftreten der Imidgruppe als primäres Reaktionsprodukt gemäß: $HNH_2 + O_2 + H_2NH \rightarrow 2NH + 2H_2O$ spricht zunächst die Analogie mit dem Reaktionsverlauf bei der Nitritbildung aus molekularem Sauerstoff mit Natriumazid, Natriumamid und Hydroxylamin nach den Formelbildern: $NaN . \overline{!} . \overline{N_2 + O_2}$, $NaN . \overline{!} . \overline{H_2 + O_2}$, $HN . \overline{!} . \overline{(HOH) + O_2}$ und für Ammoniak selbst: $HN . \overline{!} . \overline{H_2 + O_2}$.

[1] Schwefel- und Stickstoff-Studien, Verlag Chemie (1924) S. 222.
[2] Z. angew. Chem. **40**, 166ff. (1927).

Als experimentelle Stütze dient der Nachweis, daß bei der Oxydation von ammoniakreichen Luftgemischen an alkalischen Flächen schon bei etwa 300° freier Wasserstoff austritt, unter Bedingungen, wo die thermische Ammoniakspaltung $2\,NH_3 = N_2 + 3\,H_2$ noch nicht in Betracht kommt.

Diese auffallende Tatsache, daß Sauerstoff aus dem Ammoniak den Wasserstoff teilweise verdrängt, erklärt sich leicht aus dem labilen Charakter der Imidgruppe, die bei ungenügendem Sauerstoffzutritt nach: $2\,NH = N_2 + H_2$ schnell zerfällt, durch die alkalischen Kontaktflächen aber so weit stabilisiert werden kann, daß die nitritbildende Reaktion in dem Imid-Alkali-Adsorbat gemäß $HN\,.\,.\,.\,(HONa) + O_2$ dem Zerfall vorauseilen kann, auch wenn der Sauerstoffgehalt im Ammoniak-Luftgemisch stöchiometrisch noch nicht vollkommen zur Nitritbildung ausreicht. Z. B. entstehen bei 310° mit 5.5 bis 8 Vol. Luft auf 1 Vol. NH_3 Gas Nitrit-Nitrat und freier Wasserstoff nebeneinander, bei 13.7 Vol. Luft auf 1 Vol. NH_3 Gas, wo der Sauerstoffgehalt stöchiometrisch schon ausreicht, nur Nitrat ohne Wasserstoff.

Für die Annahme, daß die Imidgruppe als primäres Reaktionsprodukt zwischen Sauerstoff und Amoniak gelten darf, sprechen auch Versuche, in denen Stickstoff und Sauerstoff zu etwa gleichen Volumen durch eine dünne Flammenzone in überschüssigem Wasserstoff getrieben werden. Bei schnellster Kühlung der Abgase an den kalten Wänden des Quarzrohres treten neben Ammoniak sicher nachweisbare Mengen Hydrazin N_2H_4 auf, wenn Spuren von Eisenoxyd an dem Quarzrohr sich abgesetzt haben. Das Eisenoxyd stammt hier aus dem geringen Gehalt des technischen Wasserstoffs an Eisencarbonyl. Das Hydrazin kann, wie J. Thiele zeigte, aus dem Imid entstehen nach: $2\,N_2H_2 = N_2 + N_2H_4$ neben der bevorzugten Zersetzung: $N_2H_2 = N_2 + H_2$.

Weil die Ammoniakbildung in dieser umgekehrten Wasserstoffflamme auch bei völlig reinem Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff erfolgt, wo kein Eisenoxydbeschlag am Quarzrohr auftritt, die Hydrazinbildung aber hier ausbleibt, kann man annehmen, daß das Hydrazin sekundär aus dem Ammoniak entsteht am Eisenoxydkontakt, und in diesem Falle ist der Reaktionsgang über das Imid nach: $NH_3 \rightarrow \ldots NH + H_2$ wahrscheinlicher als die unmittelbare Hydrazinbildung aus Ammoniak nach $2\,NH_3 \rightarrow N_2H_4 + H_2$.

Um die Bildung von Nitrit-Nitrat an alkalischen Flächen zu beschleunigen, sind wie schon früher[1] mitgeteilt wurde, aktivierende Zusätze wie Kupfer, Nickel, Kobalt, Silber erforderlich, über deren besondere Wirkungsweise neuere Versuche Aufschluß geben. Sie wirken dehydrierend, indem sie den Wasserstoff im Ammoniak im Sinne des Formelbildes: $HN\ldots H_2$ lockern und dem Sauerstoff Gelegenheit bieten, gemäß: $HN\ldots H_2 + O_2 + H_2\ldots NH \rightarrow 2\,HN\ldots + 2\,H_2O$ zu wirken.

So sind die besten Aktivatoren für die Nitrit-Nitratbildung auch schon bei 350° wirksame Katalysatoren für die Wasserbildung aus Luft und Wasserstoff und für den Zerfall von Ammoniak unter Sauerstoffausschluß zu Wasserstoff, Stickstoff neben deutlich nachweisbaren Mengen von Hydrazin.

[1] K. A. Hofmann, Berichte d. d. chem. Gesellschaft **59**, 204 (1926) und **60**, 1190 (1927).

Hierzu muß man Gemenge von Stickstoff mit etwa 8 bis 10 Volumprozenten Ammoniak bei 350° in schnellem Strom über Nickel- oder Kupfer-Kalkschichten leiten, weil bei langsamer Strömung das Hydrazin wieder vollkommen zerfällt. Das Hydrazin könnte zwar unmittelbar aus dem Ammoniak entstehen: $2\,NH_3 \rightarrow N_2H_4 + H_2$, aber es ist kinetisch viel wahrscheinlicher, daß je ein Molekül Ammoniak unter Austritt von molekularem H_2 zum Imid dehydriert wird: $HNH_2 \rightarrow HN\ldots + H_2$. Aus dem Imid entsteht nach: $2\,N_2H_2 \rightarrow N_2H_4 + N_2$.

Weil Kupfer hervorragend aktivierend wirkt, lag die Vermutung nahe, daß die hier untersuchte Nitrit-Nitratbildung aus Luft- und Ammoniak an aktivierten alkalischen Flächen bei 350° bis 400° in Analogie zu bringen sei mit der schon von Schönbein untersuchten Nitritbildung in ammoniakalischen Kupferlösungen an der Luft bei Raumtemperatur. Es ergab sich aber in Übereinstimmung mit Erich Müller, daß die letztgenannte Reaktion auf der Fähigkeit des Kupfers beruht, in alkalischen Flüssigkeiten an der Luft ein höheres Primäroxyd zu bilden, das die Ammoniakoxydation bewirkt.

Das Primäroxyd $Cu_2O_3 \cdot$aqua oder vielleicht $CuO_2 \cdot$aqua bedingt auch das auffallend hohe Potential einer Luft-Kupfer-Alkali-Elektrode, wie ich, Berichte d. d. chem. Gesellschaft **52**, 1191 (1919) gezeigt habe.

Die Verschiedenheit der Vorgänge an alkalischen Flächen bei etwa 350° einerseits und in wässerigen Ammoniaklösungen andererseits ergab sich auch bei dem Vergleich von Kupfer und Silber als Aktivatoren. Ersteres ist in beiden Fällen wirksam, letzteres nur im erstgenannten Fall der Nitrit-Nitratbildung.

In wässerigen ammoniakalischen Lösungen liefern Silberoxyd oder Silberpulver an der Luft nur untergeordnete Mengen von Nitrit, weil unter diesen Bedingungen das Silber nicht wie das Kupfer ein höheres Oxyd mit dem molekularen Sauerstoff bilden kann. Bei diesen Versuchen wurde aber gefunden, daß metallisches Silber sich in Ammoniakwasser unter Luftzutritt viel schneller unter Oxydation auflöst, als bei seiner Edelmetallnatur zu erwarten stand. Die Ergebnisse sind im folgenden Abschnitt zusammengefaßt.

Auflösung von Silber in Ammoniakwasser.

In der Cyanidlaugerei von Gold und Silber werden diese Edelmetalle unter Zutritt von Luft durch verdünnte Lösungen von Cyankalium oder Cyannatrium aufgelöst zu den Doppelcyaniden $Au(CN)_2K$ bzw. $Ag(CN)_2K$. Der sonst edle Charakter dieser Metalle, d. h. ihre Stellung auf der positiven Seite der elektrochemischen Spannungsreihe geht verloren, indem durch Komplexbildung ihre Ionen fast vollständig gebunden werden.

In annähernd gleich starkem Maße kann beim Silber die Ionenbindung durch Ammoniak erreicht werden, indem z. B. das Silberoxyd die neue Komplexbase $Ag(NH_3)_2OH$ bildet.

Es wird nun gezeigt, daß auf diesem Wege die Auflösung des Silbers durch Oxydation von seiten des Luftsauerstoffs viel schneller vor sich geht, als nach den vorliegenden Angaben des Schrifttums zu erwarten stand.

Mit fein verteiltem Silber von etwa 0.01 mm Teilchengröße und einer Oberfläche von 600 cm² für 1 g kann man unter 6.4prozentigem reinsten Ammoniakwasser in 4 Monaten aus 3 g Silberpulver gegen 0.5 g Silber in Form von Amminosilberhydroxyd auflösen, wogegen unter reinem Wasser oder unter 10prozentiger Essigsäure keine analytisch nachweisbare Oxydation erfolgt. Auch starke, 15prozentige Schwefelsäure vermag nur etwa den 16. Teil zu lösen von dem vorher für Ammoniakwasser angegebenen Wert unter sonst gleichen Bedingungen.

Auch Quecksilber wird von sauerstoffhaltigem Ammoniakwasser angegriffen unter Bildung der sonst aus Quecksilberoxyd und Ammoniak dargestellten Millonschen Base.

Abgesehen davon, daß die auffällig starke Oxydierbarkeit des Silbers in Gegenwart von ammoniakalischem Wasser praktische Bedeutung hat und auch die physiologische Wirksamkeit von Silberpräparaten wie argentum kolloidale zu erklären vermag, bietet der Verlauf der Auflösung von Silber obiger Dispersität wissenschaftliches Interesse, insofern, als er den Gesetzen der Reaktionskinetik zu widersprechen scheint.

Dieser Vorgang kommt nämlich im Laufe von Monaten zum Stillstand, lange bevor die Sättigungsgrenze des Ammoniakwassers für Silberoxyd erreicht ist, und man erhält bei gleichem Volumen Ammoniakwasser Endkonzentrationen, die annähernd proportional mit der Menge des verwendeten Silberpulvers steigen. Rückläufige Reaktion im Sinne von Silberpulver $\rightleftharpoons$ Silber gelöst findet nicht statt, desgleichen auch nicht Rekristallisation und damit verbundene Verminderung der Oberfläche des Silbers.

Auch eine Ablenkung des Sauerstoffs zu anderweitiger Betätigung, wie zur Oxydation des Ammoniaks zu Stickstoff oder zu Nitrit kann die Hemmung nicht verursachen, weil Luft über ammoniakalischer Silberoxydlösung ihren prozentischen Sauerstoffgehalt binnen 3 Monaten nicht ändert.

Dies ist insofern wichtig, als das dem Silber im System der Elemente verwandte Kupfer in Form seiner ammoniakalischen Lösungen in ganz beträchtlichem Maße den Sauerstoff auf das Ammoniak überträgt unter Bildung von Ammoniumnitrit.

Aus dem Verlauf der Zeitkurven für die Lösungsgeschwindigkeit des Silbers in 6.4prozentigem Ammoniakwasser ergibt sich, daß die Zunahme der Verzögerung des Vorganges mit der Zeit und mit der steigenden Silberkonzentration der Lösung anfangs beschleunigt, später verlangsamt wird. Die Geschwindigkeitskurven zeigen einen Wendepunkt, und schließlich wird die Geschwindigkeit bei sehr kleinen Werten nahezu konstant. Hieraus wird geschlossen, daß die Verzögerung und die schließliche Hemmung von einer Bedeckung der Silberoberfläche mit einer sehr geringen Menge einer schwer löslichen und sehr langsam oxydierbaren Substanz herrührt. Diese bildet sich aus dem gelösten Amminosilberhydroxyd $Ag(NH_3)_2OH$ langsam, schneller unter der Einwirkung alkalischer Zusätze und ist identisch oder nahe verwandt mit dem Silbernitrid oder Silberimid von Berthollet und Raschig.

Zusätze von Ammoniumnitrat oder Ammoniumsulfat wirken diesem Vorgang dadurch entgegen, daß sie die Base $Ag(NH_3)_2OH$ weitgehend in ihre viel beständigeren Salze überführen, und so wird auch die Auflösung des Silbers in der ammoniakalischen Lösung durch solche Zusätze sehr stark befördert.

Dagegen verstärken Chloride und noch mehr Bromide und ganz besonders Jodide die Hemmung, weil sie Gelegenheit geben zu Abscheidung von Silberhalogeniden, die schon bei äußerst geringen Mengen die Oberfläche hemmen, ähnlich, aber in noch stärkerem Maße als das erwähnte Silbernitrid.

Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus.

Von Prof. Dr. R. Weitzenböck
in Laren (N. H.) Holland.

(Vorgelegt von Hrn. Einstein am 18. Oktober 1928 [s. oben S. 449].)

Hr. Einstein hat in zwei kurzen Noten in diesen Sitzungsberichten (im nachfolgenden Literaturnachweis als Nr. 13 und 14 angeführt) eine Erweiterung der Riemannschen Geometrie gegeben, die es gestattet, die Richtungen zweier Linienelemente, die von zwei, in endlicher Entfernung voneinander befindlichen Punkten ausgehen, miteinander zu vergleichen. Diese Theorie beruht auf der Lehre von den Differentialinvarianten, die sich ergeben, wenn man von linearunabhängigen Vektoren ausgeht und nur solche Differentialinvarianten betrachtet, die eine bestimmte Struktur (»Drehungsinvarianz«) aufweisen.

Ich entwickle im folgenden die Theorie dieser Bildungen, stelle die einfachsten Invarianten auf und berechne die dazugehörigen Feldgleichungen, die sich einstellen, wenn diese Invarianten als Wirkungsfunktionen genommen werden. Im letzten Paragraphen gebe ich schließlich eine kurze Übersicht von weiteren Annahmen, die als Ausgangspunkte zu einer Feldphysik Verwendung finden können.

Literatur (chronologisch).

1. R. Weitzenböck, Artikel III E1 (Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie, Differentialinvarianten) der mathem. Enzykl., Anmerkung 59 in Nr. 18 (1921).
2. R. Weitzenböck, Invariantentheorie, Groningen: Noordhoff, p. 317 ff. (1923).
3. G. Vitali, Una derivazione covariante formata coll'ausilio di n sistemi covarianti del 1 ordine, Atti della Soc. Ligustica di Sc. e Lett., Vol. II, p. 248—253 (1924).
4. G. Vitali, Intorno ad una derivazione nel calcolo assoluto, ebenda, Vol. IV, p. 287—291 (1925).
5. G. F. C. Griss, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren, Dissertation Amsterdam (1925).
6. R. Weitzenböck, Über Differentialinvarianten von kovarianten Tensoren, Proceedings Akad. Amsterdam 29, p. 400—403 (1926).
7. R. Weitzenböck, Über die Differentialinvarianten eines speziellen schiefsymmetrischen Tensors p_{ik} im R_4, ebenda, Bd. 29, p. 404—409 (1926).
8. M. Euwe, Differentiaalinvarianten van twee covariante vectorvelden met vier veranderlijken, Dissertation Amsterdam (1926).

9. E. Bortolotti, On metric connexions with absolute parallelism, Proceedings Akad. Amsterdam, 30, p. 216—218 (1927).
10. E. Bortolotti, Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle V_n riemanniane, Rendic. R. Accad. dei Lincei, Vol. V, serie 6a, p. 741—747 (1927).
11. L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, Vol. VIII der Amer. Mat. Soc. Colloquium-Publications, p. 44 ff., New York (1927).
12. W. Euwe, Differentiaalinvarianten en partieele differentiaalvergelijkingen uit de tensorrekening, Dissertation Amsterdam (1928).
13. A. Einstein, Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus, Berliner Sitz. Ber. 17, p. 217—221 (7. Juni 1928).
14. A. Einstein, Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität, ebenda, p. 224—227 (14. Juni 1928).

§ 1.

Es seien in n Veränderlichen n linear-unabhängige kovariante Vektoren ${}^a h_\nu$ gegeben, so daß also der k-te Vektor die Komponenten ${}^k h_1, {}^k h_2, \cdots, {}^k h_n$ hat, die Determinante $h = |{}^a h_\nu| \neq 0$ ist und bei einer Transformation $x \to \bar{x}$ die Formeln gelten: ${}^a \bar{h}_\mu = {}^a h_\nu \cdot \dfrac{\partial x_\nu}{\partial \bar{x}_\mu}$.

Sind ${}_a h^\nu$ die algebraischen Komplemente der Elemente ${}^a h_\nu$ in h, geteilt durch diese Determinante, so stellen diese ${}_a h^\nu$ n linear-unabhängige kontravariante Vektoren dar, die eindeutig den ${}^a h_\nu$ zugeordnet sind. Es gilt, wenn über zwei gleiche (lateinische oder griechische) Indizes, von denen einer oben und einer unten steht, in gewöhnlicher Weise summiert wird:

$$(1) \qquad {}^a h_\nu \cdot {}_b h^\nu = {}^a_b \delta, \quad {}^a h_\nu \cdot {}_a h^\mu = \delta^\mu_\nu .$$

Aus den n Vektoren ${}^a h_\nu$ (oder ${}_a h^\nu$) ist eine kovariante Differentiation abzuleiten (Litt. 1, 2, 3, 4), deren Zusammenhangskomponenten durch

$$(2) \qquad \Delta^\lambda_{\alpha\beta} = {}_a h^\lambda \cdot \frac{\partial\, {}^a h_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad \left(\frac{\partial\, {}^a h_\alpha}{\partial x_\beta} = {}^a h_\nu \cdot \Delta^\nu_{\alpha\beta} \right)$$

gegeben sind, so daß die kovarianten Ableitungen der Vektoren v_ϱ bzw. w^ϱ gegeben sind durch die Tensoren:

$$(3) \qquad v_{\varrho\,[\tau]} = \frac{\partial v_\varrho}{\partial x_\tau} - \Delta^\lambda_{\varrho\tau} v_\lambda, \quad w^\varrho_{[\tau]} = \frac{\partial w^\varrho}{\partial x_\tau} + \Delta^\varrho_{\lambda\tau} w^\lambda .$$

Die kovarianten Ableitungen der ${}^a h_\varrho$ verschwinden: ${}^a h_{\varrho\,[\tau]} = 0$, ebenso der Krümmungstensor, der aus den $\Delta^\lambda_{\alpha\beta}$ ableitbar ist. Die lineare Übertragung mit den $\Delta^\lambda_{\alpha\beta}$ ist untersucht in Lit. 3, 4, 9 und 10.

Die Theorie der Differentialinvarianten der Vektoren ${}^a h_\nu$ ist entwickelt in Lit. 5. Wir entnehmen daraus folgendes. Die n Vektoren ${}^a h_\nu$ führen auf ebenso viele Rotationen

$$(4) \qquad {}^a p_{\lambda\mu} = \frac{\partial\, {}^a h_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\, {}^a h_\mu}{\partial x_\lambda} = rot\ {}^a h_\nu ;$$

aus den $\Delta^{\nu}_{\alpha\beta}$ erhält man den bezüglich α und β alternierenden Tensor

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\Delta^{\nu}_{\alpha\beta} - \Delta^{\nu}_{\beta\alpha}\right) \tag{5}$$

(Bezeichnung nach EINSTEIN, Lit. 13; GRISS schreibt in Lit. 5 $S^{\nu}_{\alpha\beta}$ für $2\,\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$). Es besteht dann der **Reduktionssatz 1**) (Lit. 5, p. 12):

Die Differentialinvarianten m-ter Ordnung von n linear-unabhängigen Vektoren ${}^{a}h_{\nu}$ bestimmen heißt, die affinen Invarianten aufsuchen von ${}^{a}h_{\nu}$, ${}^{a}p_{\lambda\mu}$ und den kovarianten Ableitungen ${}^{a}p_{\lambda\mu[\varrho]}, \cdots$ der ${}^{a}p_{\lambda\mu}$ bis einschließlich der $(m-1)$-ten.

Nun ist weiters leicht zu zeigen, daß sich die ${}^{a}p_{\lambda\mu}$ durch die $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$ und umgekehrt ausdrücken lassen (Lit. 5, p. 10):

$${}^{a}p_{\lambda\mu} = 2 \cdot {}^{a}h_{\tau} \cdot \Lambda^{\tau}_{\lambda\mu}, \qquad \Lambda^{\tau}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \cdot {}_{a}h^{\tau} \cdot {}^{a}p_{\lambda\mu}. \tag{6}$$

Demgemäß kann der Satz 1 auch wie folgt formuliert werden (Lit. 5, p. 14) **Satz 2**:

Die Differentialinvarianten m-ter Ordnung der Vektoren ${}^{a}h_{\nu}$ bestimmen heißt, die affinen Invarianten aufsuchen von ${}^{a}h_{\nu}$, $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$ und den kovarianten Ableitungen $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta[\varrho]}, \cdots$ des Tensors $\Lambda_{\alpha\beta}$ bis einschließlich der $(m-1)$-ten.

§ 2.

Nach EINSTEIN (Lit. 13) wird von den auftretenden Tensoren und Invarianten »Drehungsinvarianz« gefordert. Dies besagt folgendes: Denken wir uns die n Vektoren ${}^{a}h_{\nu}$ von einem Punkte O auslaufend und nehmen O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Cartesischen Achsenkreuzes, auf das wir die n Vektoren ${}^{a}h_{\nu}$ beziehen, dann müssen die im weiteren verwendeten Tensoren und Invarianten bei Drehungen

$${}^{a}h^{*}_{\mu} = {}^{a}_{b}D \cdot {}^{b}h_{\mu}, \tag{7}$$

wo also die n^2 Konstanten ${}^{a}_{b}D$ eine eigentlich-orthogonale Matrix bilden, absolut-invariant sein.

Aus (7) folgen nun $h^{*} = h$ und $\left({}_{a}h^{\mu}\right)^{*} = {}^{b}_{a}D \cdot {}_{b}h^{\mu}$; daher sind nach (2) die $\Delta^{\lambda}_{\alpha\beta}$ drehungsinvariant. Also nach (5) auch die $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$ und alle kovarianten Ableitungen $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta[\varrho]}, \cdots$ dieser $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$.

Es ist nun leicht, die allgemeine Struktur der gesuchten Invarianten W anzugeben. Wir haben nach Satz 2:

$$W = W\left({}^{a}h_{\nu}, \Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}, \Lambda^{\nu}_{\alpha\beta[\varrho]}, \cdots\right) \tag{8}$$

mit $W^{*} = W$. Da bei Drehungen (7) die $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$, $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta[\varrho]}, \cdots$ als Konstante zu betrachten sind, kommt es nur auf die ${}^{a}h_{\nu}$ an. Halten wir hier ν fest und fassen ${}^{1}h_{\nu}, {}^{2}h_{\nu}, \cdots, {}^{n}h_{\nu}$ als Komponenten eines kontravarianten Vektors auf,

so erhalten wir für $\nu = 1, 2, \cdots, n$ gerade n solche Vektoren, und die haben bei (7) keine anderen Invarianten als die inneren Produkte

$$g_{\lambda\mu} = \sum_a {}^a h_\lambda \cdot {}^a h_\mu . \tag{9}$$

Diese $g_{\lambda\mu}$ sind die Komponenten eines Tensors, der als Maßtensor im Punkte O gebraucht werden kann. Man erhält aus (9):

$$g = |g_{\lambda\mu}| = |{}^a h_\nu|^2 = h^2 \tag{10}$$

$$g^{\lambda\mu} = \sum_a {}_a h^\lambda \cdot {}_a h^\mu , \tag{11}$$

und statt (8) bekommen wir:

$$W = F(h, g_{\lambda\mu}, g^{\lambda\mu}, \Lambda^\nu_{\alpha\beta}, \Lambda^\nu_{\alpha\beta[\rho]}, \ldots). \tag{12}$$

Dies gibt, wenn wir noch bedenken, daß die kovarianten Ableitungen der $g_{\lambda\mu}$ und der $g^{\lambda\mu}$ identisch verschwinden, den **Satz 3**:

Alle Differentialinvarianten der Vektoren ${}^a h_\nu$, die auch bei Drehungen invariant bleiben, sind aufzubauen aus h, den Tensoren $g_{\lambda\mu}, \Lambda^\nu_{\alpha\beta}$ und den kovarianten Ableitungen von $\Lambda^\nu_{\alpha\beta}$.

Hierbei ist zu bemerken, daß so wie in (3) kovariant abzuleiten ist, nämlich mit Hilfe der $\Delta^\lambda_{\alpha\beta}$, was wir so wie bisher durch $[\rho]$ andeuten: $\Lambda^\nu_{\alpha\beta[\rho]}$ usw. Die $g_{\lambda\mu}$ ergeben eine zweite Art kovarianter Ableitungen, berechnet aus den Zusammenhangskomponenten

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\nu\tau} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} \right);$$

diese Art des kovarianten Ableitens deuten wir durch (ρ) an:

$$v_{\alpha(\rho)} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\rho} - \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} v_\lambda .$$

Nach (9) und (11) berechnet man:

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \Delta^\nu_{\alpha\beta} - \Lambda^\nu_{\alpha\beta} + \Theta^\nu_{\alpha\beta} , \tag{13}$$

wobei $\Theta^\nu_{\alpha\beta}$ ein in α und β symmetrischer Tensor ist:

$$\Theta^\nu_{\alpha\beta} = g^{\nu\rho} (g_{\alpha\tau} \Lambda^\tau_{\rho\beta} + g_{\beta\tau} \Lambda^\tau_{\rho\alpha}) . \tag{14}$$

Mit Hilfe von (13) findet man jetzt:

$$v_{\rho(\sigma)} = v_{\rho[\sigma]} + \Lambda^\nu_{\rho\sigma} v_\nu - \Theta^\nu_{\rho\sigma} v_\nu . \tag{15}$$

Wir führen noch die später gebrauchten Formeln an:

$$g_{\lambda\mu} \cdot {}_a h^\mu = {}^a h_\lambda , \quad g^{\lambda\mu} \cdot {}^a h_\mu = {}_a h^\lambda \tag{16}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_\rho} = h \cdot \Delta^\alpha_{\alpha\rho} . \tag{17}$$

Ferner setzen wir (Lit. 14):

$$(18) \qquad \Lambda^{\alpha}_{\varrho\alpha} = -\Lambda^{\alpha}_{\alpha\varrho} = \Phi_{\varrho} = \frac{1}{2}(\Delta^{\alpha}_{\varrho\alpha} - \Delta^{\alpha}_{\alpha\varrho}), \quad g^{\lambda\mu}\Phi_{\mu} = \Phi^{\lambda}.$$

§ 3.

Wir stellen jetzt die Frage nach den Wirkungsfunktionen

$$(19) \qquad \mathfrak{W} = h \cdot W,$$

die zur Ableitung der Feldgleichungen verwendet werden können. W in (19) ist eine absolute Invariante und nach Satz 3 aufzubauen aus den

$$g_{\lambda\mu}, \Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}, \Lambda^{\nu}_{\alpha\beta[\varrho]}, \ldots .$$

Die Ordnung von W ist die höchste Differentiationsordnung der in W vorhandenen Argumente. Wir haben als einzige Wirkungsfunktion nullter Ordnung $\mathfrak{W}_0 = h$.

Jede W_1 erster Ordnung baut sich aus dem $g_{\lambda\mu}$ und $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$ auf. Die Bestimmung aller W_1 führt somit (wenn wir $g_{\lambda\mu}$ als Maßtensor betrachten) auf das noch ungelöste Problem der Tensoralgebra: Bestimmung der orthogonalen Invarianten des bezüglich α und β alternierenden, gemischten Tensors $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$[1].

Es ist leicht zu beweisen (auf Grund des sogenannten ersten Fundamentalsatzes für Drehungsinvarianten), daß es keine W_1 vom ersten Grade in den $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$ gibt und daß die vom zweiten Grade vollständig aufgezählt werden durch:

$$(20) \qquad \begin{cases} A = g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}_{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{\nu\alpha} & \text{(Lit. 13 und 14)} \\ B = g_{\mu\nu}g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta}\Lambda^{\nu}_{\sigma\tau} & \text{(Lit. 13 und 14)} \\ \Phi = g^{\mu\nu}\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha}\Lambda^{\beta}_{\nu\beta} = g^{\mu\nu}\Phi_{\mu}\Phi_{\nu} = \Phi^{\nu}\Phi_{\nu}. \end{cases}$$

Aus den $g_{\lambda\mu}$ allein sind bekanntlich keine Invarianten W_1 erster Ordnung zu bilden; erst bei der zweiten Ordnung stellen sich die Krümmungstensoren $R^{i}_{k,lm}$, R_{km} und die Invariante R ein. Diese alle müssen nach Satz 3 durch $g_{\lambda\mu}$, $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta}$ und $\Lambda^{\nu}_{\alpha\beta[\varrho]}$ ausdrückbar sein. Tatsächlich erhält man nach einiger Rechnung aus

$$R^{i}_{k,lm} = \frac{\partial\Gamma^{i}_{km}}{\partial x_l} - \frac{\partial\Gamma^{i}_{kl}}{\partial x_m} + \Gamma^{i}_{lr}\Gamma^{r}_{km} - \Gamma^{i}_{mr}\Gamma^{r}_{kl}$$

und (13), (14):

$$(21) \quad R^{i}_{k,lm} = -\Lambda^{i}_{km[l]} + \Lambda^{i}_{kl[m]} + \Theta^{i}_{km[l]} - \Theta^{i}_{kl[m]} + 2\Lambda^{\varrho}_{lm}\Lambda^{i}_{k\varrho} - \Lambda^{\varrho}_{km}\Lambda^{i}_{l\varrho} + \Lambda^{\varrho}_{kl}\Lambda^{i}_{m\varrho} + \\ + 2\Lambda^{\varrho}_{ml}\Theta^{i}_{k\varrho} - \Lambda^{\varrho}_{km}\Theta^{i}_{l\varrho} + \Lambda^{\varrho}_{kl}\Theta^{i}_{m\varrho} + \Lambda^{i}_{l\varrho}\Theta^{\varrho}_{km} - \Lambda^{i}_{m\varrho}\Theta^{\varrho}_{kl} + \Theta^{i}_{l\varrho}\Theta^{\varrho}_{km} - \Theta^{i}_{m\varrho}\Theta^{\varrho}_{kl}$$

$$(22) \quad R_{km} = -\Lambda^{i}_{km[i]} + 2\Phi_{k[m]} + \Theta^{i}_{km[i]} + \Lambda^{\beta}_{\alpha m}\Lambda^{\alpha}_{k\beta} + 2\Phi_{\varrho}\Lambda^{\varrho}_{km} - 2\Phi_{\varrho}\Theta^{\varrho}_{km} + \\ + \Lambda^{\beta}_{m\alpha}\Theta^{\alpha}_{k\beta} + \Lambda^{\beta}_{k\alpha}\Theta^{\alpha}_{m\beta} - \Theta^{\alpha}_{m\beta}\Theta^{\beta}_{k\alpha}$$

---

[1] Auch die Bestimmung der affinen Invarianten eines solchen Tensors ist noch nicht durchgeführt; am weitesten dringt hier für $n = 4$ vor: J. C. Choufoer, Het bilineaire Punt-Lijn Connex in de driedimensionale ruimte, Dissertation Amsterdam (1927).

$$R = 4(\Psi - \Phi) - 2A - B, \tag{23}$$

wobei gesetzt ist:

$$\Psi = \Phi^{\alpha}_{[\alpha]} = g^{\alpha\nu}\Phi_{\nu[\alpha]} = g^{\alpha\nu}\Lambda^{\beta}_{\nu\beta[\alpha]}. \tag{24}$$

Ψ ist die einfachste Invariante zweiter Ordnung.

§ 4.

Wir behandeln noch die Feldgleichungen, die sich aus den im vorigen Paragraphen gefundenen Wirkungsfunktionen ergeben. Die Variationen

$$\delta^a h_\nu = {}^a v_\nu \tag{25}$$

denken wir uns in üblicher Weise so gewählt, daß sie nebst ihren Ableitungen am Rande des Integrationsgebietes verschwinden.

Aus (25) berechnet man zunächst:

$$\delta_b h^\sigma = -{}_b h^\nu \cdot {}_a h^\sigma \cdot {}^a v_\nu \tag{26}$$

$$\delta h = h \cdot {}_a h^\nu \cdot {}^a v_\nu \tag{27}$$

$$\delta g_{\lambda\mu} = \sum_a {}^a h_\mu \cdot {}^a v_\lambda + \sum_a {}^a h_\nu \cdot {}^a v_\mu \tag{28}$$

$$\delta g^{\lambda\mu} = -(g^{\mu\nu} \cdot {}_a h^\lambda + g^{\lambda\nu} \cdot {}_a h^\mu) \cdot {}^a v_\nu \tag{29}$$

$$\delta \Delta^\sigma_{\alpha\beta} = -\Delta^\nu_{\alpha\beta} \cdot {}_a h^\sigma \cdot {}^a v_\nu + {}_a h^\sigma \cdot \frac{\partial {}^a v_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{30}$$

$$\delta \Lambda^\sigma_{\alpha\beta} = -\Lambda^\nu_{\alpha\beta} \cdot {}_a h^\sigma \cdot {}^a v_\nu + \frac{1}{2} \cdot {}_a h^\sigma \left(\frac{\partial {}^a v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial {}^a v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \tag{31}$$

$$\delta \Phi_\alpha = -\Lambda^\nu_{\alpha\varrho} \cdot {}_a h^\varrho \cdot {}^a v_\nu + \frac{1}{2} \cdot h^\varrho \left(\frac{\partial {}^a v_\alpha}{\partial x_\varrho} - \frac{\partial {}^a v_\varrho}{\partial x_\alpha} \right) \tag{32}$$

Setzen wir dann, wenn $\mathfrak{W} = h \cdot W$ die Wirkungsfunktion ist:

$$\delta \int h W \, dx = \int \delta (h W) \, dx = \int {}_a[h W]^\nu \cdot {}^a v_\nu \, dx, \tag{33}$$

so sind die kontravarianten Vektordichten

$${}_a[\mathfrak{W}]^\nu = {}_a[h W]^\nu \tag{34}$$

die »Variationsableitungen« von $\mathfrak{W}$ und geben, gleich Null gesetzt, die zu W gehörigen Feldgleichungen.

Wir beginnen mit der Invariante zweiter Ordnung $W = \Psi = \Phi^\alpha_{[\alpha]}$:

$$\delta(h\Psi) = \delta h \cdot \Psi + h \cdot \delta \Psi = h\Psi \cdot {}_a h^\nu \cdot {}^a v_\nu + h \cdot \delta \left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Delta^\alpha_{\lambda\alpha} \Phi^\lambda \right).$$

Hier ist das zweite Glied weiter zu behandeln, wobei die Ableitungen $\frac{\partial {}^a v_\nu}{\partial x_\alpha}$ durch partielle Integration beseitigt werden. Man erhält:

$$(35) \qquad {}_a[h\,\Psi]^\nu = 2h\cdot\{(\Psi-\Phi)\cdot {}_a h^\nu - \Phi^\nu_{[\alpha]}\cdot {}_a h^\alpha\}\,.$$

Wählt man also $\Psi = \Phi^\alpha_{[\alpha]}$ als Wirkungsfunktion, so lauten die n^2 Feldgleichungen zur Bestimmung der n^2 Vektorkomponenten ${}^a h_\nu$:

$$(36) \qquad (\Psi-\Phi)\cdot {}_a h^\nu - \Phi^\nu_{[\alpha]}\cdot {}_a h^\alpha = 0\,.$$

Multipliziert man dies mit ${}^a h_\nu$, so erhält man $n(\Psi-\Phi)-\Psi = 0$, also $\Psi = \frac{n}{n-1}\Phi$, $(n > 1)$, und statt (36) kommt:

$$(37) \qquad \Phi^\alpha_{[\beta]} = \frac{1}{n-1}\Phi\,\delta^\alpha_\beta\,,\ \Phi_{\alpha[\beta]} = \frac{1}{n-1}\Phi\cdot g_{\alpha\beta}\,.$$

Die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen ergeben sich aus der verallgemeinerten Gleichung von Ricci (Lit. 5, p. 14) für einen beliebigen Tensor:

$$T_{[\alpha][\beta]} - T_{[\beta][\alpha]} = -2\,\Lambda^\mu_{\alpha\beta}T_{[\mu]}\,,$$

wenn (37) selbst berücksichtigt und $\Phi \neq 0$ angenommen wird in der Gestalt:

$$(38) \qquad (n-1)\Lambda^\nu_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha\delta^\nu_\beta - \Phi_\beta\delta^\nu_\alpha \qquad (\Lambda^\nu_{\alpha\beta}\Phi_\nu = 0)\,.$$

Dies läßt sich mit Hilfe der rot ${}^a h_\nu = {}^a p_{\alpha\beta}$ besonders einfach schreiben:

$$(39) \qquad (n-1)\,p_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha h_\beta - \Phi_\beta h_\alpha\,.$$

Die Integrabilitätsbedingungen dieser $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen erster Ordnung sind wegen (37) erfüllt[1].

Die weiteren Invarianten Φ, A und B, als Wirkungsfunktionen genommen, ergeben die folgenden Variationsableitungen:

$$(40) \qquad {}_a[h\,\Phi]^\nu = -h\cdot\Phi^\nu_{[\alpha]}\cdot {}_a h^\alpha$$

(mit ${}^a h_\nu$ verjüngt gibt dies: $-h\,\Psi$).

$$(41) \qquad {}_a[h\,A]^\nu = hA\cdot {}_a h^\nu - 2hg^{\lambda\nu}\cdot {}_a h^\mu\,\Lambda^\alpha_{\lambda\beta}\Lambda^\beta_{\mu\alpha} + hg^{\lambda\mu}\cdot {}_a h^\beta\,\Lambda^\nu_{\lambda\beta[\mu]} - hg^{\lambda\nu}\cdot {}_\alpha h^\beta\,\Lambda^u_{\lambda\beta[\mu]} - 2h\Phi^\lambda\cdot {}_a h^\beta\cdot\Lambda^\nu_{\lambda\beta} + 2h\Phi_\alpha\cdot {}_a h^\beta\cdot g^{\lambda\nu}\Lambda^\alpha_{\lambda\beta}$$

(mit ${}^a h_\nu$ verjüngt gibt dies: $h\{(n-2)A + \Psi - 2\Phi\}$).

$$(42) \qquad {}_a[h\,B]^\nu = hB\cdot {}_a h^\nu - 4hg^{\lambda\mu}g^{\alpha\nu}g_{\varrho\sigma}\cdot {}_a h^\beta\,\Lambda^\varrho_{\lambda\alpha}\Lambda^\sigma_{\mu\beta} + 2hg^{\lambda\mu}g^{\alpha\nu}\cdot {}^a h_\varrho\,\Lambda^\varrho_{\lambda\alpha[\mu]} + 2hg^{\lambda\tau}g^{\alpha\mu}\cdot {}^a h_\varrho\,\Lambda^\varrho_{\lambda\alpha}\Lambda^\nu_{\tau\mu} - 4hg^{\alpha\nu}\cdot {}^a h_\varrho\cdot\Phi^\lambda\,\Lambda^\varrho_{\lambda\alpha}$$

(mit ${}^a h_\nu$ verjüngt gibt dies: $h\{(n-2)B + 2\Psi - 4\Phi\}$).

[1] Aus (37_2) folgt noch $\Phi_{\alpha[\beta]} - \Phi_{\beta[\alpha]} = 0$ und hieraus wegen (38_2): rot $\Phi_\nu = \frac{\partial\,\Phi_\alpha}{\partial\,x_\beta} - \frac{\partial\,\Phi_\beta}{\partial\,x_\alpha} = 0$. Werden also diese letzteren Gleichungen zur Charakterisierung des reinen Gravitationsfeldes verwendet (vgl. bei Einstein, Lit. 14, Anmerkung p. 225), so ist Ψ hiervor die Wirkungsfunktion.

Hiernach ist mit Hilfe von (23) ${}_a[hR]^\nu$ berechenbar, doch kommt man dabei nicht auf einfachere Ausdrücke.

§ 5.

Der Vollständigkeit halber führen wir noch kurz an, wie man bei $n = 4$ noch auf andere Arten, von einfachen Tensoren ausgehend, zu Zusammenhangskomponenten gelangt.

Bei Riemann haben wir die 10 Funktionen g_{ik}, die Koeffizienten einer quadratischen Differentialform, woraus in bekannter Weise die $\Gamma_{i,kl}$ und Γ^i_{kl} abgeleitet werden. Im obigen haben wir statt der 10 g_{ik} 16 Funktionen ${}^a h_\nu$, die Komponenten von vier unabhängigen Vektoren benutzt und daraus die $\Delta^\nu_{\alpha\beta}$ (Gleichung [2]) abgeleitet. In beiden Fällen werden Differentialinvarianten als Wirkungsfunktionen gebraucht und daraus durch Variation der 10 g_{ik} bzw. der 16 ${}^a h_\nu$ die »Feldgleichungen« ermittelt.

Man kann nun, und dies wollen wir hier noch kurz auseinandersetzen, auch mit weniger als 10, nämlich mit 8, 6 und mit 5 Funktionen auskommen, wobei allerdings die Differentiationsordnungen höher werden (hierzu Lit. 6).

1. Gehen wir nämlich erstens aus (bei $n = 4$) von zwei kovarianten Vektoren a_i und α_i mit den Rotationen $f_{ik} = \text{rot } a_\nu$, $\phi_{ik} = \text{rot } \alpha_\nu$, so haben wir hier fünf skalare Dichten erster Ordnung:

$$(43)\quad \mathfrak{A}_{11} = \frac{1}{2}\sum f_{12} f_{34},\ \mathfrak{A}_{12} = \frac{1}{2}\sum f_{12}\phi_{34},\ \mathfrak{A}_{22} = \frac{1}{2}\sum \phi_{12}\phi_{34};$$

$$\mathfrak{B}_1 = \sum f_{12}(a_3\alpha_4 - a_4\alpha_3),\quad \mathfrak{B}_2 = \sum \phi_{12}(\alpha_3 a_4 - \alpha_4 a_3).$$

Sind $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zwei beliebige dieser skalaren Dichten, so sind

$$(44)\qquad b_i = \frac{1}{\mathfrak{R}_1}\sum f_{ik}\phi^{kl}a_l,\quad \beta_i = \frac{1}{\mathfrak{R}_2}\sum \phi_{ik} f^{kl}\alpha_l$$

zwei neue kovariante Vektoren, die für $\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_2^2 + 2\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_1^2 \neq 0$ mit a_i und α_i zusammen vier linear-unabhängige Vektoren bilden.

Diese vier Vektoren können wir dann an Stelle der obigen ${}^a h_\nu$ verwenden. Die hier sich ergebenden Arten des kovarianten Ableitens sowie die einfachsten Wirkungsfunktionen und Feldgleichungen sind in der Dissertation des holländischen Schachmeisters Max Euwe (Lit. 8) untersucht.

2. Zweitens können wir bei $n = 4$ ausgehen von einem kovarianten alternierenden Tensor zweiter Stufe p_{ik}, bei dem die Invariante $\mathfrak{R} = \frac{1}{2}\sum p_{12}p_{34} \neq 0$ und der keine Rotation ist (Lit. 12). Hier wird

$$\xi^m = \frac{1}{\mathfrak{R}}\sum_{cycl}\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_l}$$

ein kontravarianter Vektor; $\xi_i = p_{i\lambda}\xi^\lambda$ also ein kovarianter Vektor (erster Ordnung) und $\pi_{ik} = \text{rot } \xi_\nu$ ein kovarianter alternierender Tensor (zweiter

Ordnung). Aus p_{ik}, ξ_i und π_{ik} läßt sich dann leicht noch ein kovarianter Vektor η_i (dritter Ordnung)

$$\eta_i = \operatorname{grad}_i \frac{\sum p_{12}\pi_{31}}{\sum p_{12}p_{34}}$$

herleiten und mit ξ_i und η_i können wir so wie im Falle 1 weitergehen.

3. Fünf unabhängige Komponenten p_{ik} haben wir bei einem speziellen alternierenden Tensor, wenn also $\mathfrak{R} = \frac{1}{2}\sum p_{12}p_{34} = 0$ ist. Ist überdies p_{ik} eine Rotation, so gibt es keine Differentialinvarianten; ist p_{ik} hingegen keine Rotation, dann läßt sich eine skalare Dichte dritter Ordnung ermitteln (Lit. 7 und 12, p. 18ff.), und mit dieser können dann so wie im Falle 2 die Differentialinvarianten vierter und höherer Ordnung berechnet werden.

Ausgegeben am 28. November.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XXVII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 8. November. (S. 475)

G. Szegö: Verallgemeinerung des ersten Bieberbachschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (S. 477)

J. G. Hagen: Die Geschichte des Nebels »Barnard 86«. (Mitteilung aus der Sitzung der phys.-math. Klasse vom 1. November.) (S. 482)

Library of Congress
MAY 23 1929
Washington, D. C.

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XXVII. Gesamtsitzung. 8. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Bodenstein hielt einen Vortrag über Kettenreaktionen. (Ersch. später.)

Kettenreaktionen kommen zustande, wenn eine reagierende Molekel neben dem Endprodukt ein instabiles Zwischenprodukt erzeugt, das sich seinerseits wieder mit einer Molekel des Ausgangsstoffes in Endprodukt und instabiles Zwischenprodukt umsetzt, und so weiter, so daß an den ursprünglichen Reaktionsakt sich eine unter Umständen sehr lange Kette von weiteren Reaktionsakten anschließt. Statt instabiler Zwischenprodukte kann auch die in den Molekeln des Reaktionsprodukts zunächst aufgehäufte Energie eine Kette veranlassen.

Die Vorstellung der Kettenreaktionen beider Arten ist vor längerer Zeit vom Vortragenden zur Deutung gewisser photochemischer Prozesse entwickelt worden. Sie ist inzwischen von anderer Seite auf reine Dunkelreaktionen übertragen worden und führt zum Verständnis einer Reihe wichtiger Erscheinungen. Über diese wird berichtet unter Ausblicken auf die weitere Verfolgung des Gedankens.

2. Hr. Schuchhardt berichtete über die Ausgrabungen bei Garz auf Rügen. (Ersch. später.)

Die Ausgrabungen, die unsere Akademie und die Notgemeinschaft finanziert hatte, wurden in Gemeinschaft mit Prof. O. Stiehl und Dr. W. Petzsch im August und September ausgeführt. Sie ergaben zwei kleine wendische Heiligtümer und die Reste eines dritten größeren, das im übrigen der Dynastenburg der Rügenschen Fürsten im 13. Jahrhundert zum Opfer gefallen war. Von dieser Burg wurde der nahezu quadratische Hauptbau mit einigen Nebengebäuden und die Kapelle gefunden. Die Einzelfunde sind interessant wegen ihrer Übergangsformen vom wendischen zum deutschen Mittelalter.

3. Hr. Bieberbach legte eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. G. Szegö in Königsberg i. Pr. vor: Verallgemeinerung des ersten Bieberbachschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete.

Der erste Flächensatz wird in seiner potentialtheoretischen Formulierung auf mehrfach zusammenhängende Bereiche übertragen.

4. Hr. Stutz überreichte das 105. bis 108. Heft der von ihm herausgegebenen kirchenrechtlichen Abhandlungen: August Hagen »Staat und katholische Kirche in Württemberg in den Jahren 1848—1862«, Teil 1 und 2 (Stuttgart 1928).

5. Hr. Pompeckj überreichte die englische Übersetzung seiner Arbeit »Is the earth growing old?«.

6. Hr. Wilcken überreichte das 1. und 2. Heft des 9. Bandes des von ihm herausgegebenen »Archivs für Papyrusforschung« (Leipzig und Berlin 1928).

7. Das korrespondierende Mitglied Hr. Wenger übersandte einen Sonderabdruck seiner Abhandlung »Rechtshistorische Papyrusforschung« (1928).

8. Vorgelegt wurde der 14. Band der 1. Abteilung von »Wielands gesammelten Schriften« (Berlin 1928) sowie die 2. Lieferung des 2. Bandes des »Hessen-Nassauischen Volkswörterbuches« (Marburg 1928).

9. Endlich wurde vorgelegt der Nachruf auf das verstorbene auswärtige Mitglied Hugo Schuchardt in Graz von Hrn. M. Friedwagner (Sonderabdruck).

Verallgemeinerung des ersten Bieberbachschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete.

Von Prof. Dr. G. Szegö
in Königsberg.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Wir betrachten in der x, y-Ebene ein Gebiet T, das einfach zusammenhängend ist und den Koordinatenursprung enthält. Es sei der Einfachheit halber angenommen, daß der Rand von T eine Jordansche Kurve ist. Wir bezeichnen mit

$$G(x, y) = \log \frac{1}{r} - H(x, y) \tag{1}$$

die zu dem Koordinatenursprung als Aufpunkt gehörige Greensche Funktion, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zu setzen ist. Sie ist bekanntlich eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß H in T regulär harmonisch ist, daß ferner G auf dem Rande von T überall verschwindet.

Es sei $H(0, 0) = \log \frac{1}{\rho}$. *Der erste Bieberbachsche Flächensatz besagt dann, daß der Flächeninhalt von* T (es ist der innere Jordansche Inhalt gemeint) $\geqq \pi \rho^2$ *ist*[1].

Unter allen Gebieten T, für welche $H(0, 0)$ einen gegebenen Wert hat, besitzt also das Kreisinnere den kleinsten Flächeninhalt.

Dieser Satz wird gewöhnlich in der folgenden, mit der vorigen völlig gleichwertigen Form ausgesprochen: *Es sei* $z = x + iy$ *und*

$$Z = \phi(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \tag{2}$$

bezeichne diejenige eindeutig bestimmte Funktion, welche das Gebiet T *auf das Innere eines Kreises* $|Z| < \rho$ *abbildet, und zwar so, daß* $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ *wird. Die positive Zahl* ρ *ist dann ebenfalls eindeutig bestimmt und der Flächeninhalt von* T *ist* $\geqq \pi \rho^2$.

In der Tat lautet die Greensche Funktion von T:

$$G(x, y) = \log \frac{1}{|\phi(z)|} - \log \frac{1}{\rho}. \tag{3}$$

[1] L. Bieberbach, Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 38 (1914), S. 98—112.

Die erste (potentialtheoretische) Formulierung dieses Satzes besitzt nun gegenüber der zweiten (funktionentheoretischen) Formulierung den Vorteil, daß man in dieser Form die Gültigkeit des Satzes *ohne Änderung auf mehrfach zusammenhängende Gebiete ausdehnen kann*. Wir betrachten dabei der Einfachheit halber Gebiete mit endlich vielen JORDANschen Randkurven. Unter dem Flächeninhalt ist auch hier der innere JORDANsche Inhalt zu verstehen. Es würde keine Schwierigkeiten machen, das Ergebnis auf die allgemeinsten zusammenhängenden Gebiete auszudehnen.

1. Hr. G. PÓLYA hat in diesen Sitzungsberichten[1] den sog. zweiten BIEBERBACHschen Flächensatz auf mehrfach zusammenhängende Gebiete übertragen (vgl. II). Eine leichte Modifikation seiner Methode führt auch bei unserer Aufgabe zum Ziele.

Es sei T^{-1} dasjenige Gebiet, das aus T durch Transformation mittels reziproker Radien und Spiegelung auf der reellen Achse entsteht und $\mathfrak{A}$ bezeichne die Komplementärmenge von T^{-1}. Sie ist offenbar beschränkt und abgeschlossen; ihr transfiniter Durchmesser[2] τ steht zu der obigen Zahl ρ in der Beziehung

$$\tau = \frac{1}{\rho}.$$

In der Tat folgt dies unmittelbar aus der Definition von τ (vgl. I) und aus der Tatsache, daß eine reguläre harmonische Funktion bei der Transformation durch reziproke Radien in eine ebensolche übergeht.

Mit Hilfe dieses Zusammenhanges gelingt es nun leicht, den Beweis unseres Satzes auf den der folgenden Behauptung über Polynome zurückzuführen.

Es sei $Q(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots + d_n z^n$ *ein beliebiges Polynom höchstens n-ten Grades und* $\mathfrak{F}_\varrho$ *bezeichne die Menge derjenigen komplexen Zahlen z, für welche*

$$\left| \frac{z^n}{Q(z)} \right| \leqq \varrho^n \tag{4}$$

gilt. Hier bedeutet ϱ *eine positive Zahl, die* $< |d_n|^{-\frac{1}{n}}$ *ist*[3]. *Bezeichnet* $|\mathfrak{F}_\varrho|$ *den Flächeninhalt von* $\mathfrak{F}_\varrho$, *so hat man*

$$|\mathfrak{F}_\varrho| \geqq \pi \varrho^2 \tag{5}$$

und das Gleichheitszeichen tritt nur dann ein, wenn $Q(z) = 1$ *ist, d. h. wenn* $\mathfrak{F}_\varrho$ *sich auf eine Kreisscheibe um den Nullpunkt als Mittelpunkt reduziert.*

Die Zurückführung geschieht nach dem in I (S. 231—232) geschilderten Vorgange. Wir betrachten das zu der Menge $\mathfrak{A}$ gehörige n-te TSCHEBYSCHEFFsche Polynom. Durch die Abbildung $z' = \frac{1}{z}$ erhält man hieraus ein Polynom

[1] Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. Erste Mitteilung, S. 228—232; zweite Mitteilung, S. 280—282 (1928). Diese beiden Mitteilungen zitiere ich im folgenden mit I und II.

[2] Auch ROBINSche Konstante oder Kapazitätskonstante genannt. Vgl. die Definition in I.

[3] Für $d_n = 0$ kann ϱ eine beliebige positive Zahl bedeuten.

n-ten Grades $Q_n(z)$ mit $Q_n(0) = 1$, das auf der Komplementärmenge von T der Ungleichung

$$\left|\frac{z^n}{Q_n(z)}\right| \geqq (\rho - \varepsilon)^n$$

genügt; hierbei ist ε eine feste positive Zahl, $0 < \varepsilon < \frac{\rho}{2}$ und n genügend groß gewählt. Die Menge der Punkte z mit

$$\left|\frac{z^n}{Q_n(z)}\right| \leqq (\rho - 2\varepsilon)^n$$

liegt mithin in T; ihr Inhalt ist nach dem eben formulierten Polynomsatze $\geqq \pi(\rho - 2\varepsilon)^2$, und dasselbe gilt um so mehr für den inneren Jordanschen Inhalt von T.

2. Zum Beweis des Polynomsatzes setzen wir

$$Q(z) = (1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z) \cdots (1 - \alpha_q z) \tag{6}$$
$$(\alpha_\nu \neq 0;\ \nu = 1, 2, \cdots, q),$$

wo $1 \leqq q \leqq n$ ist, wenn der Fall $Q(z) = 1$ ausgeschlossen wird. Es sei ferner

$$Z = \frac{z^n}{Q(z)},\quad z = f(Z) \tag{7}$$

und ρ sei derart gewählt, daß der Kreis $|Z| = \rho^n$ durch keinen Verzweigungspunkt der algebraischen Funktion $f(Z)$ hindurchgeht. Die Menge $\mathfrak{F}_\rho$ ist wegen $\rho < |d_n|^{-\frac{1}{n}}$ beschränkt; sie besteht aus dem abgeschlossenen Inneren einer gewissen Jordankurve C, mit evtl. Ausnahme der Innengebiete von gewissen Jordankurven $C_1, C_2, \cdots, C_l$, die sämtlich im Inneren von C liegen und keine Punkte miteinander gemeinsam haben. Jede Kurve C_λ enthält mindestens eine Nullstelle α_ν^{-1}, so daß $l \leqq q$ ist. (Es kann auch $l = 0$ sein.) Ist ferner $Q(z)$ vom genauen Grade n, d. h. $q = n$, so liegt auch im Äußeren von C mindestens eine Nullstelle[1]. Die Menge $\mathfrak{F}_\rho$ enthält freilich keine Nullstellen, wohl aber den Nullpunkt als inneren Punkt.

Das Innere von $\mathfrak{F}_\rho$ ist ein $(l+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet, dessen Greensche Funktion

$$G(x, y) = \log\frac{1}{r} - H(x, y) = \log\frac{1}{r} - \log\frac{1}{\rho} + \frac{1}{n}\log|Q(z)| \tag{8}$$

ist. Es gilt offenbar $H(0, 0) = \log\frac{1}{\rho}$.

Für genügend kleine Werte von ρ ist unser Gebiet einfach zusammenhängend und die Behauptung infolge des ersten Bieberbachschen Flächensatzes bekannt. Wir beweisen nun im Anschluß an II, daß $\rho^{-2}|\mathfrak{F}_\rho|$ mit ρ monoton zunimmt.

---

[1] Diese Tatsache ergibt sich aus der Betrachtung der Argumentänderung von Z auf C, vgl. unten. Für $q < n$ ist dies nicht notwendigerweise der Fall.

Beschreibt nämlich z die Kurve C_1 einmal in positivem Sinne, so wird Z den Kreis $|Z| = \rho^n$ in *negativem* Sinne m-mal durchlaufen, wenn m die Anzahl der Nullstellen von $Q(z)$ im Inneren von C_1 bedeutet. Hieraus folgt nach der gleichen Schlußweise wie in II, daß der negativ genommene Inhalt $-|C_1|$ des Inneren von C_1 die Form

$$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |a_k|^2 \rho^{2k\frac{n}{m}}$$

besitzt, so daß wegen $1 \leqq m \leqq n$

$$-\rho^{-2}|C_1| = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |a_k|^2 \rho^{2\frac{n}{m}\left(k-\frac{m}{n}\right)}$$

monoton zunimmt. Dasselbe gilt mit analoger Bezeichnung für

$$-\rho^{-2} \sum_{\lambda=1}^{l} |C_\lambda| .$$

Wenn anderseits z die Kurve C einmal in positivem Sinne beschreibt, so durchläuft Z den Kreis $|Z| = \rho^n$ in *positivem* Sinne, und zwar $n - q + m'$-mal, wenn m' die Anzahl der Nullstellen von $Q(z)$ außerhalb von C bedeutet (es ist $m' > 0$ für $q = n$, also $1 \leqq n - q + m' \leqq n$). Hieraus folgt wie oben, daß $\rho^{-2}|C|$ monoton wächst. Wegen

$$|\mathfrak{F}_\rho| = |C| - \sum^{l} |C_\lambda|$$

ist aber damit unsere Behauptung bewiesen.

3. Für *einfach* zusammenhängende Gebiete T kann der Verzerrungssatz in der Form

$$|c_2| \leqq \frac{2}{\rho} \tag{9}$$

ausgesprochen werden, wenn c_2 den Koeffizienten von z^2 in der Funktion (2) bedeutet. D. h. wegen (3)

$$|\operatorname{grad} H|_{x=0,\, y=0} \leqq \frac{2}{\rho} .^1 \tag{9'}$$

Die Abschätzung (9′) *ist für mehrfach zusammenhängende Gebiete nicht richtig.* Die linke Seite von (9′) kann vielmehr bei gegebenem ρ beliebig groß werden.

Man betrachte nämlich das Innere des oben definierten Bereiches $\mathfrak{F}_\rho$. Wegen (8) gilt

$$|\operatorname{grad} H|_{x=0,\, y=0} = \left| \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q}{n} \right| .$$

Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ sind dabei im Falle $q < n$ keiner Bedingung und im Falle $q = n$ nur der Bedingung $0 < \rho^n |\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_q| < 1$ unterworfen, woraus die Behauptung hervorgeht.

---

[1] Diese Formulierung des Verzerrungssatzes verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Hrn. K. Löwner (März 1927).

Man wähle z. B. $\rho = 1$, $n = 2$ und $Q(z) = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$, wo $\alpha > \beta > 0$ und $\alpha\beta < 1$ ist. Das Gebiet T ist dann durch die Ungleichung

$$\left| \frac{z^2}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} \right| < 1 \tag{10}$$

gekennzeichnet. Es ist

$$|\operatorname{grad} H|_{x=0,\, y=0} = \frac{\alpha + \beta}{2} > \frac{\alpha}{2}.$$

Man beachte, daß α frei zu wählen ist (man setze z. B. $\beta = \alpha^{-2}$, $\alpha > 1$)[1].

Eine andere Formulierung des Verzerrungssatzes besagt, daß die Randpunkte eines *einfach* zusammenhängenden Gebietes T den Mindestabstand $\frac{\rho}{4}$ vom Koordinatenursprunge besitzen. Diese Behauptung kann auch nicht für mehrfach zusammenhängende Gebiete ausgedehnt werden. Die Randpunkte von T können vielmehr bei gegebenem ρ zu dem Koordinatenursprunge beliebig nahe kommen. Im Beispiel (10) liefert z. B. die positive Wurzel der quadratischen Gleichung $z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ einen Randpunkt

$$\frac{-(\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 + 4(1 - \alpha\beta)}}{2(1 - \alpha\beta)} = \frac{2}{\alpha + \beta + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 + 4(1 - \alpha\beta)}},$$

dessen Abstand vom Nullpunkte $< 2\alpha^{-1}$, d. h. beliebig klein ist.

---

[1] Das Gebiet (10) ist einfach bzw. zweifach zusammenhängend, je nachdem $\frac{\alpha - \beta}{2} < 1$ oder > 1 ist.

Die Geschichte des Nebels »Barnard 86«.

Von J. G. Hagen
in Rom.

(Vorgelegt von Hrn. Ludendorff am 1. November 1928 [s. oben S. 460].)

Ein Ausruf, den W. Herschel bei seiner Himmelsdurchmusterung gemacht haben soll, und der sich auf ein »Loch im Himmel« bezog, wird öfters erwähnt, die Quelle des Berichtes ist aber nie bekannt geworden. Auch wußte man nicht, welcher Gegenstand es war, der den Ausruf veranlaßte. Da diese Ungewißheit schon zu der Ansicht verleitet hat, Herschel habe seine ausgedehnten Nebel, deren er 52 aufgezeichnet hat, als bloße Sternleeren angesehen, so ist vielleicht eine Aufklärung der Sache erwünscht.

1. Zum erstenmal scheint der fragliche Ausruf in dem Büchlein von Frl. Agnes Clerke vorzukommen, das den Titel führt »The Herschels and Modern Astronomy, London 1895«. Er steht auf Seite 68, aber ohne Quellenangabe. Durch Vermittlung des Hrn. W. Alfred Parr, eines Freundes der Herschel-Familie, wurde dem Schreiber die Abschrift eines Briefes mitgeteilt, den Carolina Herschel an ihren Neffen John Herschel gesandt hatte. Der Brief ist im Besitz von Frl. Francisca Herschel in Slough. Sie nennt die Abschrift authentisch und gibt volle Erlaubnis zu deren Veröffentlichung. John Herschel befand sich damals am Kap der Guten Hoffnung. Das Schreiben Carolinas lautet:

Hannover, September 11th, 1834.

My Dearest Nephew,

I thank you for the astronomical portion of your letter and for the promise of future accounts of uncommon objects. It is not clusters of stars I want you to discover in the body of the Scorpion (or thereabout), for that does not answer my expectation, remembering having once heard your father, after a long awful silence, exclaim: »Hier ist wahrhaftig ein Loch im Himmel!«, and as I said before, stopping afterward at the same spot but leaving it unsatisfied.

Was weiter in dem Schreiben folgt, hat keine Beziehung zur Astronomie.

Da W. Herschel nach dem Jahr 1802 nicht mehr beobachtete, so mußte Carolina den Ausruf mehr als dreißig Jahre lang im Gedächtnis behalten haben, und das noch im Alter von 84 Jahren.

2. Was nun Herschel am Himmel sah und was ihn so sehr verwunderte, läßt sich aus Carolinas Ortsangabe und andern Umständen mit großer Wahrscheinlichkeit erschließen.

Frl. Agnes Clerke bringt S. 67 ihres Büchleins den Ausruf Herschels mit dem Sternhaufen Messier 80 in Verbindung, wo »eine schwarze Öffnung von vier Grad Ausdehnung« von dem Sternhaufen westlich begrenzt sei. Damit scheint sie aber nur ihre eigene Vermutung auszusprechen, denn sie führt keine Quelle an. Bei dieser Vermutung fehlten ihr unsere heutigen Hilfsmittel, namentlich Barnards Katalog der dunkeln Himmelsobjekte und der darauf folgende photographische Atlas. Schlägt man Karte XIII dieses Atlasses auf, so findet man, daß die erwähnte Öffnung nicht »schwarz«, sondern von dem hellen Nebel bei ρ Ophiuchi ausgefüllt ist. Daher hat ein anderer Astronom die »Öffnung« weiter nach Osten verlegt, wo drei sternleere Streifen sich mehr als vier Grad vom Nebel aus erstrecken.

Keine der beiden Erklärungen paßt auf Carolinas Bericht. Messier 80 liegt zwar im Skorpion und der Nebel im angrenzenden Ophiuchus, Herschel konnte aber nicht beide zugleich sehen, denn sie liegen noch einen halben Grad auseinander. Herschel nennt zwar diese Sternleere »an opening or hole« (Sc. Papers I S. 253); aber Öffnungen von gleicher Ausdehnung konnte er mehr als hundert finden. Es ist nicht leicht abzusehen, warum er gerade auf diese Stelle wiederholt zurückkommen sollte, wie Carolina andeutet, und warum diese eine Sternleere vor allen andern ihm den Ausruf der Verwunderung entlockt haben könnte.

3. John Herschel ließ sich durch die Mahnung seiner Tante nicht von seinem Arbeitsplan abbringen, denn von Sternleeren und Dunkelnebeln spricht er fast nirgends. In seinen *Astr. Obs.* vom Kap (1847) § 85 S. 38/39 erwähnt er zwar die »singular lemniscate-oval vacuity« im Nebel bei η Carinae, aber ohne sich weiter darüber zu äußern. Nur in seinen *Outlines of Astr.* § 887 (1851 S. 611) sagt er über diese Sternleere: »The conclusion can hardly be avoided that in looking at it we see through and beyond the Milky Way far out into space through a starless region disconnecting it altogether from our system.«

Auf diese Bemerkung John Herschels bezog sich Secchi, als er sich in seiner *Memoria* von 1877 gegen die Ansicht einer »durchlöcherten« Milchstraße wandte. Diese Memoria erschien als Monographie in Rom unter dem Titel »L'Astronomia in Roma nel Pontificato di Pio IX.«. Auf Seite 32/33 berichtet er seine Entdeckung dunkler Massen, deren Vorhandensein sich durch den hellen Hintergrund des Himmels verrate. Nach dem Zusammenhang meint er den Hintergrund der Milchstraße. Gestützt auf seine spektroskopischen Beobachtungen, erklärte er die Ansicht, daß diese Massen bloße »fori neri« seien, für höchst unwahrscheinlich. Weiter heißt es wörtlich: »Von dieser Art ist vielleicht das eigentümliche Loch im Nebel von η Argo, das in Form einer Lemniskate gewunden ist.« Die Gestalt dieser Lemniskate kannte Secchi nur aus John Herschels Werken, wo sie zweimal abgebildet ist.

Secchi war demnach der erste Astronom, der die dunkeln Flecke in der Milchstraße als Nebelmassen auffaßte, im Gegensatz zu bloßen Sternleeren oder Löchern.

4. Damit kommen wir der Erklärung des Herschelschen Ausrufs näher. Denn Secchi bringt als Beispiel dieser dunkeln Massen den von ihm entdeckten Nebel in A. R. $17^h\ 54^m.6$ und Decl.—$27°\ 53'$. Das dunkle Objekt ist so auffallend, daß es sieben Jahre später (1883) von Barnard wieder entdeckt und als »black hole« veröffentlicht wurde (*A. N.* Bd 108 S. 370). Barnard vergleicht das »schwarze Loch« mit einem Tintentropfen und nennt es »one of the most impressive objects of the Milky Way« (*Ap J* 49 [1919] S. 3).

Allerdings erscheint das Objekt auf allen Photographien vollkommen schwarz (im positiven Bilde), z. B. auf den Karten 26, 27, 30 von Barnards Photographischem Atlas, wo ihm die Benennung *B 86* zugeteilt ist. Weitere Abbildungen findet man in den Bänden der Lick-Sternwarte XI (Tafeln 49, 54) und XIII (Taf. 7, Fig. 80). Im Band XI S. 37 heißt es: »A wonderful example of a dark nebula.« Eine mit dem hundertzölligen Spiegel auf Mount Wilson gemachte Aufnahme findet sich in mehreren Himmelsbeschreibungen.

Den Eindruck eines »schwarzen Loches« erhielt Barnard durch seinen schwach vergrößernden fünfzölligen Kometensucher. Als er aber den Nebel im 36-Zöller der Lick-Sternwarte untersuchte, nannte er ihn nicht mehr schwarz. Er machte nur die Bemerkung: »Considerable nebulosity seemed to be connected with it.« Ob diese nebulosity hell oder dunkel erschien, ob sie innerhalb oder um den Fleck herum liegt, ist nicht beigefügt.

Secchi hatte das Objekt im Merzschen Refraktor von 25 cm Öffnung des Römischen Kollegs entdeckt und als Nebelmasse erkannt. Ebenso erschien es dem Schreiber im Vatikanischen Refraktor von 41 cm Öffnung. Seine Dichte wurde (in der anderswo beschriebenen Skala) gleich IV geschätzt, seine Farbe gelblichbraun und sein Durchmesser zu fünfzehn Bogenminuten.

Der Nebel gehört also nicht zu den dichtesten, die in der Milchstraße gefunden werden und manchmal die Stufe VI erreichen. Auch gehört er zur Gruppe der kleinen Flecke. Was ihn trotzdem so auffällig macht, ist der eng anschließende Sternhaufen *N. G. C.* 6520 und eine Kette von schwachen Sternen, die ihn, ausgenommen auf der südlich folgenden Seite, ganz umgeben.

Wichtig für unsere Untersuchung sind nun die beiden Tatsachen, daß W. Herschel diesen Sternhaufen selbst entdeckt hat, und daß er der Ansicht war, die Ursache der Sternleeren in der Milchstraße sei darin zu suchen, daß die Sterne sich allmählich in Haufen zusammenzögen. Herschel führt diesen Sternhaufen in seiner Klasse VII als Nr. 7 auf und beschreibt ihn folgendermaßen: »Considerably rich but pretty coarsely scattered, little more compressed in the middle« (*Scientific Papers* I Seite 291). Seine Aufmerksamkeit war demnach längere Zeit an diese Stelle geheftet und mußte sich auf die angrenzende Sternleere erstrecken, da diese dunkle Stelle gerade wegen ihrer Kleinheit und des sie umgebenden Sternkranzes, hauptsächlich aber wegen des angrenzenden Sternhaufens seiner Theorie so günstig war wie kaum eine andere. Ein Ausruf der Verwunderung war da verständlich.

Nun liegt dieser Sternhaufen nach dem Atlas von Heis (Tav. XI), übereinstimmend mit Bode, an der Grenze der drei Sternbilder Sagittarius, Ophiuchus und Skorpion, also innerhalb des Bereiches, den die Schwester Herschels aus dem Gedächtnis angegeben hatte.

Bedenkt man, daß Barnard den mit diesem Sternhaufen verbundenen Dunkelnebel »eines der auffallendsten Objekte der Milchstraße« nannte und vergleicht man die Eindrücke, die Herschel und Barnard erhielten, den eines »Loches im Himmel« im einen und den eines »schwarzen Loches« im andern Fall, so kann kaum noch ein Zweifel darüber bestehen, daß der jetzt als *B 86* bekannte Nebel es war, der W. Herschel zu dem bekannten Ausruf veranlaßte.

Danach ist dieses merkwürdige Objekt innerhalb eines Jahrhunderts dreimal entdeckt worden, von Herschel, von Secchi und von Barnard.

Jetzt ist auch klar, was der Ausruf im Munde Herschels bedeutete, und daß er mit den 52 ausgedehnten Nebelfeldern Herschels in keiner Beziehung steht.

Vatikan-Sternwarte, 10. Oktober 1928.

Ausgegeben am 6. Dezember.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XXVIII—XXX

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Klassensitzung am 15. November. (S. 487)
Gesamtsitzung am 22. November. (S. 488)
Bodenstein: Kettenreaktionen. (Mitteilung vom 8. November.) (S. 490)
Klassensitzung am 29. November. (S. 498)
Haber und H.-D. Graf von Schweinitz: Über Zündung des Knallgases durch Wasserstoffatome. (S. 499)

Library of Congress
JUN 25 1929
Smithsonian Deposit

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrücke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50, und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 100 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

XXVIII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 15. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Paschen sprach über »Das erste Funkenspektrum des Quecksilbers Hg II«. (Ersch. später.)

Das der tiefsten Seriengrenze zugeordnete Dubletsystem ist analysiert. Von dem Teil des Spektrums, welcher höheren Seriengrenzen zugeordnet ist, sind einige Terme erkannt, darunter der wichtige verkehrte metastabile Dublet *D*-Term. Wellenlängen und Termschema werden gegeben.

Zwei merkwürdige Phänomene werden behandelt: 1. Der Übergang vom metastabilen $^2D_{5/2}$-Niveau zum Grundniveau $1\,^2S_{1/2}$ kommt in Helium mit spärlichem Quecksilberzusatz unter Emission einer starken Linie zustande. Dies Leuchten entspricht den Nebellinien nach der Deutung von I. S. Bowen.

2. Eine Heliumatmosphäre verstärkt einige Linien des Spektrums Hg II in auffallender Weise. Dies wird an Hand eines Anregungsdiagrammes gedeutet als bevorzugte Anregung durch die Heliumspannung von 19.73 Volt vom Zustand $2p_0$ des Atoms aus.

Ausgegeben am 18. Dezember.

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1928

XXIX. Gesamtsitzung. 22. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Heinrich Maier sprach über »Die mechanische Naturbetrachtung und die 'vitalistische' Kausalität«. (Ersch. später.)

Nachdem die mancherlei Arten von »mechanischer« Naturbetrachtung unterschieden sind, wird auf Grund eines Überblicks über die Geschichte der physisch-transeuntkausalen Naturerklärung deren Recht sichergestellt. Hierauf werden die verschiedenen Arten von Kausalität, mit denen die Vitalisten arbeiten, grundsätzlich beleuchtet. Zum Schluß wird angedeutet, wie das Problem zu lösen ist.

2. Hr. Lüders legte eine Arbeit des korrespondierenden Mitgliedes Hrn. Sten Konow: »Ein Beitrag zur Geschichte des Buddhabildes« vor. (Ersch. später.)

Eine in dem Charsadda-Distrikt im vergangenen Sommer erworbene Buddhaskulptur ist im Jahre 89 datiert, und die Paläographie zeigt, daß es sich um die Kaniṣka-Ära handelt. Dadurch wird es unmöglich, daran festzuhalten, daß z. B. die aus derselben Gegend stammende Hashtnagar-Statue, die ein Datum aus dem Jahre 384 trägt, ein paar Jahrhunderte älter sein müsse. Das Datum muß vielmehr nach der in anderen alten Kharoṣṭhī-Inschriften benutzten Ära, mit dem Anfang in der ersten Hälfte des ersten Jahrhunderts v. Chr., berechnet werden. Von keinem Buddhabild der Gandhāra-Schule können wir somit nachweisen, daß es so alt ist wie Kaniṣka. Unter den ältesten hellenistischen Skulpturen Indiens gibt es kein Buddhabild, und die Münzen deuten eher auf eine symbolistische Darstellung nach der Art der altbuddhistischen Kunst. An und für sich spricht nichts gegen die Annahme, daß die hellenistische Kunst sich mit den Sakas nach Mathurā verpflanzte und dort ihren Einfluß auf die alte indische Kunst ausübte. In Mathurā, dem alten Sitz der Bhakti-Religion, wäre das Aufkommen des Buddhabildes erklärlich, und von dort kann es von hellenistischen Künstlern nach dem Nordwesten gebracht und von ihnen umgestaltet worden sein. Daß Kaniṣka in Peshāwar, wo ihm ein Werkmeister mit einem griechischen Namen zur Verfügung stand, nur eine mäßige Buddhadarstellung aufbringen konnte, während die Buddhabilder der Mathurā-Schule aus den ersten Jahren seiner Regierung auf das Vorhandensein einer ziemlich festen Tradition weisen, kann für eine solche Annahme geltend gemacht werden. Sicherheit läßt sich noch nicht erzielen, aber es wird notwendig werden, die Frage nach dem Ursprung des Buddhabildes zur erneuten Prüfung aufzunehmen.

3. Hr. von Wilamowitz-Moellendorff überreichte seine »Erinnerungen 1848—1914« (Leipzig 1928).

4. Hr. Jaeger übersandte seine Schrift »Platos Stellung im Aufbau der griechischen Bildung« (Berlin und Leipzig [1928]).

5. Hr. Lietzmann überreichte die »Gesammelten Aufsätze zur Kirchengeschichte« von Karl Holl (3 Bände) (Tübingen 1927/28).

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. F. Ll. Griffith übersandte die Fortführung seiner Veröffentlichung »Oxford Excavations in Nubia« (Sonderabdruck [1928]).

7. Hr. Heymann überreichte den 1. Band der »Acta« der Académie Internationale de droit comparé, herausgegeben von Elemér Balogh (Berlin 1928).

8. Vorgelegt wurde der 2. Band des mit Unterstützung der Akademie erschienenen Werkes »Mittelalterliche Bibliothekskataloge Deutschlands und der Schweiz« (Bistum Mainz–Erfurt, bearbeitet von Paul Lehmann) (München 1928).

9. Endlich wurde vorgelegt das Buch von Benno Böhm »Sokrates im 18. Jahrhundert« (Leipzig 1929), dem der Preis aus dem von Miloszewkyschen Legat als Ehrengabe zuerkannt worden ist.

Kettenreaktionen.

Von Max Bodenstein.

(Vorgetragen am 8. November 1928 [s. oben S. 475].)

Die Vorstellung der Kettenreaktion habe ich zuerst 1913[1] benutzt zur Deutung der Tatsache, daß bei vielen photochemischen Vorgängen die Zahl der umgesetzten Molekeln wesentlich größer ist als die der absorbierten Quanten. Die Vorstellung beruht in der Annahme, daß bei der Umsetzung der ursprünglich vom Licht beeinflußten Molekel ein energiereiches Zwischenprodukt entsteht, das seinerseits bei der weiteren Umsetzung neben dem Endprodukt wieder ein solches liefert, daß sich dann dieser Vorgang immer wiederholt und so die Zahl der ursprünglich umgesetzten Molekeln stark multiplizieren kann.

Als einfachstes Beispiel sei hier die später von Nernst vorgeschlagene Reaktionsfolge bei der Bildung von Chlorwasserstoff genannt:

$$\begin{aligned} Cl_2 + h\nu &= 2\,Cl \\ Cl_2 + H_2 &= HCl + H \\ H + Cl_2 &= HCl + Cl \ldots\ldots \end{aligned}$$

Daß tatsächlich beim Chlorknallgas solche lange Reaktionsfolge auftritt, wurde anschaulich von Weigert und Kellermann[2] gezeigt: nach einer Belichtung von 10^{-8} Sekunden Dauer konnte über eine Zeit von 2×10^{-2} Sekunden Umsetzung beobachtet werden.

Aber eine solche Reaktionskette kann auch anders als durch instabile Zwischenstoffe zustande kommen: die Molekeln des Reaktionsprodukts müssen ja unmittelbar nach ihrer Entstehung sehr energiereich sein, und es kann nun diese Überschußenergie auf eine Molekel des Ausgangsstoffes übertragen werden und diese dadurch reaktionsfähig machen. Am Beispiel des Chlorknallgases wäre die Folge:

$$\begin{aligned} Cl_2 + h\nu &= Cl_2' \\ Cl_2' + H_2 &= 2\,HCl' \text{ oder } HCl' + HCl \\ HCl' + Cl_2 &= Cl_2' + HCl \ldots\ldots\ldots[3] \end{aligned}$$

[1] Bodenstein, Z. phys. Chem. **85**, 329 (1913).

[2] Weigert und Kellermann, Z. phys. Chem. **107**, 1 (1923).

[3] Das Zeichen ′ bedeutet energiereiche Molekel. Ich habe diese Deutung 1916 vorgeschlagen (Z. f. Elektroch. 22, 53) weil eine andere zuerst benutzte Folge, welche ein freies Elektron als Zwischenstoff vorsah, sich als unbrauchbar erwiesen hatte, und weil nach unseren damaligen Kenntnissen über die Dissoziationswärme des Clors die Reaktion $Cl_2 + h\nu = 2\,Cl$ nicht möglich war. Heute wissen wir, daß sie eintritt.

Der Stoffkette gegenüber wäre dies die Energiekette. Sie involviert eine Schwierigkeit: während bei jener die Vorstellung einer spezifischen Reaktion des Cl mit H_2 etwas durchaus Naheliegendes ist, müssen wir hier annehmen, daß die Energie des HCl nur auf Cl_2 (oder vielleicht auf H_2) übertragen werden kann, nicht aber auf die Molekeln des Reaktionsprodukts oder etwa beigemengter Fremdgase. Denn sonst würden diese den Molekeln des Ausgangsstoffes in der Energieübernahme Konkurrenz machen und müßten hemmend wirken.

Diese Spezifizität der Energieübertragung erschien zunächst gezwungen. Aber es haben sich inzwischen viele Belege für ihr tatsächliches Vorhandensein gezeigt — am klarsten in der Auslöschung der Resonanzfluoreszenz von Quecksilberdampf und Natriumdampf[1] durch Fremdgase, die ganz spezifisch wirken, und in völlig analogen Erscheinungen bei der photochemischen Zersetzung des Ozons[2]. Die daraus hervorgehende Notwendigkeit des Vorhandenseins einer Resonanz zwischen Sender und Empfänger (und die bei diesen Übertragungen auftretenden großen Wirkungssphären[3]) beweisen andererseits weiter, daß es bei dieser Übertragung sich um innere Energie handelt, nicht um Flugenergie, was natürlich der Verwendung der Energie zur Hervorrufung der Reaktion in der Molekel vollkommen entspricht.

Die Vorstellung der Kettenreaktionen entstammt also der Photochemie. Aber sie ist dann bald in die chemische Kinetik der Dunkelreaktionen übertragen worden. Hier hatte sich folgende Schwierigkeit ergeben. Bei den monomolekularen Gasreaktionen konnte man ableiten, daß nur der Bruchteil $e^{-q/RT}$ aller Molekeln reaktionsfähig ist, wobei die Größe q, die »Aktivitätswärme«, aus den Temperaturkoeffizienten der Geschwindigkeit zu berechnen war. Die beobachtete Geschwindigkeit gibt nun ein Maß für die Zahl der je Sekunde verschwindenden »aktiven« Molekeln, die natürlich zur Aufrechterhaltung der Reaktion mindestens im gleichen Tempo nachgeliefert werden müssen, wie sie verschwinden. Für diese Nachlieferung kommt die Hohlraumstrahlung in Betracht oder die Zusammenstöße mit anderen Molekeln, welche mindestens diesen Energieinhalt haben. Beides reicht nicht aus: die monomolekularen Reaktionen verlaufen zu schnell. Nimmt man wieder eine Rückgabe der Energie der eben gebildeten Reaktionsprodukte (»Aktivierungswärme« + Reaktionswärme) an die Molekeln des Ausgangsstoffes an, natürlich ebenso spezifischer Art wie oben, so kommt man über diese Schwierigkeit hinweg. Diese Einführung der Reaktionskette in die Kinetik der Dunkelreaktionen ist von Christiansen und Kramers[4] vorgenommen worden.

Die Vorstellung der Kettenreaktionen hat nun in den letzten Jahren sehr reiche Anwendung gefunden und sich sehr nützlich erwiesen, und zwar in der reinen Wissenschaft wie bei der Deutung einiger Erscheinungen der Praxis. Davon möchte ich einiges berichten, wenn auch von diesen Dingen nur wenig auf meinem Felde gewachsen ist.

---

[1] Wood, Franck, Cario s. z. B. Franck u. Jordan, Anregung von Quantensprüngen durch Stöße 1926, S. 217.

[2] Kistiakowski, Z. phys. Chem. **117**, 337 (1925).

[3] Kornfeld, Z. phys. Chem. **131**, 97 (1928).

[4] Christiansen und Kramers, Z. phys. Chem. **104**, 451 (1923).

Bei den obigen Schemen der Chlorknallgasreaktion ist nicht zu erkennen, wie die Reaktion aufhören soll: jedes durch das Licht gebildete Cl-Atom (oder HCl′) müßte eine Kette von so viel Gliedern hervorrufen, als überhaupt Molekeln der Ausgangsstoffe vorhanden sind — und das könnte schwerlich ohne Explosion des Chlor-»Knallgases« abgehen. Man kann die Kette sehr lang machen, bis eine Million Glieder mindestens sind wir gekommen mit einem so schwachen Licht, daß dessen Messung und damit die Messung der im ursprünglichen Vorgang gebildeten Chloratome Schwierigkeiten gemacht hat. Aber auch so ist sie noch längst nicht unendlich lang.

Sie wird also durch irgendeinen Vorgang abgebrochen. Man könnte, was am nächsten liegt, denken an eine Vereinigung der Atome, im Falle diese einmal einander treffen:

$$H + H = H_2,\quad Cl + Cl = Cl_2,\quad H + Cl = HCl.$$

Solche Rekombination beendet die Ketten bei der ähnlichen Reaktion der Bildung von Bromwasserstoff. Die kennen wir in allen Einzelheiten und können die Kenntnisse benutzen, um die Geschwindigkeit der Rekombination der Bromatome zur Molekel zu berechnen, die hier von maßgebender Bedeutung ist, weil die Länge der Kette für die Bromwasserstoffbildung sehr klein ist.

Beim Chlorknallgas ist die Konzentration der Atome zu klein, sie finden einander nicht, die Kette wird auf einem anderen Wege abgebrochen: durch den Sauerstoff, der auch bei den letztgenannten Versuchen immer noch nicht vollständig ausgeschlossen worden war, und zwar durch die H-Atome, die mit ihm über irgendwelchen Zwischenstoff Wasser bilden. Der Sauerstoff erscheint dabei natürlich als Hemmnis der Reaktion — das ist die experimentelle Beobachtung, zu der obiges die Deutung ist; er ist also ein negativer Katalysator und seine Wirkung im Sinne dieser Deutung eben die, daß er die Kette abbricht.

Daß tatsächlich die Wirkung des Sauerstoffs im Abbrechen der Kette besteht, ist in sehr bestimmter Weise von Frl. Cremer[1] in meinem Institut nachgewiesen worden durch die Feststellung, daß die Zahl der gebildeten Wassermolekeln zu der der umgesetzten Chlormolekeln sich verhält wie die Zahl der absorbierten Lichtquanten zu der Zahl der umgesetzten Chlormolekeln, mit anderen Worten, daß die durch die Absorption *eines* Lichtquants eingeleitete Kette nach Durchlaufung der experimentell festgestellten Anzahl der Glieder durch die Bildung *einer* Wassermolekel wieder beendet wird.

Auch diese Deutung ist nun durch Christiansen[2] auf Dunkelreaktionen übertragen und verallgemeinert worden, und in einer Reihe von Fällen ist diese Theorie der negativen Katalyse in glänzender Weise verifiziert worden durch Bäckström[3].

Die untersuchten Reaktionen waren Autoxydationen, bei denen durch Anlagerung einer Sauerstoffmolekel an eine Molekel des oxydablen Ausgangsstoffs ein Superoxyd entsteht, das dann im allgemeinen schnell mit einer

---

[1] Cremer, Z. phys. Chem. **128**, 285 (1927).
[2] Christiansen, Z. phys. Chem. **28**, 145 (1924).
[3] Bäckström, J. Am. Chem. Soc. **49**, 1460 (1927), Medd. Nobel Inst. 6, Nr. 15 und 16 (1927).

weiteren Molekel des Ausgangsstoffs sich zu einem beständigen Produkt mittleren Sauerstoffgehalts umsetzt. Bei solchen Autoxydationen hatte man vielfach negative Katalyse beobachtet, besonders Moureu und Dufraisne[1] hatten reiches Material hierfür zusammengetragen. Die von Bäckström untersuchten Umsetzungen sind die Oxydation von Benzaldehyd, Önantaldehyd und Natriumsulfit, die negativen Katalysatoren dabei Diphenylamin, α- und β-Naphtol, eine Reihe von Alkoholen und einige andere Substanzen.

Als Kettenreaktionen wurden nun die Umsetzungen dadurch erwiesen, daß man sie im Licht, zunächst ohne die negativen Katalysatoren sich abspielen ließ. Da lieferten sie für ein absorbiertes Lichtquant um 10000, 15000, 50000 umgesetzte Molekeln, was für die photochemische Reaktion eine Kette sicher, für die Dunkelreaktion so gut wie sicher macht. Nun wurde mit den Zusätzen belichtet, und es ergab sich, daß die Hemmung seitens der verschiedenen Zusätze im Licht und im Dunkeln völlig parallel ging. Für die Lichtreaktion ist das kaum anders zu verstehen, als daß diese Ketten abgebrochen werden, daß die Überschußenergie der eben gebildeten Reaktionsprodukte, die für gewöhnlich dem Ausgangsstoff zugute kommt, nach der experimentell festgestellten Zahl der Kettenglieder auf den Katalysator übergeht — und dann ist die Übertragung auf die Dunkelreaktion gegeben.

Bäckström hat neuerdings noch einen ganz eklatanten Beweis für den Abbruch der Kette durch den Katalysator gebracht; er hat gezeigt, daß von diesem eine Zahl Molekeln zerstört werden, die zu der Zahl der oxydierten Molekeln des Ausgangsstoffes im Verhältnis 1 : Zahl der Kettenglieder steht.

Zu den Kettenreaktionen gehören nun, wie in jüngster Zeit von verschiedenen Seiten gezeigt worden ist, die in Form einer Flamme oder einer Explosion, selten in Form einer langsam verlaufenden Reaktion sich abspielenden Verbrennungen unserer Heiz- und Kraftgase.

Über die Ketten und Kettenglieder, die dabei in Frage kommen, hat ja kürzlich auf Grund spektroskopischer Daten und kalorimetrischer Messungen und Berechnungen Hr. Haber an dieser Stelle uns berichtet. Die von ihm und Bonhoeffer durchgeführten Betrachtungen[2] beziehen sich auf Flammen und Explosionen, aber so viel sie des Neuen und Interessanten gebracht haben, so führen sie doch nicht zur Kenntnis von Einzelheiten. Insbesondere ist die Frage noch offen, wodurch die Ketten abgebrochen werden. Gerade diese Frage aber hat für die langsam verlaufenden Verbrennungen, wie man sie in Gefäßen von Porzellan, Quarz u. dgl. bei etwa 500—600° studieren kann, zu sehr bestimmten Ergebnissen geführt.

Und diese Ergebnisse sind für den, der sich früher mit diesen Dingen beschäftigt hat, sehr überraschend. Es steht seit langem fest, daß diese Reaktionen bei mäßigen Temperaturen praktisch ausschließlich an der Gefäßwand sich abspielen, nicht in der Gasmasse selbst. Steigert man die Temperatur, so tritt neben der Wandreaktion in zunehmendem Maße auch eine

[1] Moureu und Dufraisne, Zusammenfassender Bericht im Bericht des Solvay-Kongresses, Brüssel 1925, S. 524.

[2] Bonhoeffer und Haber, Z. phys. Chem. **137**, 263 (1928).

solche in der Gasmasse auf, aber diese führt dann sehr leicht zur Explosion, sobald sie einigermaßen geschwind geworden ist[1]. So hat man sich auf die Untersuchung der ersteren beschränkt; und die Getäßwände, welches immer ihr Material ist, gelten immer als Beschleuniger dieser Verbrennungsvorgänge.

Aber in jüngster Zeit ist man kühner geworden, und ungefähr gleichzeitig haben Hinshelwood in Oxford[2] und Pease im Laboratorium von Hugh Taylor in Princeton N. J.[3] die Reaktion in der Gasmasse näher studiert, wobei der letztere sich des Kunstgriffs bedient hat, die beschleunigende Wirkung der Wand durch Belegung derselben mit Chlorkalium herabzudrücken. Diese Arbeiten sind keineswegs abgeschlossen; das aber folgt mit aller Sicherheit aus ihnen, daß bei diesen höheren Temperaturen, wo die Gasreaktion an sich geschwind verläuft, diese eine Kettenreaktion ist, und daß die Ketten abgebrochen werden, wenn eins ihrer Glieder an die Wand gerät. Die Wand, die bei niederen Temperaturen der ausschließliche Träger der Reaktion war, erscheint bei höheren Temperaturen als Hemmnis.

Diese Tatsache ist nun äußerst interessant infolge zweier Konsequenzen. Die erste ist eine von großer praktischer Bedeutung: im Lichte dieser Tatsache wird die Wirkungsweise der »Klopffeinde«, der »antiknoks« der Benzinmotore verständlich. Die erste Phase beim Betrieb des Benzinmotors ist bekanntlich, daß Luft und Benzindampf oder Benzinnebel in den Zylinder eingepreßt werden, um dann dort, nach der Zündung explodierend, ihre treibende Wirkung zu entfalten. Diese Einpressung bedeutet natürlich eine Erhitzung der eingepreßten Luft, und da der Wirkungsgrad des Motors vom Grade dieser Kommpression abhängt, so wählt man diesen möglichst hoch, so hoch wie es das Benzinluftgemisch verträgt, ohne schon hierbei sich zu entzünden. Dabei zeigt es sich dann, daß gewisse Brennstoffe hierin Erhebliches vertragen, andere nicht. Diese entzünden sich bei der Kompression, verpuffen vorzeitig und nutzlos, der Motor »klopft«.

Dies Klopfen nun wird durch die Klopffeinde verhindert; geringe Zusätze des sehr giftigen amerikanischen Bleitetraäthyls und des harmlosen Eisenkarbonyls der J. G. machen auch die leicht entzündlichen Brennstoffe »klopffest«. Beides sind flüssige Metallverbindungen, die als Dämpfe in den Zylinder eintreten, und sie sind leicht zersetzlich, so daß sie bei der Temperaturerhöhung sogleich den Raum mit einem feinen Metallstaub erfüllen. Diese Stäubchen bilden dann überall im Gas verteilte feste Oberflächen, an ihnen brechen sich die Ketten, und eine Erhitzung der Gasmasse bis zur Explosion wird verhindert.

Diese Theorie ist von Egerton in Cambridge[4] entwickelt worden, und viele ihrer Voraussetzungen und Folgerungen sind durch Laboratoriumsunter-

---

[1] Bodenstein, Z. phys. Chem. **29**, 665 (1899).

[2] Hinshelwood und Thompson, Proc. Roy. Soc. A. **118**, 170 (1928). Gibson und Hinshelwood, Proc. Roy. Soc. A. **119**, 591 (1928).

[3] Pease und Chesebro, Proc. Nat. Acad. Science Washington **14**, 472 (1928).

[4] Egerton und Gates, Journ. Int. Petroleum Tech. **13**, 61, 244 (1927) Nature 19. 3. und 12. 11. 1927. Zusammengefaßt im Bericht der Réunion de chimie physique, Paris 1928, Sonderband des Journ. de Chim. Phys. 1929.

suchungen von ihm sowie von Berl in Darmstadt[1] in ausgezeichneter Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung geprüft worden.

Auch eine artilleristische Erfahrung gehört hierher: ein Zusatz von Chlorkalium unterdrückt das Mündungsfeuer der Geschütze; der Staub von Chlorkalium — mit dem Pease seine Porzellangefäße vergiftete — bricht die Ketten ab, welche die Kohlenoxyd und Methan haltenden Sprengstoffgase einleiten, wenn sie sich mit der Außenluft mischen[2].

Ob die Ketten bei den Flammengasen Stoffketten oder Energieketten sind, ist noch nicht anzugeben. Wahrscheinlich kommt beides gleichzeitig in Betracht.

Zu einer zweiten interessanten Konsequenz hat nun die Vorstellung vom Abbrechen der Reaktionsketten an der Gefäßwand geführt, als man dazu überging, derartige Umsetzungen bei sehr niedrigen Drucken zu studieren. Hier haben zuerst Semenoff und seine Mitarbeiter[3] beobachtet, daß die Oxydation von Phosphordampf oder Schwefeldampf durch Sauerstoff nicht eintritt, sofern die Drucke der beiden Gase sehr klein sind — in der Größenordnung von einigen Hundertstel Millimeter Quecksilber bei Temperaturen gegen 100°. Dies Ausbleiben der Reaktion findet statt, wenn man von kleinen Drucken ausgeht; wenn man z. B. zu Phosphordampf Sauerstoff langsam einströmen läßt, so bleibt er zunächst unverändert; erst wenn er einen gewissen Druck erreicht hat, z. B. 0.04 mm bei gewissen Bedingungen der Temperatur und des Drucks des Phosphordampfs, dann setzt die Reaktion ein, erkennbar am Leuchten und an der Tatsache, daß nun der eintretende Sauerstoff infolge seiner Umsetzung zu festem Oxyd keine Druckerhöhung mehr gibt.

Der Übergang von Reaktionslosigkeit zur Reaktion erfolgt ziemlich plötzlich, bei niederen Drucken in weiteren Gefäßen als bei höheren Drucken, und das Interessanteste an den Beobachtungen ist, daß die gleiche Grenze auch erreicht wird, wenn die bei höheren Drucken stattfindende Reaktion den Sauerstoff bis zu diesem Grenzdruck verbraucht hat.

Das liegt völlig im Rahmen der Vorstellung der Kettenreaktion und ihres Abbruchs an der Wand und ist deshalb ein weiterer Beleg für die Nützlichkeit dieser Annahmen. Aber weshalb es besonders interessant ist, ist das, daß hier eine zunächst flott verlaufende Reaktion praktisch völlig aufhört, ehe die reaktionsfähige Substanz völlig verbraucht ist. Dies Aufhören kennen wir sonst nur im Falle des Gleichgewichts, wo die in der beobachteten Richtung stattfindende Umsetzung begleitet wird von der entgegengesetzten, und zwar in immer zunehmendem Maße, so daß schließlich in der einen Richtung sich ebenso viele Molekeln je Zeiteinheit umwandeln wie in der anderen und dadurch ein stationäres Gleichgewicht sich einstellt, ohne daß die ursprüngliche Substanz aufgebraucht ist. Dies Gleichgewicht ist also das Ergebnis zweier einander entgegengesetzter Reaktionen und als solches charakterisiert durch die Tatsache, daß es von beiden Seiten erreichbar ist.

---

[1] Berl, Z. phys. Chem. A. **139**, 453 (1928).
[2] Siehe z. B. Brunswig, Explosivstoffe, Leipzig 1923, S. 107.
[3] Chariton und Walta, Z. f. Phys. **39**, 547 (1926). Semenoff, Z. f. Phys. **46**, 109 (1928). Semenoff und Rabulin, Z. phys. Chem. B. **1**, 192 (1928).

Hier ist von einer entgegengesetzten Reaktion nicht die Rede. Die Oxyde von Phosphor und Schwefel zerfallen durchaus nicht bei den Bedingungen der Versuche. Dann aber stellen diese Vorgänge Beispiele dar der »falschen Gleichgewichte«. Diese hat es in der Literatur schon einmal gegeben; ähnliche Beobachtungen wie die oben beschriebenen, aber bei durchaus normalen Drucken, waren gegen Ende des vorigen Jahrhunderts mitgeteilt worden[1] und von Duhem[2] als Beispiele einer Theorie der falschen Gleichgewichte verwendet worden. Ich habe damals nachweisen können, daß diese Beobachtungen fehlerhaft waren[3], und so sind die »falschen Gleichgewichte« ziemlich vollständig wieder aus der Literatur verschwunden.

Aber wenn ich in meiner wissenschaftlichen Jugendzeit diese alten falschen Gleichgewichte als falsch erweisen konnte, so haben wir jetzt selbst einen Fall aufgefunden, der in diesem neuen Sinne ein falsches Gleichgewicht darstellt. Wir hatten, von der Tatsache des zu schnellen Verlaufs der monomolekularen Gasreaktionen[4] ausgehend, den Zerfall des Stickstoffpentoxyds bei ganz kleinen Drucken zu untersuchen begonnen und kurz nach den ersten hierher gehörenden Mitteilungen von Semenoffs Beobachtungen gefunden, daß auch hier die Reaktion aufhört, wenn man zu ganz kleinen Drucken übergeht[5].

Dieser Zerfall des Stickpentoxyds hat vor den von Semenoff studierten oberhalb des Grenzdrucks unmeßbar schnell verlaufenden Oxydationsvorgängen den Vorzug, daß er bei höheren Drucken meßbar langsam verläuft, und daß seine Kinetik, die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von den Konzentrationen, einem ganz einfachen Gesetz folgt, eben dem der monomolekularen Reaktion. Es läßt sich nun zeigen, daß dies Gesetz durchaus dem entspricht, was aus der Annahme einer Reaktionskette folgt, bei der, solange der Druck des Gases hoch ist, ein Abbrechen an der Wand nur ganz selten in Frage kommt. Zu untersuchen bleibt aber dabei noch, wie das bei höheren Drucken gültige Gesetz sich beim Übergang zu den kleinen Drucken ändert, eine Frage, zu deren Klärung Messungen bei uns im Gange sind.

Derartige Versuche über die Kinetik der Kettenreaktionen sind nun aber allgemein erwünscht. Der Gedanke an diesen Kettenmechanismus ist seiner Zeit entstanden, nicht nur, weil die Äquivalenz zwischen absorbierten Quanten und umgesetzten Molekeln bei einer Reihe photochemischer Reaktionen nicht vorhanden war — das Postulat dieser Äquivalenz war damals durchaus neu, und die Fälle seiner Erfüllung waren nicht häufiger als die des Gegenteils, so daß man es ebenso gut einfach hätte ablehnen können[6] —, nein, er ist entstanden, weil die Abweichung von der Äquivalenz immer verbunden war mit einer ungewöhnlichen Form des Zusammenhangs von Umsatz und Kon-

---

[1] Hélier und Gauthier, Compt. Rend. **122** (1896), Hélier Ann. chim. phys. (7) **10**, 521 und **11**, 18 (1897). Pélabon, Compt. rend. **124**, 360 und 686 (1897), **121**, 401 (1895).

[2] Duhem, Traité élémentaire de mécanique chimique I, 203. Auch heute noch findet sich die Lehre von diesen »falschen Gleichgewichten« in der nach der zweiten Auflage dieses Buches bearbeiteten Thermodynamique et chimie von Boutarik, Paris, Hermann 1926 S. 496, 529.

[3] Bodenstein, Z. phys. Chem. **30**, 1 (1899).

[4] S. oben S. 491.

[5] Sprenger, Z. phys. Chem. **136**, 49 (1928).

[6] Das ist z. B. von Winther geschehen, Z. wiss. Photogr. **11**, 92 (1912).

zentrationen, und dessen Deutung war es in erster Linie, die zu der Annahme der immer wiederholten Umsetzungen intermediärer Zwischenprodukte, zur Vorstellung der Reaktionskette führte. So darf man erwarten, daß aus dem Studium der Kinetik sich eine weitere Sicherung und Vertiefung dieser Vorstellungen ergeben wird. Für die allmähliche Verbrennung einiger brennbarer Gase liegen Ansätze dafür vor[1] und für manche der oben als Kettenreaktionen geschilderten Umsätzungen dürften solche Messungen der Geschwindigkeit durchführbar sein. Aber darüber hinaus wird sich zweifellos erweisen, daß die Kettenreaktionen viel verbreiteter sind, als man heute annimmt. Der von Hinshelwood untersuchte Zerfall des Chlormonoxyds[2] dürfte zu ihnen gehören, noch nicht veröffentlichte Beobachtungen von uns über den Zerfall von Chlordioxyd, über die Oxydation von gasförmigen Acetaldehyd, über die durch Chlor beschleunigte Zersetzung des Ozons geben Indizien für das Auftreten von Reaktionsketten bei diesen Prozessen, und so wäre noch manches andere hier zu nennen. Jedenfalls wird eine systematische Beachtung der Möglichkeit eines Kettenmechanismus zur Aufklärung zahlreicher verwickelter Reaktionen sich nützlich erweisen.

Berlin, physikalisch-chemisches Institut der Universität.

---

[1] Semenoff, Z. f. Phys. **48**, 571 (1928), Sagulin, Z. phys. chem. B. **1**, 275 (1928).

[2] Hinshelwood und Prichard, J. chem. Soc. **123**, 2730 (1923). Hinshelwood und Hughes, J. chem. Soc. **125**, 1841 (1924).

Ausgegeben am 18. Dezember.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XXX. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 29. November.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

*1. Hr. Wagner berichtete über neuere Beobachtungen über die Ausbreitung von kurzen elektrischen Wellen.

Die Beobachtungen werden in Zusammenhang gebracht mit den theoretischen Vorstellungen über den Einfluß der Ionisation der höheren Luftschichten auf den Ausbreitungsvorgang. Unsere gegenwärtige Kenntnis von der Zusammensetzung der höheren Schichten der Atmosphäre und von ihren Eigenschaften reicht nicht aus, ein abgeschlossenes Bild von dem Mechanismus der Ausbreitung der Wellen in der Atmosphäre zu entwerfen; umgekehrt ist aber von weiteren Beobachtungen des Ausbreitungsvorganges eine wesentliche Bereicherung der Kenntnis von der Beschaffenheit der höheren Luftschichten zu erwarten. Hr. Wagner schlägt vor, systematische Kurzwellensendeversuche und -Empfangsbeobachtungen in der Polarregion, zweckmäßig auf Spitzbergen, auszuführen.

2. Hr. Bodenstein legte eine Arbeit von F. Haber und H. D. Graf v. Schweinitz »Über Zündung des Knallgases durch Wasserstoffatome« vor.

Zwei Ströme von Wasserstoff und von Sauerstoff werden gemischt. Wird in geeignetem Abstande von der Mischungsstelle in dem Wasserstoffstrome ein Lichtbogen erzeugt, der den molekularen Wasserstoff in Atome spaltet, so tritt an der Mischungsstelle Explosion auf. Vom Bogen zur Mischungsstelle wird der Wasserstoffstrom zwischen Wasserwänden geführt, an denen die Rekombination der Wasserstoffatome gering ist, oder durch flüssiges Wasser hindurchgeleitet. Wird die Wasserstoffatomkonzentration vor der Zumischung des Sauerstoffs so weit erniedrigt, daß die Explosion ausbleibt, so wird intensive stille Vereinigung beobachtet. Obwohl der Spaltungsgrad des Wasserstoffs an der Mischungsstelle mit Sauerstoff noch nicht genau bestimmt ist, so ist doch wahrscheinlich, daß er nur durch die Bildung kurzer Reaktionsketten die erforderliche Zündungstemperatur hervorzubringen vermag.

Über Zündung des Knallgases durch Wasserstoffatome.

Von F. Haber und H.-D. Graf von Schweinitz.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.)

Eine unlängst erschienene Abhandlung von K. F. Bonhoeffer und F. Haber[1] erörtert den Mechanismus der Knallgasverbrennung und gibt der Vorstellung Ausdruck, daß der Prozeß durch die Zwischenprodukte OH und H im Gange erhalten wird, die mittels der Teilvorgänge a und b eine Reaktionskette liefern

$$\text{a)}\quad OH + H_2 = H_2O + H$$
$$\text{b)}\quad 2\,H + O_2 = 2\,OH.$$

Hieraus läßt sich die Erwartung ableiten, daß eine ausreichende Zufuhr von Wasserstoffatomen oder von Hydroxylradikalen Knallgas bei gewöhnlicher Temperatur zur Explosion bringt.

Diese Vermutung baben wir hinsichtlich der Wasserstoffatome geprüft und bestätigt gefunden.

Hr. A. L. Marshall[2] hat Versuche angestellt, die ein negatives Ergebnis wahrscheinlicher als ein positives machten. Er hat nämlich strömendes Knallgas mit Quecksilberdampf gemischt, und in das Gemisch Quecksilberlicht von der Wellenlänge 2537 A eingestrahlt. Die Quecksilberatome, die auf diese Weise angeregt werden, spaltenWasserstoffmoleküle, mit denen sie zusammenstoßen, durch Abgabe der Anregungsenergie und bringen somit in dem Knallgas eine Beimengung von Wasserstoffatomen hervor. Dies ist die einfachste Auffassung, wenn auch Marshall selbst betont, daß ein Quecksilberhydrid auftreten mag. Jedenfalls ist das Ergebnis nicht eine Zündung des Knallgases gewesen, und dieses Resultat versteht sich leicht aus Marshalls Beobachtung, daß der Druck im quecksilberhaltigen Knallgas bei der Einstrahlung sekundlich nur um 1 °/₀₀ fiel. Keine der möglichen chemischen Umsetzungen, die Wasserstoffatome im Knallgas hervorbringen und erleiden können, führt bei solch kleiner Druckabnahme auf eine sekundliche Erhitzung der Gasmasse, die wesentlich über 1° C hinausgeht, auch wenn keine Wärmeverluste eintreten. Da aber die Zündungstemperatur viele hundert Grad über der gewöhnlichen Temperatur gelegen ist und unterhalb der Zündungstemperatur keine fortschreitende Flamme auftritt, so sieht man ohne weiteres, daß die

[1] Zeitschr. f. physik. Chemie **137**, 263 (1928).
[2] J. physical Chem. **30**, 1078 (1926).

Konzentration der Wasserstoffatome im Marshallschen Falle mindestens um zwei Zehnerpotenzen zu klein war, um Zündung zu bewirken.

Wie lassen sich nun Wasserstoffatome in ausreichender Konzentration dem Knallgas beimengen?

Wir haben dies durch Versuchsanordnungen erreicht, bei denen die Spaltung des Wasserstoffgases in Atome nach dem Vorgang von Langmuir durch einen Hochspannungsbogen bewirkt wurde und die Fortleitung des Gases zwischen Wandungen erfolgte, die von flüssigem Wasser benetzt waren. Diese

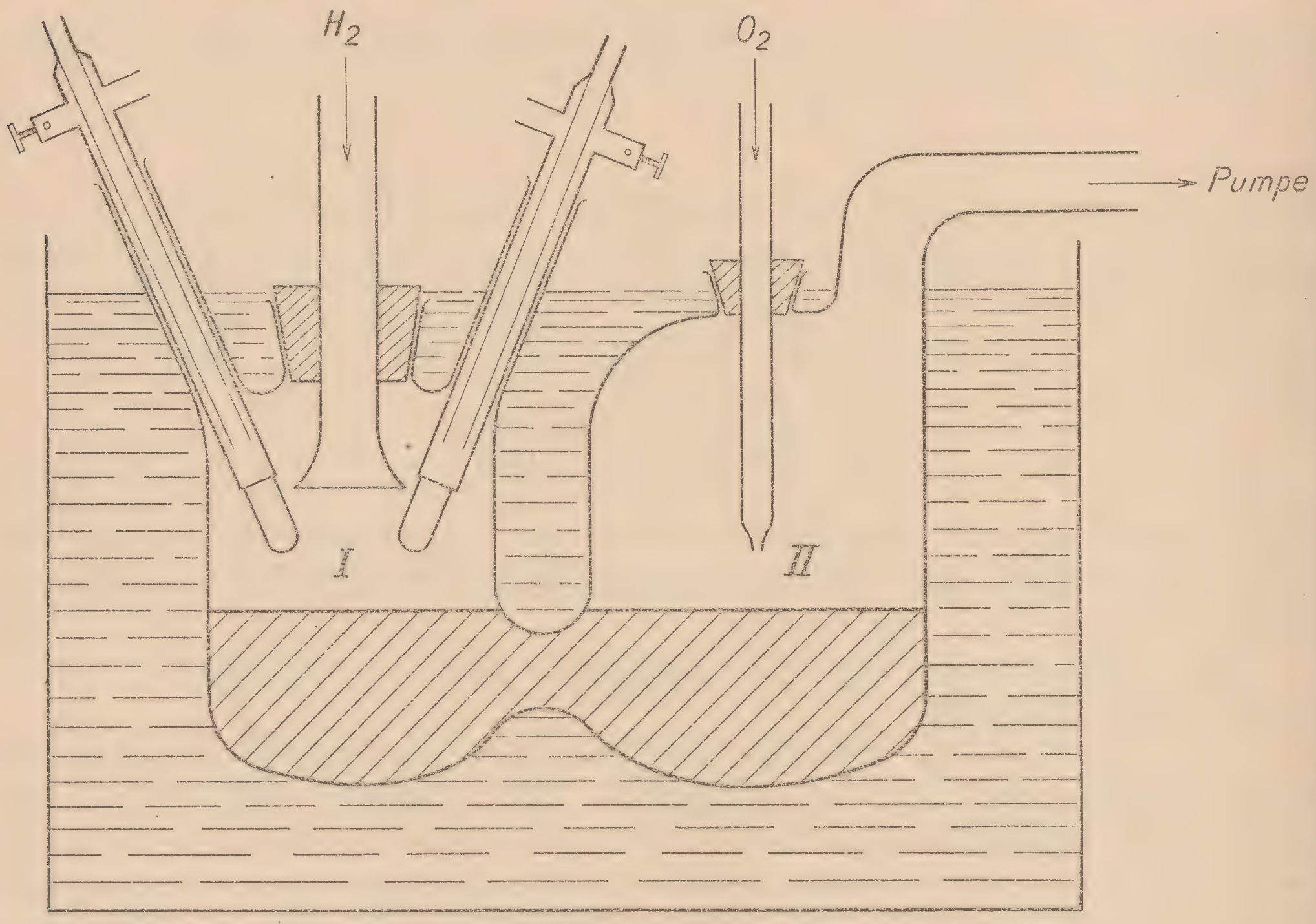


Fig. 1.

»Wasserwände« bewirkten naturgemäß eine schnelle Abführung der fühlbaren Wärme, die die Gase aus dem Bogen mitbrachten. Sie hielten, was uns neu, aber nach dem günstigen Einfluß kleiner Feuchtigkeitsmengen auf die Beständigkeit von Wasserstoffatomen bei niedrigem Drucke in Glasröhren nicht schwer zu verstehen war, die Rückvereinigung der Wasserstoffatome an der Wand auf. Die Rekombination im Gasraum geht so langsam, daß bei unseren Gefäßabmessungen die entstehende Wärme abgeführt wird. Wird aber das fortgeleitete und abgekühlte Wasserstoffgas mit seinem verbliebenen Gehalte an Wasserstoffatomen mit Sauerstoffgas vermengt, so tritt so heftige Reaktion auf, daß eine Explosion mit (durch Spuren von Kochsalz) schwach gelb gefärbter Flamme und hörbarem Knall beobachtet wird.

Die erste solche Versuchsanordnung wird durch die Figur 1 verdeutlicht. Sie zeigte zwei Gefäße aus Jenaer Glas, die im unteren Teile durch ein kurzes und weites Rohr (12 mm Länge, 17 mm Weite) verbunden sind. Am Kopfe

des Gefäßes I sind durch schräggestellte seitliche Stutzen zwei Elektroden so eingeführt, daß sich ihre Enden im Abstande von 20 mm gegenüberstehen. Die Elektroden bestehen aus vernickeltem Messingrohr, welches innen durch strömendes Wasser gekühlt wird. Als Verlängerung der Rohre sind mit Silber Wolframstäbe von 2 cm Länge und 0.36 qcm (quadratischem) Querschnitt angesetzt, von deren halbkuglig abgerundeten Enden der Bogen ausgeht. Zum Bogen wird von oben, durch eine Gasuhr gemessen und durch ein Ventil nach Le Rossignol geregelt, ein Strom feuchten Wasserstoffs zugeleitet. Das gläserne Zuleitungsrohr ist an der Mündung dicht über dem Bogen breitgequetscht, wie es die Figur 1 zeigt, so daß der Wasserstoffstrom durch einen engen Schlitz austritt, der nahe über dem Bogen und mit ihm parallel verläuft (Schlitzbreite 2 mm, Schlitzlänge 23 mm). Das austretende Wasserstoffvolumen, gemessen bei gewöhnlichem Druck und gewöhnlicher Temperatur, entspricht rund 17 ccm/sek. Der Wasserstoffstrom passiert den Bogen, welcher die intensive rote Färbung zeigt, die für Entladungen in Wasserstoff unter weitgehender Spaltung in Atome kennzeichnend ist. Das Spektroskop zeigt die Linien der Wasserstoffatome mit größter Stärke. Der Wasserstoffstrom verläßt das Gefäß I durch den aus der Figur ersichtlichen Wasserverschluß, den er in getrennten, einander rasch folgenden Blasen durchbricht, und geht durch das Gefäß II und eine anschließende Leitung, an welcher das Manometer angesetzt ist, zur Pumpe. Die Pumpe (Wasserstrahlpumpe) ist so geregelt, daß das Manometer keinesfalls mehr als 240 mm Quecksilberdruck zeigt, damit zerstörende Explosionen vermieden werden. Der Regel nach wurden Drucke von etwa 150 mm Quecksilber benutzt. Das zweite Gefäß weist am Kopfe eine Zuführungsstelle auf, durch welche in Fig. 1 ein Sauerstoffzuleitungsrohr aus Glas mit einem Ventil nach Le Rossignol eingeführt ist. Die Wasserfüllung des Apparates (rund 150 ccm) bewirkt, daß bei der Betätigung der Pumpe und dem Durchgang des Wasserstoffs im Gefäß II dauernd ein leichtes Spritzen des Wassers erfolgt. Der ganze Apparat ist bis an die Ansatzrohre am Kopf der Gefäße I und II in Kühlwasser eingesenkt, wie die Zeichnung durch Schraffierung andeutet.

Wir haben zunächst an der Stelle des Sauerstoffzuführungsrohres zum Glasgefäß II einen Glasstab mit einem anhängenden Tropfen von Ölsäure dicht eingeführt. In diesem Falle erkennt man die mit dem Wasserstoffgas durch den Wasserverschluß durchtretenden Wasserstoffatome an der raschen Verwandlung der Ölsäure in kristallisierte Stearinsäure. Eine genaue Bestimmung des Gehaltes an Wasserstoffatomen haben wir bisher nicht ausgeführt. Um einen Anhalt für die Konzentration des atomistischen Wasserstoffes zu gewinnen, haben wir das Wasser im Versuchsgefäß durch n/10 Kaliumpermanganatlösung ersetzt. Bei Speisung des Bogens mit Wechselstrom von 50 Perioden (etwa 1700 Volt, 0.4 Amp.) wurde eine Permanganatreduktion beobachtet, die einer Entnahme von rund 0.1 Prozent atomistischem Wasserstoff aus dem durchgehenden Wasserstoffstrom durch die Permanganatlösung entsprach. Ließ man den Bogen nicht brennen, so machte die Permanganatreduktion nur rund 2 Prozent von dem Werte bei brennendem Bogen aus. Dies ist bei der vergleichsweise schwachen Durchmischung von Gas und

Flüssigkeit nicht im Widerspruch zu den Versuchen von G. Just[1], der die Reaktion von molekularem H_2 auf Permanganatlösung sorgfältig studiert hat. Um die Beobachtung für die Kenntnis des Gehaltes an H-Antomen im Gefäß II nutzbar zu machen, haben wir die Explosionen im Gefäß II bei brennendem Bogen mit Benutzung von Wasserfüllung und bei Füllung mit n/10 Permanganat beobachtet. Wenn das Permanganat eine deutliche Abschwächung der Explosionsfähigkeit ergab, so war erlaubt zu schließen, daß die Größenordnung des Wasserstoffatomgehaltes beim Eintritt in das Gefäß II in die Zehntel-Prozente fiel. Nach einigen Tastversuchen ließ sich der deutliche Unterschied gut feststellen, wenn der Bogen mit 0.11 Amp. (Gleichstrom, Elektrodenspannung etwa 1200 Volt) bei sekundlicher Zufuhr von 17 ccm H_2 (gew. Temp., atm. Druck) pro Sekunde in I brannte und in II die Teildrucke von H_2 70 mm, Sauerstoff 15 mm und von Wasserdampf (Sättigung bei 17°) 15 mm betrugen. Hinter der Wasserfüllung traten dann rasche Zündungen im Gefäß II ein. Hinter der Permanganatfüllung blieben sie aus und setzten erst ein, als die Stromstärke des Bogens verdoppelt und der Partialdruck des Sauerstoffs um mehrere Millimeter erhöht wurde.

Das Charakteristische der Versuche ist, daß die Explosionen stets nur in Gefäß II und in der Leitung zur Pumpe auftreten. Das Gefäß I bleibt, wie der Augenschein in allen Fällen lehrt, von ihnen frei. Wir haben dabei stets das Verfahren befolgt, zunächst bei abgestelltem Bogen erst den Wasserstoffstrom auf einen Druck von 70 bis 200 mm mit der Wasserstrahlpumpe einzuregeln. War der Druck völlig konstant geworden, so wurde nun der Sauerstoffstrom eingestellt und so eingeregelt, daß der Gesamtdruck 15—40 mm höher war als der Druck des feuchten Wasserstoffes. Dann wurde der Hochspannungsbogen mit einer raschen Bewegung und vorher abgepaßten Widerständen gezündet. Die Explosion trat bei Gleichstrom wie bei Wechselstrom bei Stromstärken von 0.1 bis 0.4 Amp. nach einem Sekundenbruchteile auf. Bei 0.03 Amp. verlief zwischen der Entzündung des Bogens und der Explosion des Knallgases meist ein Zeitraum von 1 bis 2 Sekunden.

Um volle Sicherheit zu gewinnen, daß die Zündung des Knallgases nur durch die Spaltprodukte des feuchten Wasserstoffs erfolgte, die in das Gefäß II gelangten, wurde in das Gefäß I ein Argonstrom geführt und sein Druck auf 100 mm mit der Pumpe einreguliert. Dann wurde in das Gefäß II statt Sauerstoff eine Mischung von 35 Prozent Sauerstoff und 65 Prozent Wasserstoff eingeführt, die den Gesamtdruck beim Durchströmen auf 200 mm brachte. Nunmehr wurde der Bogen wiederholt gezündet und mit einer Stromstärke von 0.2 Amp. (Gleichstrom etwa 1200 Volt) je 1 Minute im Brennen erhalten. Dabei trat keine Zündung ein.

Um darzutun, daß nicht etwa geladene Spaltstücke des Wasserstoffs für die Explosion im Gefäß II haftbar zu machen waren, wurde an Stelle des Gaseinleitungsrohres dort der Draht eines Elektroskops eingebracht, nachdem die Wasserfüllung im Gefäße so weit vermindert war, daß kein störendes

[1] Zeitschr. f. physik. Chem. **76**, 601 (1911).

Spritzen im Gefäßteil II stattfand. Sowohl bei negativer wie bei positiver Aufladung des Elektroskops war nur eine äußerst langsame Ladungsverminderung festzustellen.

Es bleibt übrig, darauf hinzuweisen, daß durch Spaltung des Wasserdampfes bei hoher Temperatur Hydroxylradikale entstehen, aber Bonhoeffer und Reichard[1] haben gezeigt, daß sie mit molekularem Wasserstoff im thermodynamischen Gleichgewichte stehen. Sie werden deshalb im feuchten Wasserstoff, den wir mit Drucken von über 100 mm verwendeten, auf winzige Spuren zurückgedrängt sein.

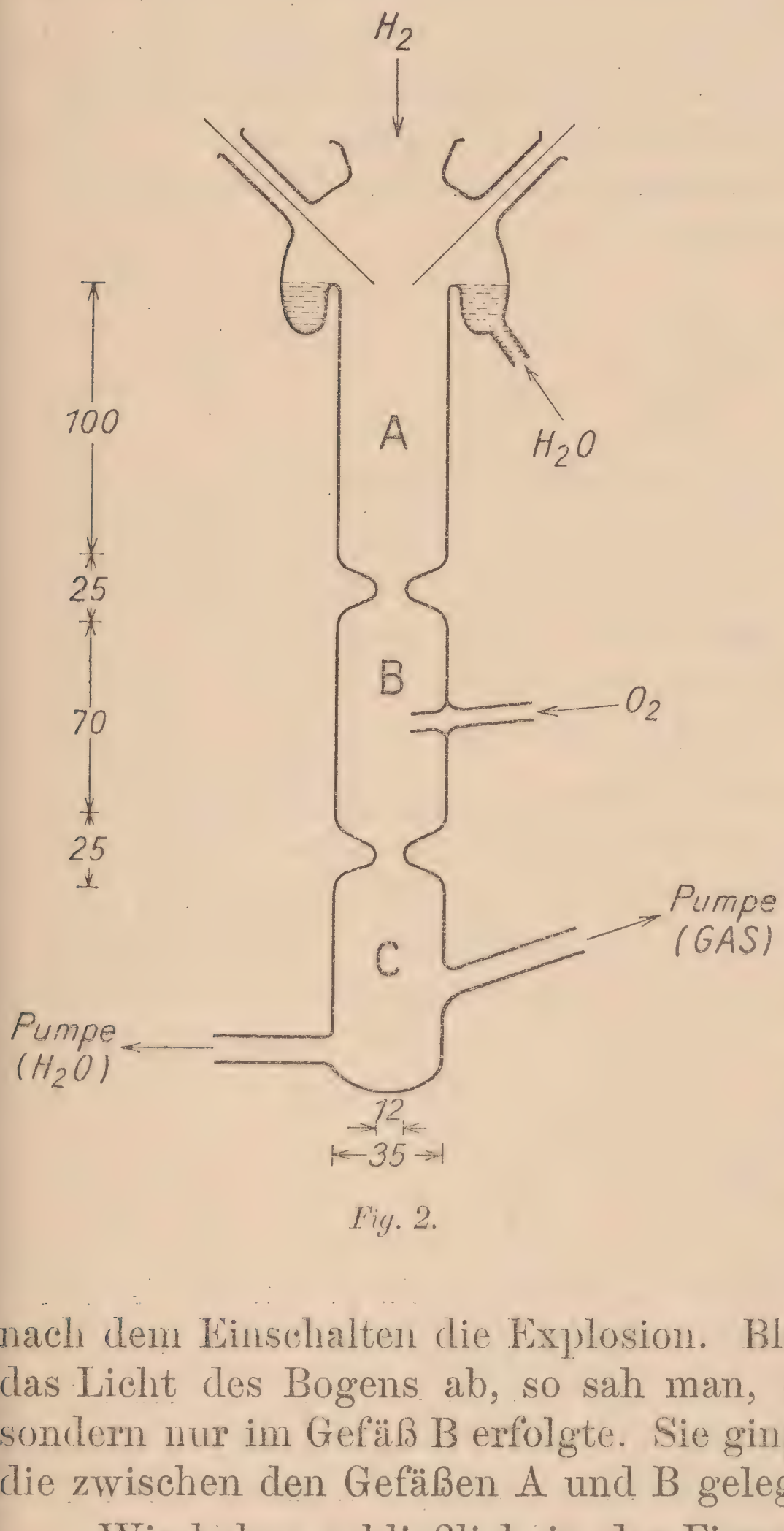


Fig. 2.

Die zweite Anordnung, mit der wir den Versuch durchgeführt haben, ist in Fig. 2 abgebildet. Der Kopf und die Elektroden sind dieselben. Die Gestalt des Glasrohres und die Abmessungen sind aus der Figur abzulesen. Das zugeführte Wasser läuft in raschem Strome an den Innenwänden des Apparates herunter. Wir haben diesen Apparat mit Gleichstrom von 1200 Volt bei einer Stromstärke von 200 Milliamp. betrieben. Der Druck an der Pumpe betrug, wenn kein Sauerstoff zugeführt wurde, gewöhnlich 113 mm, entsprechend der Einführung von 13 ccm Wasserstoff (atm. Druck, gew. Temp.) pro Sekunde; wenn Sauerstoff in das Gefäß B eingeführt wurde, 153 mm. Ließ man Sauerstoff und Wasserstoff bei ungezündetem Bogen bei 153 mm Druck an der Pumpe dauernd strömen und schaltete den Bogen ein, so beobachtete man 2—3 Sekunden nach dem Einschalten die Explosion. Blendete man durch einen Papierschirm das Licht des Bogens ab, so sah man, daß die Explosion nicht im Gefäß A, sondern nur im Gefäß B erfolgte. Sie ging scheinbar von der Einschnürung aus, die zwischen den Gefäßen A und B gelegen ist.

Wir haben schließlich in der Figur 2 ohne Änderung des oberen Stückes das aus den 3 Teilen A, B und C bestehende Rohr ersetzt durch ein 3.5 cm weites, 1 m langes zylindrisches Stück und in dessen Achse von unten her ein (nicht mit Wasser berieseltes) Rohr eingeschoben, durch welches Sauerstoff zugeführt werden konnte. Die Anordnung sollte dazu dienen, den Abstand

[1] Im Druck in Zeitschr. f. physik. Chem.

festzustellen, bis auf welchen die Sauerstoffzufuhr dann dem Bogen genähert werden mußte, wenn Explosionen erfolgen sollten. Es ergab sich dann, daß bei 0.2 Amp. Gleichstrom (etwa 1200 Volt) und bei einer Zuführung des Wasserstoffs im Betrage von rund 13 ccm (gew. Temp., atm. Druck pro Sekunde) der Abstand der Zuführungsstelle des Sauerstoffs vom Bogen 22 cm betragen durfte. Bei größerem Abstande traten die Explosionen nicht mehr ein. Die Mündung des Sauerstoffzuführungsrohres war so gestaltet, daß er nicht durch Strahlwirkung auf den Bogen zuschießen konnte, sondern aus seinem lotrecht stehenden Zuführungsrohre horizontal herausging. Für den stationären Zustand in dem langen geraden Reaktionsrohre wird der Sauerstoffteildruck, der sich zwischen der Eintrittsstelle des Sauerstoffs und dem Bogen durch Diffusion entgegen dem abwärts strömenden Wasserstoff einstellt, nach der Formel zu berechnen sein:

$$x = \frac{D}{v} ln \frac{P_{O_2}}{p_{O_2}}.$$

Hier ist x der Abstand von der Zuführungsstelle des Sauerstoffs in der Achse des Rohres nach oben hin, also auf den Bogen zu, in cm gemessen, D ist die Diffusionskonstante in cm^2/sek (0.7), v ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasserstoffgas von oben nach unten sich fortbewegt, in cm/sek, P_{O_2} ist der Druck, welchen der Sauerstoff in der Horizontalebene seines Austritts aus dem Zuführungsrohr besitzt, und p_{O_2} ist der Teildruck, den er im Wasserstoff durch Diffusion in der x cm darüber liegenden Horizontalebene aufweist. Aus den mitgeteilten Angaben folgt v zu 6 cm/sek. Mit diesem Werte ergibt sich auf je 2.7 cm Erhebung ein Abfall des Sauerstoff-Partialdrucks auf den zehnten Teil. Der mittlere Sauerstoffdruck in der Horizontalebene, in welcher die Einströmung erfolgt, liegt irgendwo zwischen dem Gesamtdruck von 153 mm, den der Sauerstoff in seinem Zuführungsrohre hat, und dem Teildruck von 40 mm, mit dem er nach der Vermischung mit dem feuchten Wasserstoff im Knallgas besteht. Schon 4.3 cm darüber ist er auf etwa 1 mm Teildruck gemäß der Formel gesunken und damit weit unter die Explosionsgrenze hinabgerückt, und noch näher dem Bogen muß sein Gehalt unwahrnehmbar geworden sein. Der Gasstrom ist in dem an der Innenseite mit Wasser berieselten Rohre 4.3 cm über der Sauerstoffzuführungsstelle praktisch auf gewöhnlicher Temperatur. Schon in der Mitte zwischen Bogen und Sauerstoffzufuhrstelle (12 cm vom Bogen) steigt ein Thermometer in 4 Minuten nur um 4°, während wir 5 cm unter dem Bogen in $2^1/_2$ Minuten 50° Anstieg beobachteten. Die Überlegung bietet einen gewissen Ersatz dafür, daß wir bei dieser Art der Versuchsanordnung im Gegensatze zu den beiden früher beschriebenen das Ausbleiben der Zündung und der Explosion in der Umgebung des Bogens nicht durch den Augenschein festzustellen vermögen. Obwohl dieselbe sicherlich in großem Abstande von dem Bogen einsetzt, so scheint doch die Explosionsflamme das ganze Rohr bis zum Bogen hinauf zu erfüllen, wie wir es nach den bestehenden Ver-

hältnissen hier erwarten dürfen. Denn wenn die Explosion in dem benutzten Gemenge von 40 mm Sauerstoff, 100 mm Wasserstoff und 13 mm Wasserdampf einsetzt, so wird eine außerordentliche Druckänderung erfolgen, und der von oben nachstürzende Wasserstoff und der von unten nachgelieferte Sauerstoff werden in dem freien Querschnitte Gasbewegungen und Durchmischungen liefern, die der Flamme allen Ausbreitungsspielraum gewähren. Die Anordnung ist also nicht geeignet, bei eintretender Explosion die Nichtbeteiligung der Gasmassen in der Nähe des Bogens zu demonstrieren. Dafür eignet sie sich um so besser dazu, den Übergang zwischen unserer Erscheinung und den Beobachtungen Marshalls kenntlich zu machen. Ziehen wir nämlich die Einmündungsstelle des Sauerstoffzuführungsrohres so weit hinab, daß die Explosion ausbleibt, so vermögen wir am Manometer noch eine stille Vereinigung von Wasserstoff und Sauerstoff unter der Wirkung der Wasserstoffatome zu erkennen, die jetzt nicht mehr genügende Dichte haben, um den Vorgang bis zum explosiblen Ablauf zu treiben. Das Manometer zeigt einen Druck, der über 10 Prozent niedriger ist, als wenn wir den Bogen ausschalten und bei gleichbleibender Zufuhr von Sauerstoff und Wasserstoff und gleichbleibender Tätigkeit der Pumpen bei nichtbrennendem Bogen arbeiten. Der Druckfall ist 20 Sekunden nach der Zündung bereits ausgebildet und bleibt dann konstant bestehen. Ein sekundlicher Druckfall, der mit Marshalls Wert direkt vergleichbar wäre, läßt sich bei unserer Anordnung nicht messen. Verläuft aber die stille Vereinigung, wie anzunehmen, auf einer kurzen Wegstrecke, so wird er mehrere hundert Male den Marshallschen sekundlichen Wert übertreffen.

Es bleibt die Frage zu erörtern, ob die beobachteten Knallgasexplosionen, ohne die Vorstellung von Kettenreaktionen zu Hilfe zu nehmen, aus der Verbindungswärme der Wasserstoffatome miteinander oder mit Sauerstoffmolekülen hergeleitet werden können. Die betreffenden Verbindungswärmen sind:

$$2\,H = H_2 + 100\ \text{kcal}$$
$$2\,H + O_2 = H_2O_2 + 138\ \text{kcal}$$
$$2\,H + {}^1/_2 O_2 = H_2O + 157\ \text{kcal}.$$

Beträgt die Entzündungstemperatur 600° C, so müssen unter der Annahme der vorteilhaftesten Reaktion, nämlich der Wasserdampfbildung, und bei Vernachlässigung aller Wärmeabfuhr während des Reaktionsvorganges mindestens 5 Volumenprozent Wasserstoffatome zugegen sein, damit ihr Abreagieren die Entzündungstemperatur hervorbringt. Nun ist unsere Bestimmung der Wasserstoffatomkonzentration, wie wir betont haben, eine ganz rohe und der Verbesserung bedürftige. Aber es erscheint uns sehr wenig wahrscheinlich, daß sie in so außerordentlichem Maße zu niedrig ausgefallen sein sollte, wie es der Fall sein müßte, wenn wir angesichts der voranstehenden Daten ohne Kettenreaktionen durchkommen sollten. Finden Kettenreaktionen statt, bei denen unter der Wirkung des atomistischen Wasserstoffs molekularer Wasserstoff und molekularer Sauerstoff unter Bildung von dampfförmigem Hydro-

peroxyd oder Wasserdampf verschwinden, so sind die kleineren Wärmetönungen

$$H_2 + O_2 = H_2O_2 + 38 \text{ kcal}$$
$$H_2 + {}^1/_2 O_2 = H_2O + 57 \text{ kcal}$$

maßgeblich. Um mit Zehntel-Prozenten atomistischen Wasserstoffs für die Erreichung der Zündtemperatur auszukommen, wird man dann etwa Ketten von 30 Gliedern annehmen mögen. Marshall hat erheblich kürzere Ketten gefunden, aber er bezeichnet seinen Wert selber als einen unteren Grenzwert für die Kettenlängen.

Wir sind der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für Beihilfe zur Ausführung der Versuche verpflichtet.

Ausgegeben am 18. Dezember.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

1928 XXXI—XXXIII

SITZUNGSBERICHTE

DER PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Physikalisch-mathematische Klasse

Gesamtsitzung am 6. Dezember. (S. 507)
Klassensitzung am 13. Dezember. (S. 509)
Bieberbach und Schur: Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. (S. 510)
Paschen: Das erste Funkenspektrum des Quecksilbers Hg II. (Mitteilung vom 15. November.) (S. 536)
Gesamtsitzung am 20. Dezember. (S. 547)
Adresse an Hrn. Wilhelm Ostwald zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 19. Dezember. (S. 548)
Namen- und Sachregister. (S. 550)

BERLIN 1928

VERLAG DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI WALTER DE GRUYTER U. CO.

Aus dem Reglement für die Redaktion der akademischen Druckschriften

Aus § 1.

Die Akademie gibt gemäß § 41, 1 der Statuten zwei fortlaufende Veröffentlichungen heraus: »Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften« und »Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften«.

Aus § 2.

Jede zur Aufnahme in die Sitzungsberichte oder die Abhandlungen bestimmte Mitteilung muß in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden, wobei in der Regel das druckfertige Manuskript zugleich einzuliefern ist. Nichtmitglieder haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen.

§ 3.

Der Umfang der aufzunehmenden Mitteilungen soll in der Regel in den »Sitzungsberichten« 64 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Sitzungsberichte«, in den »Abhandlungen« 12 Druckbogen von je 8 Seiten in der gewöhnlichen Schrift der »Abhandlungen« nicht übersteigen.

Überschreitung dieser Grenzen ist nur mit Zustimmung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse statthaft und ist bei Vorlage der Mitteilung ausdrücklich zu beantragen. Läßt der Umfang eines Manuskripts vermuten, daß diese Zustimmung erforderlich sein werde, so hat das vorlegende Mitglied es vor dem Einreichen von sachkundiger Seite auf seinen mutmaßlichen Umfang im Druck abschätzen zu lassen.

§ 4.

Sollen einer Mitteilung Abbildungen im Text oder auf besonderen Tafeln beigegeben werden, so sind die Vorlagen dafür (Zeichnungen, photographische Originalaufnahmen usw.) gleichzeitig mit dem Manuskript, jedoch auf getrennten Blättern, einzureichen.

Die Kosten der Herstellung der Vorlagen haben in der Regel die Verfasser zu tragen. Sind diese Kosten aber auf einen erheblichen Betrag zu veranschlagen, so kann die Akademie dazu eine Bewilligung beschließen. Ein darauf gerichteter Antrag ist vor der Herstellung der betreffenden Vorlagen mit dem schriftlichen Kostenanschlage eines Sachverständigen an den vorsitzenden Sekretar zu richten, dann zunächst im Sekretariat vorzuberaten und weiter in der Gesamtakademie zu verhandeln.

Die Kosten der Vervielfältigung übernimmt die Akademie. Über die voraussichtliche Höhe dieser Kosten ist — wenn es sich nicht um wenige einfache Textfiguren handelt — der Kostenanschlag eines Sachverständigen beizufügen. Überschreitet dieser Anschlag für die erforderliche Auflage 100 Goldmark, so ist Vorberatung durch das Sekretariat geboten.

Aus § 5.

Nach der Vorlegung und Einreichung des **vollständigen druckfertigen** Manuskripts an den zuständigen Sekretar oder an den Archivar wird über Aufnahme der Mitteilung in die akademischen Schriften, und zwar, wenn eines der anwesenden Mitglieder es verlangt, verdeckt abgestimmt.

Mitteilungen von Verfassern, welche nicht Mitglieder der Akademie sind, sollen der Regel nach nur in die Sitzungsberichte aufgenommen werden. Beschließt eine Klasse die Aufnahme der Mitteilung eines Nichtmitgliedes in die Abhandlungen, so bedarf dieser Beschluß der Bestätigung durch die Gesamtakademie.

Aus § 6.

Die an die Druckerei abzuliefernden Manuskripte müssen, wenn es sich nicht bloß um glatten Text handelt, ausreichende Anweisungen für die Anordnung des Satzes und die Wahl der Schriften enthalten. Bei Einsendungen Fremder sind diese Anweisungen von dem vorlegenden Mitgliede vor Einreichung des Manuskripts vorzunehmen. Dasselbe hat sich zu vergewissern, daß der Verfasser seine Mitteilung als vollkommen druckreif ansieht.

Die erste Korrektur ihrer Mitteilungen besorgen die Verfasser. Fremde haben diese erste Korrektur an das vorlegende Mitglied einzusenden. Die Korrektur soll nach Möglichkeit nicht über die Berichtigung von Druckfehlern und leichten Schreibversehen hinausgehen. Umfängliche Korrekturen Fremder bedürfen der Genehmigung des redigierenden Sekretars vor der Einsendung an die Druckerei, und die Verfasser sind zur Tragung der entstehenden Mehrkosten verpflichtet. Übersteigen die Kosten der Korrektur einen gewissen Prozentsatz der Satzkosten, so fallen die Mehrkosten den Verfassern selbst ganz oder teilweise zur Last.

Aus § 8.

Von allen in die Sitzungsberichte oder Abhandlungen aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilungen, Reden, Adressen oder Berichten werden für die Verfasser, von wissenschaftlichen Mitteilungen, wenn deren Umfang im Druck 4 Seiten übersteigt, auch für den Buchhandel Sonderabdrucke hergestellt, die alsbald nach Erscheinen ausgegeben werden.

Von Gedächtnisreden werden ebenfalls Sonderabdrucke für den Buchhandel hergestellt, indes nur dann, wenn die Verfasser sich ausdrücklich damit einverstanden erklären.

§ 9.

Von den Sonderabdrucken aus den Sitzungsberichten erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 50 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 350) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten ohne weiteres 50 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar zum gleichen Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 50. und auf ihre eigenen Kosten weitere 150 Exemplare (im ganzen also 250) abziehen lassen.

Von den Sonderabdrucken aus den Abhandlungen erhält ein Verfasser, welcher Mitglied der Akademie ist, zu unentgeltlicher Verteilung ohne weiteres 30 Freiexemplare; er ist indes berechtigt, zu gleichem Zwecke auf Kosten der Akademie weitere Exemplare bis zur Zahl von noch 100 und auf seine Kosten noch weitere bis zur Zahl von 200 (im ganzen also 230) abziehen zu lassen, sofern er dies rechtzeitig dem redigierenden Sekretar angezeigt hat; wünscht er auf seine Kosten noch mehr Abdrucke zur Verteilung zu erhalten, so bedarf es dazu der Genehmigung der Gesamtakademie oder der betreffenden Klasse. — Nichtmitglieder erhalten 30 Freiexemplare und dürfen nach rechtzeitiger Anzeige bei dem redigierenden Sekretar weitere 100 Exemplare auf ihre Kosten abziehen lassen.

(Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.)

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XXXI. Gesamtsitzung. 6. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Bolte sprach über »Fahrende Leute in der Literatur des 15. und 16. Jahrhunderts«.

Begünstigt durch die unterschiedslos geübte Mildtätigkeit, nahm gegen Ende des Mittelalters das Landstreichertum überhand. Die wandernden Kleriker priesen das Bubenleben oft unter dem Bilde eines Ordens in lateinischen und deutschen Versen. Auch der Schülerbettel fand als Erziehungsmittel zur Demut Verteidiger. Unter den 1510 im »Liber vagatorum« geschilderten Gruppen der Fahrenden interessieren am meisten die als Lotter oder Freiharte herumziehenden Sprecher und Singer, von denen Erzähler und Dramatiker lebendige Schilderungen entwerfen. Ihr Repertoire umfaßte sowohl ergötzliche Lügensprüche und Spottreime als Rätsel, Lieder aller Art und gereimte Zeitungen von Mordtaten und Weltbegebenheiten.

2. Hr. Lüders legte eine Arbeit des korrespondierenden Mitgliedes Hrn. Jacobi in Bonn vor: »Zur Frühgeschichte der indischen Poetik«.

In der einheimischen Literatur über Poetik gilt als erster Vertreter des Alankāraśāstra Bhāmaha; die Werke seiner Vorgänger sind in Vergessenheit geraten. Aber ein Abriß der Poetik aus weit früherer Zeit hat sich in Bharatas Lehrbuch der Dramatik erhalten. So können wir, namentlich mit Berücksichtigung der im Bhaṭṭikāvya enthaltenen Exemplifizierung des Alankāra, die Entwicklung der Poetik vor Bhāmaha in den Grundlinien des Systems (Lehre von den guṇas) und in einzelnen Streitfragen verfolgen. — Der älteste Bestandteil in Bharatas Abriß der Poetik ist die Lehre von den 36 Kennzeichen der Poesie (kāvyalakṣaṇa), die wegen ihres unwissenschaftlichen Charakters nicht zu einem einheitlichen Abschluß kam und darum nicht in das eigentliche Alankāraśāstra aufgenommen worden ist. Die 36 kāvyalakṣaṇas sind nach dem Vorbilde der auf der Analyse vedischer Verse beruhenden 36 mantravākyārthas (Bṛhaddevatā, Yāska) zusammengestellt und dürften als Grundlage beim Unterricht in der Kunst des Dichtens in früheren Zeiten gedient haben.

3. Ferner legte Hr. Lüders vor eine Arbeit des Hrn. Prof. Dr. A. H. Francke in Berlin: »Königsnamen von Khotan auf tibetischen Dokumenten der Turkistansammlungen von London und Berlin«.

Die Frage der Könige von Khotan ist wichtig für die turkistanische Geschichtsforschung. Obgleich ein Stammbaum dieser Könige in der umfangreichen tibetischen Übersetzungsliteratur vorhanden ist, fehlt es doch gar sehr an Zeugnissen von Zeitgenossen, die die Richtigkeit des Stammbaumes erweisen. Im folgenden Aufsatz wird versucht, an der Hand von tibetischen Urkunden, die von amacas sprechen, die Richtigkeit der Stammbaumüberlieferung zu erweisen. Mit amaca (amātya) bezeichneten die tibetischen Herrscher von Turkistan die zu ihren Vasallen gewordenen Khotan-Könige.

4. Hr. Burdach überreichte den 2. Teil des 2. Bandes seines Werkes »Vom Mittelalter zur Reformation«: »Briefwechsel des Cola di Rienzo«, herausgegeben

von Konrad Burdach und Paul Piur, 2. Teil: »Kritische Darstellung der Quellen zur Geschichte Rienzos, mit einer Abhandlung über die Briefsammlungen Petrarcas« (Berlin 1928).

5. Hr. Rubner überreichte seine Abhandlungen: »Der Gesundheitszustand im allgemeinen« und »Das Ernährungswesen im allgemeinen« (Sonderabdrucke aus dem Werk »Deutschlands Gesundheitsverhältnisse unter dem Einfluß des Weltkrieges«, Berlin 1928).

6. Das korrespondierende Mitglied Hr. A. Luschin-Ebengreuth in Graz übersandte seine Arbeit: »Goldgeschäfte Meinhards II., Grafen von Tirol, und seiner Söhne« (Sonderabdruck 1928).

7. Das korrespondierende Mitglied Hr. R. Willstätter in München übersandte sein Werk »Untersuchungen über Enzyme«, 2 Bde. (Berlin 1928).

8. Hr. Engler überreichte das 94. Heft (IV, 141) des Werkes »Das Pflanzenreich«: »*Malpighiaceae*«, Teil 3, von Franz Niedenzu (Leipzig 1928) und das 15. Heft der mit Unterstützung der Wentzel-Heckmann-Stiftung herausgegebenen Beiträge zur »Flora von Papuasien«, herausgegeben von Prof. Dr. C. Lauterbach (Leipzig 1928).

9. Endlich wurde vorgelegt die 3. Lieferung des 5. Bandes des mit Unterstützung der Akademie erschienenen Werkes: »Zoologische und anthropologische Ergebnisse einer Forschungsreise im westlichen und zentralen Südafrika«, ausgeführt in den Jahren 1903—1905 von Dr. Leonhard Schultze, Jena (Jena 1928).

Ausgegeben am 13. Februar 1929.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XXXII. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. 13. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Planck.

Hr. Bieberbach trug über eine gemeinsam mit Hrn. Schur durchgeführte Untersuchung »Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen« vor.

Die Hauptsätze der Theorie werden auf eine neue durchsichtige Weise bewiesen und durch Abschätzungen ergänzt.

Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen.

Von L. Bieberbach und I. Schur.

Am 31. Juli d. J. waren acht Dezennien verflossen seit dem Tag, da Dirichlet in einem Vortrag vor der Preußischen Akademie der Wissenschaften seine Theorie der Reduktion der binären und ternären quadratischen Formen bekanntgab. Sie ist auf die geometrische Deutung gegründet, die Gauss 1831 herangezogen hat. Hiernach bedeutet eine definite quadratische Form das Quadrat der Entfernung in einem kartesischen Koordinatensystem und gehören äquivalente Formen zu Koordinatensystemen, die durch unimodulare ganzzahlige Transformationen auseinander hervorgehen, d. h. zu den verschiedenen Arten, das Gitter der Punkte ganzzahliger Koordinaten nach kongruenten Parallelepipeda zu zerlegen. Die Auswahl einer — oder doch endlich vieler — Formen in jeder Klasse äquivalenter Formen ist das Problem der Reduktion. Dirichlet gab in jenem, Crelle 40 und Ges. Abh. Bd. II abgedruckten Vortrag die folgende Reduktionsvorschrift an: Man wähle unter allen Gitterpunkten einen, der am nächsten beim Ursprung der Koordinaten liegt. Der Vektor vom Ursprung zu ihm hin liefert den ersten Einheitsvektor des Koordinatensystems, das der reduzierten Form entspricht. Alsdann wähle man unter allen Gitterpunkten, die nicht auf der Verbindungslinie des erstgewählten mit dem Ursprung liegen, einen derjenigen, der am nächsten am Ursprung liegt. Der Vektor vom Ursprung zu ihm hin ist der zweite Einheitsvektor des Koordinatensystems, das der reduzierten Form entspricht. Alsdann betrachte man die Gitterpunkte enthaltenden Ebenen, welche diesen beiden ersten Einheitsvektoren parallel sind, und wähle unter diesen eine, welche von der Parallelebene durch den Ursprung die kleinste von Null verschiedene Entfernung hat, und auf ihr einen derjenigen Gitterpunkte, welcher die kleinste darauf mögliche Entfernung vom Ursprung hat. Der Vektor vom Ursprung zu diesem Punkte hin ist der dritte Einheitsvektor des Koordinatensystems, welches der reduzierten Form entspricht. Es ist klar, daß man analoger Vorschrift entsprechend auch bei Formen von beliebig vielen (n) Veränderlichen reduzierte Formen definieren kann. Gleichwohl ist bisher erst nur für $n = 2$ und $n = 3$ die analytische Durchführung der Theorie vorgenommen worden[1]. Dies liegt daran, daß der Fall $n = 3$ einem glück-

[1] Dies gilt auch von der folgenden Modifikation der Dirichletschen Theorie, die sich durch ihre größere Symmetrie zu empfehlen scheint. Man bestimmt den ersten Einheitsvektor wieder als einen der kürzesten, sucht dann aber eine der Gitterpunkte tragenden ihm parallelen

lichen Zufall entsprechend eine sehr einfache Charakterisierung der Reduktionsbedingungen durch lineare Ungleichungen zwischen den Koeffizienten der Form gestattet, während für $n \geqq 4$ die nach DIRICHLET reduzierten Formen durch wesentlich kompliziertere Ungleichungen bestimmt zu sein scheinen. Dieser glückliche Zufall liegt darin, daß nicht nur der zweite Einheitsvektor ein kürzester vom ersten linear unabhängiger nach einem Gitterpunkt führender ist, sondern daß auch der dritte Einheitsvektor zugleich ein kürzester nach einem Gitterpunkt führender Vektor ist, der von den beiden ersten linear unabhängig ist. Für $n \geqq 4$ dagegen ist ein nach dieser Vorschrift bestimmtes Parallelepipedon manchmal kein *primitives* des Gitters, d. h. das mit ihm aufgebaute liefert nicht immer alle Eckpunkte des gegebenen[1].

Geraden, die möglichst dicht bei der Parallelen durch den Ursprung liegt und auf ihr einen der dem Ursprung am nächsten gelegenen Gitterpunkte. Seine Verbindung mit dem Ursprung ist der zweite Einheitsvektor. Den dritten bestimmt man wieder wie bei DIRICHLET. Schon für $n = 3$ ist diese Reduktionsvorschrift inhaltsverschieden von der DIRICHLETschen. Denn nach DIRICHLET sind z. B. die beiden äquivalenten Formen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_3$$

reduziert, während nach der eben gegebenen Definition nur die erste derselben reduziert ist. Ferner ist nach der modifizierten Bedingung z. B.

$$x_1^2 + \frac{9}{8} x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2$$

reduziert, während diese Form nach DIRICHLET nicht reduziert ist. Es ist nämlich hier der Abstand der zweiten Gittergeraden von der ersten $\sqrt{\frac{7}{8}}$, während bei DIRICHLET der dritte Einheitsvektor nicht kürzer als der zweite sein kann.

[1] Man betrachte das Gitter, das von fünf Einheitsvektoren bestimmt ist, deren Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die folgenden sind:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1\ 0\ 0\ 0\ 0) \\ e_2 &= (0\ 1\ 0\ 0\ 0) \\ e_3 &= (0\ 0\ 1\ 0\ 0) \\ e_4 &= (0\ 0\ 0\ 1\ 0) \\ e_5 &= \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Der Vektor

$$\mathfrak{E}_5 = 2\, e_5 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4$$

hat in dem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten (0, 0, 0, 0 1). Seine Länge ist also eins, während e_5 die Länge $\sqrt{\frac{5}{4}}$ hat. Nach DIRICHLET bestimmen $e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5$ eine reduzierte Form, während das durch $e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ \mathfrak{E}_5$ bestimmte Parallelepipedon kein primitives ist. Denn sein Volumen ist 1, während das Volumen des durch $(e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5)$ bestimmten primitiven Parallelepipedons $\frac{1}{2}$ ist. Und doch ist $\mathfrak{E}_5$ kürzer als e_5. Dazu sind $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_4, \pm \mathfrak{E}_5$ die einzigen Gittervektoren der Länge 1 und ist 1 das Minimum der zugehörigen Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \frac{5}{4} x_5^2 + x_1 x_5 + x_2 x_5 + x_3 x_5 + x_4 x_5.$$

Bei ihr ist also eine Reduktion nach sukzessiven Minima unmöglich.

Für $n = 4$ ist nach JULIA (Comptes rendus, Paris, Bd. 162) ein durch sukzessive Minima bestimmtes Parallelepipedon noch primitiv. Eine Ausnahme macht allein die durch

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

Sind $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_n$ die Einheitsvektoren des Gitters und ist $\phi = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2 + \cdots + x_n\mathfrak{e}_n$ der Vektor vom Ursprung nach einem beliebigen Punkt, so ist das Quadrat der Entfernung

$$\phi^2 = \sum x_i x_k \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k = \sum g_{ik} x_i x_k = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

wo $g_{ik} = \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k$ gesetzt ist. Ist $n = 3$ und ist dies eine nach Dirichlet reduzierte Form, so lauten wegen des erwähnten Zufalls die Reduktionsbedingungen

$$f(a_1, a_2, a_3) \geqq g_{11}$$

für jedes Tripel von Zahlen a_1, a_2, a_3,

$$f(a_1, a_2, a_3) \geqq g_{22}$$

für jedes Tripel von Zahlen, in dem a_2 und a_3 nicht beide Null sind und

$$f(a_1, a_2, a_3) \geqq g_{33}$$

für jedes Tripel von Zahlen, in dem $a_3 \neq 0$ ist.

Die angegebenen Bedingungen des Nichtverschwindens entsprechen den vorhin aufgezählten Forderungen der linearen Unabhängigkeit.

Einen Gedanken, wie man die Dirichletsche Theorie auf n Variable verallgemeinern kann, hat Hermite (Crelle 40, Œuvres I S. 149) in seinen Briefen an Jacobi angegeben. Es ist ja klar, daß wegen jenes Zufalles für $n = 3$ die Dirichletschen Reduzierten auch folgende Eigenschaft haben: Unter allen Gitterpunkten wähle man einen dem Ursprung nächstgelegenen. Er liefert den ersten Einheitsvektor des der reduzierten Form entsprechenden Tripels von Einheitsvektoren. Unter allen äquivalenten Formen entsprechenden Tripeln von Einheitsvektoren, welche diesen ersten Einheitsvektor enthalten, wähle man eines, in dem der zweite Einheitsvektor möglichst kurz ist. Diesen zweiten Vektor nehme man als zweiten Einheitsvektor der reduzierten Form. Dann wähle man unter allen den äquivalenten Vektortripeln, welche diese beiden ersten Einheitsvektoren enthalten, eines derjenigen, bei denen der dritte Einheitsvektor möglichst kurz ist. In dieser Form ist die Vorschrift auf n Dimensionen übertragbar. Und dies ist der Hermitesche Gedanke. Die nach Hermite reduzierten Formen nennt man treffend auch *niedrigste* Formen der Klasse. Die analytische Charakterisierung einer niedrigsten Form wird

---

bestimmte Formenklasse. Hier gibt es eine Wahl der sukzessiven Minima, die keinem primitiven Parallelepipedon entspricht. Das Minimum ist Eins. Die angeschriebene Form gehört zu einem durch sukzessive Minima bestimmten primitiven Parallelepipedon. Indessen bestimmen auch die Gitterpunkte

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{matrix}$$

vier sukzessive Minima. Ihr Parallelepipedon hat aber das doppelte Volumen des primitiven.

Für $n = 4$ stimmt natürlich die Reduktion nach sukzessiven Minima (von Randformen abgesehen) mit der Hermiteschen und daher auch mit der Minkowskischen überein. Ihre Stellung zur Dirichletschen Reduktion bleibe dahingestellt.

freilich etwas komplizierter, als sie jener glückliche Umstand ermöglicht haben würde. Sie lautet jetzt so: Es sei (a_{ik}) eine Matrix mit ganzzahligen Elementen und der Determinante ± 1. Es sei (für ihre $l-1$ ersten Kolonnen)

$$f(a_{1k} \cdots a_{nk}) = g_{kk} \text{ für } k = 1, 2, \cdots, l-1,$$

dann ist $f(a_{1l} \cdots a_{nl}) \geqq g_{ll}$. Für $l = 1$ bedeutet dies, daß für die erste Kolonne der Matrix, also für je n teilerfremde ganze Zahlen

$$f(a_{11} \cdots a_{n1}) \geqq g_{11}$$

ist.

MINKOWSKI hat nun bemerkt (CRELLE 129, Ges. Abh. Bd. II), daß man im wesentlichen dieselben reduzierten Formen erhält, wenn man fordert

$$f(s_1 \cdots s_n) \geqq g_{ll},$$

sobald $s_l \cdots s_n$ teilerfremd sind. Jedes solche System von ganzen Zahlen kann man ja als l-te Kolonne einer unimodularen Matrix der vorhin angegebenen Art wählen. Man braucht ja nur die ersten Kolonnen denen der Einheitsmatrix gleich zu wählen; die $n-l$ letzten kann man dann passend zufügen. Also ist, wie diese Überlegung zeigt, jede nach HERMITE reduzierte Form auch nach MINKOWSKI reduziert, so daß beide Ansätze, von gewissen Randformen abgesehen, wie wir noch näher sehen werden, das gleiche leisten. Da aber die MINKOWSKISCHEN Bedingungen sich so viel einfacher angeben lassen — man muß nicht schwer zu übersehende unimodulare Matrizen verwenden —, so verdient die MINKOWSKISCHE Definition vor der HERMITESCHEN den Vorzug.

Gegenstand der nachfolgenden Zeilen ist es, die MINKOWSKISCHE Theorie in einer gegenüber CRELLE 129 vereinfachten und vor allem durchsichtigeren Gestalt zu entwickeln. Außerdem werden Abschätzungen gegeben werden, die bei MINKOWSKI fehlen. Die Darlegungen gehen auf Unterhaltungen und Briefe zurück, die die beiden Verfasser vor vollen 16 Jahren gewechselt haben und die von einer ähnlich betitelten Arbeit des ersten der beiden Verfasser in den Göttinger Nachrichten 1912 ihren Ausgang nahmen.

I. Vorbereitung.

Die oben angegebenen MINKOWSKISCHEN Reduktionsbedingungen heben noch nicht aus jeder Formenklasse nur eine Form heraus, vielmehr sind alle Formen, die durch Vorzeichenwechsel einiger Variablen aus einer reduzierten hervorgehen, wieder reduziert. Analoges gilt auch bei den anderen Reduktionstheorien. Daher fügen wir zu den bisher aufgezählten Reduktionsbedingungen als letzte noch hinzu $g_{k,k+1} \geqq 0 \; (k = 1, 2 \cdots n-1)$.

Wir nennen dann weiterhin eine den Bedingungen

$$(1, \text{a}) \qquad f(s_1, s_2 \cdots s_n) \geqq g_{kk}, \; (s_k, s_{k+1} \cdots s_n) = 1 \qquad (k = 1, 2 \cdots n)$$

$$(1, \text{b}) \qquad g_{i,i+1} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n-1)$$

genügende Form $f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum_1^n g_{ik} x_i x_k$ mit $g_{ik} = g_{ki}$ kurz eine reduzierte Form.

Wir gehen zur Ableitung einiger Eigenschaften der reduzierten Formen über und stellen dabei der Vollständigkeit wegen auch das Wenige wieder mit dar, was wir unverändert von MINKOWSKI übernehmen könnten.

Jede reduzierte Form ist eine nichtnegative Form.

In die eben gegebene Definition der reduzierten Formen war ja nicht die Voraussetzung aufgenommen, daß es sich um eine positive Form handeln soll. In der Tat folgt dies auch schon aus den Reduktionsbedingungen. Denn wäre $f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) < 0$ für irgendeine Zahlenfolge $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$, so gäbe es wegen Stetigkeit auch eine Folge rationaler Zahlen $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$, für die $f(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) < 0$ ist, und daher bei Multiplikation der Form mit dem Quadrat des Generalnenners auch eine Folge teilerfremder ganzer Zahlen dieser Art. Daher wäre $g_{11} < 0$, da g_{11} Minimum der Form für solche Werte der Variablen ist. Daher ist auch

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \geqq g_{11}.$$

Andererseits aber wäre

$$f(k, 1, 0 \cdots 0) = g_{11} k^2 + 2 g_{12} k + g_{22}$$

für große k beliebig groß negativ, während nach den Reduktionsbedingungen

$$f(k, 1, 0 \cdots 0) \geqq g_{22} \geqq g_{11}$$

sein muß[1].

In einer reduzierten Form ist also

$$g_{nn} \geqq g_{n-1, n-1} \geqq \cdots \geqq g_{11} \geqq 0.$$

Hieraus folgt:

Ist eine reduzierte Form nicht positiv, so erscheint sie bei passend gewähltem $h > 0$ als reduzierte positive Form der Veränderlichen $x_{h+1}, x_{h+2} \cdots x_n$. In einer positiven Form sind natürlich alle $g_{kk} > 0$.

Man kann eine solche auf die Form

$$q_1 \zeta_1^2 + q_2 \zeta_2^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2, \tag{2}$$

wo $\zeta_k = x_k + \beta_{k,k+1} x_{k+1} + \cdots + \beta_{kn} x_n$, bringen, wobei alle $q_k > 0$ sind. Diese Darstellung gilt auch noch für die nichtnegativen Formen, wenn man

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_h = 0$$

nimmt.

Es gibt nur endlich viele n-upel ganzer Zahlen, für die eine positive Form einer Zahl $< M$ gleich wird.

Aus der Darstellung (2) liest man nämlich, mit x_n beginnend, sofort Schranken für die möglichen Werte der x_i ab.

Daher besitzt jede nichtnegative Form ein nichtnegatives Minimum.

Unter Minimum wird dabei natürlich der kleinste Wert verstanden, den die Form für ganzzahlige Werte der Variablen mit positiver Quadratsumme annehmen kann.

---

[1] Es ist ja klar, daß stets $g_{k+1, k+1} \geqq g_{kk}$ ist. Denn die Zahlenfolgen, deren $n-k$ letzte teilerfremd sind, kommen unter den Zahlenfolgen vor, deren $n-k+1$ letzte teilerfremd sind.

In jeder Klasse nichtnegativer Formen gibt es niedrigste Formen.

Was gelegentlich der HERMITEschen Reduktionstheorie über die niedrigsten Formen eines Gitters, d. i. die positiven Formen, gesagt wurde, läßt sich sofort auf nichtnegative Formen übertragen. Man muß nur in der Klasse diejenigen Formen nehmen, für die g_{11} möglichst klein ist, unter diesen die, für die g_{22} möglichst klein ist usw. und endlich noch $g_{k,k+1} \geqq 0$ machen.

Niedrigste Formen mit den Nebenbedingungen $g_{k,k+1} \geqq 0$ sind aber stets reduziert, so daß es in jeder Klasse nichtnegativer Formen reduzierte gibt.

Zwei reduzierte Formen, in denen für keine nichttriviale[1] *der Relationen* (1) *das Gleichheitszeichen steht, sind nur dann äquivalent, wenn sie identisch sind.*

Daß es solche reduzierte Formen gibt, wird nachher gezeigt. Hier wollen wir nur im Vorbeigehen das angeführte Ergebnis beweisen.

Die beiden Formen seien $f = \sum g_{ik} x_i x_k$ und $F = \sum G_{ik} x_i x_k$. Ihre Matrizen seien g und G und S sei eine unimodulare Matrix, für die $S' g S = G$ ist. Ist $(s_{k1} \cdots s_{kn})$ die k-te Kolonne von S, so ist $G_{kk} = f(s_{k1} \cdots s_{kn})$. Man nehme $k = 1$. Ist die erste Kolonne von $(\pm 1, 0 \cdots 0)$ verschieden, so ist $G_{11} > g_{11}$. Den Fall $g_{11} = G_{11}$ betrachten wir weiter. Dann ist die erste Kolonne $(\pm 1, 0 \ldots 0)$. In der zweiten Kolonne von S ist dann $(s_{k2} \cdots s_{kn}) = 1$. Ist daher die zweite Kolonne von $(0, \pm 1, 0 \cdots 0)$ verschieden, so ist $G_{22} > g_{22}$. Den Fall $G_{22} = g_{22}$ betrachte man weiter. Dann ist die zweite Kolonne $(0, \pm 1, 0 \cdots 0)$. In der dritten ist daher $(s_{k3} \cdots s_{kn}) = 1$. Ist daher die dritte Kolonne von $(0, 0, \pm 1, 0 \cdots 0)$ verschieden, so ist $G_{33} > g_{33}$. Schließt man so weiter, so erkennt man folgendes: Ist k die erste Nummer, für die nicht $G_{ii} = g_{ii}$ ist, so ist $G_{kk} > g_{kk}$. Vertauscht man g und G, so ergäbe sich ebenso $g_{kk} > G_{kk}$.

Nach dem vorgetragenen Schluß ist daher S eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle $+1$ oder -1 sind. Da aber $g_{k,k+1} > 0$ und $G_{k,k+1} > 0$ ist, so sind entweder alle Diagonalelemente $+1$ oder alle Diagonalelemente -1.

Ist f reduziert, und a eine Konstante, so ist auch af reduziert, wie sofort einleuchtet.

Sind f und F reduziert, so ist auch $t \cdot f + (1-t) F$ reduziert für alle $0 \leqq t \leqq 1$. Die reduzierten Formen bilden also eine konvexe Menge. Aus $f(s_1, s_2 \cdots s_n) \geqq g_{kk}$ und $F(s_1, s_2 \cdots s_n) \geqq G_{kk}$ folgt nämlich

$$t f(s_1 \cdots s_n) + (1-t)\, F(s_1 \cdots s_n) \geqq t\, g_{kk} + (1-t)\, G_{kk},$$

und aus $g_{k,k+1} \geqq 0$ und $G_{k,k+1} \geqq 0$ folgt

$$t\, g_{k,k+1} + (1-t)\, G_{k,k+1} \leqq 0.$$

II. Die Existenz der λ_k.

Sind $f_1, f_2 \cdots$ reduzierte Formen, und existiert $\lim_{\varrho \to \infty} f_\varrho = f$, so ist auch f reduziert.

Aus $f_\varrho(s_1 \cdots s_n) \geqq g_{kk}^{(\varrho)}$ folgt nämlich $f(s_1 \cdots s_n) \geqq g_{kk}$, wenn $f_\varrho = \sum g_{ik}^{(\varrho)} x_i x_k$, $f = \sum g_{ik} x_i x_k$ gesetzt wird.

[1] Trivial nennen wir die Relationen (1a), bei denen immer »gleich« steht. In ihrem Zahlensystem ist nur eine der Zahlen, etwa die k-te, von Null verschieden. Dann ist $s_k = \pm 1$, und es ist für ein solches Zahlensystem $f(s_1 \cdots s_n) = g_{kk}$.

Sind

$$f_\nu = \sum_{ik}^{1\ldots n} g_{ik}^{(\nu)} x_i x_k = \sum q_k^{(\nu)} (\xi_k^{(\nu)})^2, \qquad g_{nn}^{(\nu)} = 1$$

$$\zeta_k^{(\nu)} = x_k + \beta_{k\,k+1}^{(\nu)} x_{k+1} \cdots + \beta_{kn}^{(\nu)} x_n$$

reduzierte Formen, die gegen

$$f = \sum_{h+1}^{n} g_{ik} x_i x_k, \qquad g_{h+1,\,h+1} > 0$$

konvergieren, so haben die $q_{h+1}^{(\nu)} \cdots q_n^{(\nu)}$ *eine positive untere Grenze.*

Wäre nämlich die untere Grenze der $q_l^{(\nu)}\,(l > h)$ Null, so könnte man für ein passend gewähltes $\varepsilon = \frac{1}{m^2}$, m ganz, das N so bestimmen, daß für $\nu > N$

$$g_{11}^{(\nu)} < \varepsilon, \ \cdots, \ g_{hh}^{(\nu)} < \varepsilon, \ g_{h+1,\,h+1}^{(\nu)} > n\varepsilon$$

wäre[1]. Unter diesen ν gibt es dann unendlich viele, derart, daß für dasselbe $l = L > h$ noch $q_L^{(\nu)} < \varepsilon^{n-h}$ bleibt. Man wähle ein festes dieser ν und bestimme[2] dann die teilerfremden ganzen Zahlen $\bar{x}_{h+1} \cdots \bar{x}_n$ so, daß für sie

$$(\zeta_{h+1}^{(\nu)})^2 \leqq \varepsilon, \ \cdots, \ (\zeta_{L-1}^{(\nu)})^2 \leqq \varepsilon, \ (\zeta_L^{(\nu)})^2 \leqq \frac{1}{\varepsilon^{n-h-1}}, \ (\zeta_{L+1}^{(\nu)})^2 \leqq \varepsilon, \ \cdots, \ (\zeta_n^{(\nu)})^2 \leqq \varepsilon$$

---

[1] Es bedarf keiner Erläuterung, wie dies für $h = 0$ gemeint ist.

[2] Daß man die x so wählen kann, folgt unmittelbar aus dem bekannten Minkowskischen Satz über Linearformen. Man beweist ihn in dem hier vorliegenden speziellen Fall nach Minkowski sehr einfach so: Wir setzen der Reihe nach versuchsweise

$$x_L = 0, 1 \cdots m^{n-h-1}.$$

Zu jedem Versuch wählen wir die ganzen $x_{h+1} \cdots x_{L-1}$ so, daß*

$$(\zeta_{h+1}^{(\nu)})^2 < 1, \ \cdots, \ (\zeta_{L-1}^{(\nu)})^2 < 1.$$

Außerdem bestimmen wir die ganzen $x_{L+1} \ldots x_n$ (unabhängig von x_L) so, daß

$$(\zeta_{L+1}^{(\nu)})^2 < 1, \ \cdots, \ (\zeta_n^{(\nu)})^2 < 1$$

ausfallen. Zerlegen wir dann für $k = h+1, \cdots, L-1, L+1, \cdots n$ das Intervall $0 \leqq \zeta_k^{(\nu)} < 1$ jedesmal in m Teilintervalle

$$0 \leqq \zeta_k^{(\nu)} < \frac{1}{m}, \ \frac{1}{m} \leqq \zeta_k^{(\nu)} < \frac{2}{m}, \ \cdots, \ \frac{m-1}{m} \leqq \zeta_k^{(\nu)} < 1,$$

so ist der n-h-1-dimensionale Würfel $0 \leqq \zeta_k^{(\nu)} < 1$ in m^{n-h-1} Teilwürfel zerlegt. Da wir den $m^{n-h-1}+1$ Werten von x_L entsprechend $m^{n-h-1}+1$ Punkte in dem Würfel $0 \leqq \zeta_k^{(\nu)} < 1$ haben, so fallen in mindestens einen der Teilwürfel mindestens zwei der Punkte. Subtrahieren wir die zugehörigen Linearformen von einander, so haben wir die Werte der Linearformen für die Differenzen $\bar{x}$ der zugehörigen x und es gilt für diese Differenzformen

$$|\zeta_{h+1}^{(\nu)}| < \frac{1}{m}, \ \cdots, \ |\zeta_{L-1}^{(\nu)}| < \frac{1}{m}, \ |\zeta_{L+1}^{(\nu)}| < \frac{1}{m}, \ \cdots, \ |\zeta_n^{(\nu)}| < \frac{1}{m}, \ |\zeta_L^{(\nu)}| \leqq m^{n-h-1}.$$

Haben dann die x-Differenzen $\bar{x}$ einen gemeinsamen Teiler, so lasse man ihn weg und gehe so zu neuen x-Werten über. Für sie bleiben die zuletzt angegebenen Ungleichungen richtig.

* Für $L = 1$ fällt diese Wahl weg.

und dazu $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_h$ so, daß

$$(\zeta_1^{(\nu)})^2 < 1, \cdots, (\zeta_h^{(\nu)})^2 < 1$$

ist. Dann müßte wegen

$$q_k^{(\nu)} \leqq g_{kk}^{(\nu)} \leqq 1$$

doch

$$g_{h+1,\,h+1}^{(\nu)} \leqq f(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) < (n-1)\,\varepsilon + \frac{\varepsilon^{n-h}}{\varepsilon^{n-h-1}} = n\varepsilon$$

sein, was der Annahme $g_{h+1,\,h+1}^{(\nu)} > n\varepsilon$ widerspricht.

Insbesondere gibt es also ein μ_n mit $0 < \mu_n \leqq 1$, so daß für alle reduzierten Formen mit $g_{nn} = 1$ stets $q_n \geqq \mu_n$ ausfällt.

Für jede reduzierte Form ist also $q_n \geqq \mu_n g_{nn}$.

Es gibt ein λ_n *mit* $0 < \lambda_n \leqq 1$ *derart, daß für jede reduzierte Form*[1]

$$D_n \geqq \lambda_n g_{11} \cdots g_{nn}.$$

Ist ein $g_{ii} = 0$, so ist dies klar. Wir nehmen also alle $g_{ii} \neq 0$ an.

Setzt man in einer reduzierten Form $x_{h+1} = x_{h+2} = \cdots = x_n = 0$, so ist die Form $f(x_1 \cdots x_h,\ 0 \cdots 0)$ gleichfalls reduziert, wie sofort einleuchtet. Bezeichnet man die Determinante ihrer Matrix mit D_h, so ist $D_h = q_1 q_2 \cdots q_h$. Also ist

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = q_n.$$

Daher ist für alle reduzierten Formen

$$D_n \geqq \mu_n D_{n-1} g_{nn}.$$

Insbesondere ist also wegen $D_1 = g_{11}$

$$D_2 \geqq \mu_2 g_{11} g_{22}.$$

Der zu beweisende Satz ist also für $n = 2$ richtig. Wir erhalten ihn durch vollständige Induktion für beliebiges n. Es sei also bereits

$$D_{n-1} \geqq \lambda_{n-1} g_{11} \cdots g_{n-1,\,n-1}$$

bewiesen. Aus $D_n \geqq \mu_n D_{n-1} g_{nn}$ folgt dann

$$D_n \geqq \mu_n \lambda_{n-1} g_{11} \cdots g_{nn},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Es ist $\lambda_n \geqq \mu_n \lambda_{n-1}$. Daß $\lambda_n \leqq 1$ ist, folgt wegen $g_{ii} \geqq q_i$ aus $D_n = q_1 \cdots q_n \leqq g_{11} \cdots g_{nn}$.

Für jede reduzierte Form ist $q_n \geqq \lambda_n g_{nn}$.

Es ist nämlich

$$q_n = \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

---

[1] D_n ist die Determinante $\| g_{ik} \|$ der Form. Mit λ_n sei die größtmögliche solche Zahl bezeichnet.

Ferner ist

$$D_n = q_1 \cdots q_n \geqq \lambda_n\, g_{11} \cdots g_{nn}$$

$$D_{n-1} = q_1 \cdots q_{n-1} \leqq g_{11} \cdots g_{n-1,\,n-1},$$

also

$$q_n = \frac{D_n}{D_{n-1}} \geqq \lambda_n\, g_{nn}.$$

Welche der beiden Abschätzungen $q_n \geqq \lambda_n g_{nn}$ und $q_n \geqq \mu_n g_{nn}$ die bessere ist, bleibt hier offen.

Wir benötigen weiter noch eine *Abschätzung* der in der Darstellung (2) S. 514 einer *positiven* reduzierten Form vorkommenden β_{ij}. Bekanntlich gilt (vgl. z. B. Netto, Algebra Bd. I S. 190)

$$q_\nu = \frac{D_\nu}{D_{\nu-1}},\quad \beta_{ij} = \frac{D(i-1,\,i,\,j)}{D_i},\quad i < j \leqq n.$$

Dabei ist

$$D_\nu = \begin{vmatrix} g_{11} \cdots g_{1\nu} \\ \cdots\cdots \\ g_{\nu 1} \cdots g_{\nu n} \end{vmatrix},\ \text{und}\ D(i-1,\,i,\,j) = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,i-1}, & g_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{i-1,1} & \cdots & g_{i-1,i-1} & g_{i-1,j} \\ g_{i1} & \cdots & g_{i,i-1} & g_{ij} \end{vmatrix}.$$

$$D_0 = 1, \qquad D(0,\,1,\,j) = g_{1j}.$$

Nun besteht die Determinante $D(i-1, i, j)$ aus $i!$ Gliedern, deren jedes wegen[1] $|2\,g_{lm}| \leqq g_{ll}$, $l < m$ einen Betrag von höchstens $\frac{1}{2}\, g_{11} \cdots g_{ii}$ hat. Also ist

$$|\beta_{ij}| \leqq \frac{1}{2}\,\frac{i!}{\lambda_i}.$$

III. Diskontinuitätsbereich.

Betrachten wir den $\frac{n(n+1)}{2}$— dimensionalen Raum, in dem die Koeffizienten g_{ik} der Formen kartesische Koordinaten sind. In ihm machen die reduzierten Formen eine Punktmenge aus, die wir den *Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz* nennen. Er ist nämlich der Diskontinuitätsbereich[2] der Gruppe, die im Koeffizientenraum durch die unimodulare Gruppe der Variablen induziert wird.

---

[1] Nach (1) ist für jede reduzierte Form bei $x_1 = 0, \cdots, x_{l-1} = 0$, $x_l = \pm 1$, $x_{l+1} = 0, \cdots, x_{m-1} = 0$, $x_m = \pm 1$, $x_{m+1} = 0, \cdots, x_n = 0$

$$g_{ll} \pm 2\,g_{lm} + g_{mm} \geqq g_{mm}.$$

Also ist

$$2\,|\,g_{lm}\,| \leqq g_{ll}.$$

[2] Der Diskontinuitätsbereich einer Gruppe enthält aus jeder Klasse äquivalenter Formen genau eine.

Der Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz ist ein konvexer Bereich, dessen innere Punkte von denjenigen Formen gebildet worden, für die in jeder nichttrivialen[1] *Ungleichung (1) ein* $>$ *steht.*

Wir haben schon S. 515 festgestellt, daß die reduzierten Formen eine konvexe und daher also eine zusammenhängende Menge bilden. Es bleibt zu zeigen, daß sie innere Punkte besitzt, welche genau von den angegebenen Formen geliefert werden, sowie, daß es in jeder Umgebung einer reduzierten Form, solche inneren Formen gibt.

a) Es gibt (für $n > 1$) innere Formen. Z. B. ist

$$f = \left(x_1 + \frac{x_2}{n+1}\right)^2 + 2\left(x_2 + \frac{x_3}{n+1}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(x_{n-1} + \frac{x_n}{n+1}\right)^2 + n\,x_n^2$$

eine innere reduzierte Form. Denn soll für $(s_k, \cdots s_n) = 1$

$$f(s_1, \cdots s_n) \leqq g_{kk} = k + \frac{k-1}{(n+1)^2}$$

sein, so muß (für $k < n$) wegen $g_{kk} < g_{k+1,\,k+1}$

$$x_n = x_{n-1} = \cdots = x_{k+1} = 0\,,\ x_k = \pm 1$$

sein. Dann müssen aber auch $x_{k-1} = \cdots = x_1 = 0$ sein, weil schon $\left|x_{k-1} \pm \frac{1}{n+1}\right| > \frac{1}{n+1}$ wird, sobald $x_{k-1} \neq 0$ ist. Für $k = n$ gilt die letzte Schlußweise in derselben Weise. Dazu sind alle $g_{k,k+1} > 0$.

b) Es gibt in beliebiger Nähe einer reduzierten Form innere Formen. Es sei f die eben konstruierte innere Form und F eine beliebige reduzierte Form. Dann ist nach S. 515 für jede Form $tf + (1-t)F$ reduziert und, wie wir jetzt hinzufügen, sind dies für $0 < t < 1$ selbst alles innere Formen. Denn aus $f(s_1, \cdots s_n) > g_{kk}$ und $F(s_1, \cdots s_n) \geqq G_{kk}$ folgt

$$tf(s_1 \cdots s_n) + (1-t)\,F(s_1 \cdots s_n) > tg_{kk} + (1-t)\,G_{kk}\,,$$

und aus $g_{k,k+1} > 0$ und $G_{k,k+1} \geqq 0$ folgt

$$tg_{k,k+1} + (1-t)\,G_{k,k+1} > 0\,.$$

c) Der Diskontinuitätsbereich wird näher durch den wichtigsten Satz der Reduktionstheorie beschrieben. Dieser lautet:

Unter den die reduzierten Formen definierenden Ungleichungen gibt es endlich viele, aus denen alle übrigen folgen. Auf sie wird man geführt, wenn man diejenigen der Ungleichungen betrachtet, in denen für passende reduzierte Formen das Gleichheitszeichen stehen kann.

Dieser Satz sagt aus, daß der Diskontinuitätsbereich ein kegelartiges Gebilde ist, dessen Spitze im Koordinatenursprung liegt, und das von endlich vielen Hyperebenen begrenzt wird. Er sagt aber weiter aus, daß jede innere Form eine Umgebung von inneren Formen besitzt, daß also wirklich ein Bereich vorliegt.

Wir beweisen zunächst: *Zu jeder Zahl k aus der Reihe $1, 2, \cdots, n$ gehören nur endlich viele ganzzahlige Wertsysteme $x_1, \cdots, x_n$, die folgenden beiden Bedingungen genügen:*

---

[1] Vgl. die Erklärung in Fußnote 1 auf S. 515.

1. $x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n$ *sind teilerfremd,*
2. *es gibt eine positive reduzierte Form* f, *für die* $f(x_1, \cdots, x_n) = g_{kk}$ *ist.*

Wir verwenden die Darstellung (2) von S. 514 und die S. 518 gegebene Abschätzung der β_{ij}. Soll nun

$$\sum q_\nu \zeta_\nu^2 = g_{kk}$$

sein, so ist für $l \geqq k$

$$g_{kk} \geqq q_l \zeta_l^2 \geqq \lambda_l g_{ll} \zeta_l^2 \geqq \lambda_l g_{kk} \zeta_l^2,$$

also ist für $l \geqq k$ wegen $g_{kk} \neq 0$ (positive Form vorausgesetzt)

$$\zeta_l^2 \leqq \frac{1}{\lambda_l}.$$

Daraus folgen wegen der S. 518 gegebenen Abschätzung der β_{ij} obere Schranken für $x_k, x_{k+1} \cdots x_n$, denn die λ_i sind für alle reduzierten Formen dieselben. Nun heißt es auch Schranken für die $x_1 \cdots x_{k-1}$ zu finden. Wir greifen eine der Zahlen $m = 1, 2 \cdots k-1$ heraus. Man wähle dann unter den Wertsystemen $x_1 \cdots x_n$, für die $f(x_1 \cdots x_n) = g_{kk}$ ist, eines und betrachte daneben ein zweites $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$, das aus ihm dadurch hervorgeht, daß man $\bar{x}_{m+1} = x_{m+1}, \cdots, \bar{x}_n = x_n$ setzt und die $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m$ so wählt, daß

$$\bar{\zeta}_1^2 \leqq \frac{1}{4}, \cdots, \bar{\zeta}_m^2 \leqq \frac{1}{4}$$

werden. Durch Überstreichen sind dabei die Werte der ζ bezeichnet, die entstehen, wenn man die x durch die $\bar{x}$ ersetzt. Es ist also $\bar{\zeta}_\nu = \zeta_\nu (\nu \geqq m+1)$, da ja $\bar{x}_\nu = x_\nu (\nu \geqq m+1)$ gesetzt wurde. Da in dem Zahlensystem $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$ wieder $\bar{x}_k = x_k, \cdots, \bar{x}_n = x_n$ teilerfremd sind, so ist

$$g_{kk} \leqq f(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m, x_{m+1} \cdots x_n)$$

$$\leqq \frac{q_1 + q_2 + \cdots q_m}{4} + q_{m+1} \zeta_{m+1}^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2.$$

Wegen

$$g_{kk} = q_1 \zeta_1^2 + q_2 \zeta_2^2 + \cdots + q_m \zeta_m^2 + q_{m+1} \zeta_{m+1}^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2$$

ist daher

$$q_1 \zeta_1^2 + q_2 \zeta_2^2 + \cdots + q_m \zeta_m^2 \leqq \frac{q_1 + q_2 + \cdots q_m}{4}.$$

Da nun $q_j \leqq g_{jj} \leqq g_{mm}$ ist für $j \leqq m$, so folgt nach S. 517

$$\lambda_m g_{mm} \zeta_m^2 \leqq q_m \zeta_m^2 \leqq \frac{m g_{mm}}{4}$$

und wegen $g_{mm} \neq 0$ (positive Form vorausgesetzt)

$$\zeta_m^2 \leqq \frac{m}{4 \lambda_m}.$$

Es wird also im ganzen

$$(3) \qquad \zeta_1^2 \leqq \frac{1}{4\lambda_1}, \cdots, \zeta_{k-1}^2 \leqq \frac{k-1}{4\lambda_{k-1}}, \zeta_k^2 \leqq \frac{1}{\lambda_k}, \cdots, \zeta_n^2 \leqq \frac{1}{\lambda_n}.$$

Wegen der Abschätzung der β_{ij} auf S. 518 folgen hieraus wohlbestimmte Ungleichungen der Form $|x_k| \leqq \frac{c_k}{\lambda_k \lambda_{k+1} \cdots \lambda_n}$ mit gewissen Konstanten c_k. Unter L_k verstehe man die Gesamtheit der ganzzahligen Lösungen dieser Ungleichungen (3) mit $(x_k \cdots x_n) = 1$, zu denen man noch alle die Wertsysteme hinzufügt, bei denen alle x mit einer Ausnahme verschwinden, dies letztere x aber ± 1 ist[1]. Ihre Anzahl und ihre Werte sind wesentlich durch $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ bestimmt. Wir nennen die $L_1 \cdots L_n$ daher die *zu* $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ *gehörigen Wertsysteme* und bemerken, daß der wirklichen Ermittlung der λ_i für den quantitativen Teil der Theorie eine durchschlagende Bedeutung zukommt. Bisher haben wir ja erst nur die Existenz der λ_i nachgewiesen. Auf Abschätzungen für dieselben werden wir später eingehen.

Nun werden wir zeigen, daß *aus den zu den* λ_i *gehörigen Ungleichungen zusammen mit* $g_{k,k+1} \geqq 0$ *folgt, daß alle anderen die reduzierten Formen definierenden gleichfalls erfüllt sind, daß also jede Form, die den Ungleichungen genügt, welche zu den* λ_i *gehören, reduziert ist*[2].

Dabei heißt eine Ungleichung

$$f(x_1 \cdots x_n) \geqq g_{kk}$$

eine zu $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gehörige, wenn $x_1 \cdots x_n$ ein zu $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gehöriges Wertsystem ist, zusammen mit den $g_{k,k+1} \geqq 0$. Die Gesamtheit aller dieser zu $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gehörigen Ungleichungen werde mit $L(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ bezeichnet.

Wir zeigen zunächst, *daß alle die Formen reduziert sind, für die*

$$q_i \geqq \lambda_i g_{ii} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und für die die endlich vielen Bedingungen $L(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ *gelten.*

Ist nämlich $x_1 \cdots x_n$ ein Zahlensystem mit $(x_k \cdots x_n) = 1$, das nicht zu $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gehört, so ist eine der Ungleichungen (3) nicht erfüllt. Ist z. B. $\zeta_m^2 > \frac{1}{\lambda_m}$, $m \geqq k$, dann ist wegen[3] $q_m \geqq \lambda_m g_{mm} \geqq \lambda_m g_{kk}$

$$f(x_1 \cdots x_n) \geqq q_m \zeta_m^2 \geqq g_{kk}.$$

---

[1] Diese zugefügten Wertsysteme werden benötigt, um hernach auf $g_{mm} \geqq g_{kk}$ für $m \geqq k$ schließen zu können.

[2] Dies Ergebnis geht auch insofern über MINKOWSKI hinaus, als dieser noch weitere Ungleichungen (1) nötig hat und dazu die Gesamtheit der von ihm benötigten Ungleichungen nicht so einfach charakterisiert.

[3] Daß $g_{mm} \geqq g_{kk}$ für $m \geqq k$ ist, folgt so. Man setze $x_m = \pm 1$, die anderen x alle gleich Null. Dann sind $x_k \cdots x_n$ teilerfremd, also ist $f(0 \cdots \pm 1 \cdots 0) = g_{mm} \geqq g_{kk}$.

Ist aber z. B. $\zeta_h^2 > \frac{h}{4\lambda_h}$ für eines der $h = 1, \cdots k-1$, so sei h der *größte* Index dieser Art. Dann ist wegen $q_h \geqq \lambda_h g_{hh}$ und $h g_{hh} \geqq g_{11} + g_{22} + \cdots + g_{hh}$, sowie $g_{ii} \geqq q_i$

$$(4) \qquad \begin{aligned} f(x_1 \cdots x_n) &\geqq \frac{1}{4}(g_{11} + \cdots + g_{hh}) + q_{h+1}\zeta_{h+1}^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2 \\ &\geqq \frac{1}{4}(q_1 + \cdots + q_h) + q_{h+1}\zeta_{h+1}^2 + \cdots + q_n\zeta_n^2 . \end{aligned}$$

Nehmen wir nun ein neues Zahlensystem $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_h$, $x_{h+1} \cdots x_n$, für das $\zeta_1^2 \leqq \frac{1}{4} \cdots \zeta_h^2 \leqq \frac{1}{4}$ ist. Dies ist wegen $0 < \lambda_i \leqq 1$, $h < k$, $(x_k \cdots x_n) = 1$, und weil h die größte Zahl ihrer Art war, ein zu $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gehöriges Zahlensystem. Also ist

$$(5) \qquad f(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_h,\ x_{h+1} \cdots x_n) \geqq g_{kk} .$$

Andererseits aber ist

$$f(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_h,\ x_{h+1} \cdots x_n) \leqq \frac{1}{4}(q_1 + \cdots + q_h) + q_{h+1}\zeta_{h+1}^2 + \cdots + q_n\zeta_n^2 .$$

Also ist nach (4) und (5)

$$f(x_1 \cdots x_n) \geqq f(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_h,\ x_{h+1} \cdots x_n) \geqq g_{kk} .$$

Die $L(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ zusammen mit den $q_h \geqq \lambda_h g_{hh}$ bewirken also die Reduktion. Es bleibt nun zu zeigen, daß die $q_h \geqq \lambda_h g_{hh}$ entbehrlich sind. Zunächst bemerke man, daß man die eben durchgeführten Überlegungen mit dem anologen Ergebnis für irgendwelche zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlen $\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n$ anstellen kann. Wir nehmen insbesondere an: $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\bar{\lambda}_2 < \lambda_2, \cdots, \bar{\lambda}_n < \lambda_n$ und betrachten die zugehörigen linearen Ungleichungen $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$, die zusammen mit $q_h \geqq \bar{\lambda}_h g_{hh}$ wieder Reduktion nach sich ziehen[1]. Die Reduktion aber hat zur Folge, daß $q_h \geqq \lambda_h g_{hh}$ ist. Hieraus wieder folgt, daß $q_n > \bar{\lambda}_h g_{hh}$ ist $(h = 2, 3, \cdots n)$.

Wir zeigen nun, daß für keine Form, die den $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$ genügt, $q_h < \bar{\lambda}_h g_{hh}$ sein kann. Daraus folgt nämlich, daß für alle Formen, die den $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$ genügen, auch $q_h \geqq \bar{\lambda}_h g_{hh}$ ist, daß also diese Formen reduziert sind.

Sei im Gegenteil $f(x_1 \cdots x_n)$ eine Form, für die alle $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$ gelten, und für die doch eine der Ungleichungen $q_h < \bar{\lambda}_h g_{hh}$ gilt. Dann sei $F(x_1 \cdots x_n)$ eine reduzierte Form, für die wegen $\bar{\lambda}_h < \lambda_h$ $(h = 2)$ stets $q_h > \bar{\lambda}_h g_{hh}$ $(h \geqq 2)$ ist. Dann betrachte man

$$f(t, x_1 \cdots x_n) = t f(x_1 \cdots x_n) + (1-t)\ F(x_1 \cdots x_n) \text{ für } 0 \leqq t \leqq 1 .$$

t_1 sei so gewählt, daß für $t < t_1$ immer $q_h > \bar{\lambda}_h g_{hh}$ $(h \geqq 2)$ ist, daß aber für $t = t_1$ für eines oder mehrere dieser $q_h \geqq \bar{\lambda}_h g_{hh}$ mit $h \geqq 2$ das Gleichheits-

[1] Umgekehrt sind wegen $\bar{\lambda}_i < \lambda_i$ für alle reduzierten Formen diese Bedingungen erfüllt. Unter den linearen Bedingungen $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$ kommen auch alle $L(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ vor.

zeichen gilt. Dann erfüllt $f(t_1, x_1 \cdots x_n)$ alle $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$, genügt weiter allen $q_h \geqq \bar{\lambda}_h g_{hh}$, wobei aber in mindestens einem derselben mit $h \geqq 2$ das Gleichheitszeichen gilt. Daher ist diese Form reduziert, und folglich müßte, wie wir schon feststellten, $q_h > \bar{\lambda}_h g_{hh}$ sein für alle $h \geqq 2$. Daher gibt es keine Formen, für die alle $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$ gelten und ein oder mehrere $q_h < \bar{\lambda}_h g_{hh}$ sind. Alle Formen, für die alle $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$ gelten, sind also reduziert.

Durch diese Betrachtungen ist nun gezeigt, daß endlich viele der die Reduktion definierenden Ungleichungen, nämlich die $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$ alle anderen zur Folge haben. Es ist nur noch ein etwas genaueres Resultat, wenn wir noch zeigen, daß auch die $L(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ alle anderen nach sich ziehen. Denn dies sind noch weniger Ungleichungen.

Dies folgt daraus, daß die $L(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ mit den $L(\bar{\lambda}_1 \cdots \bar{\lambda}_n)$ identisch sind, falls die $\bar{\lambda}_i$ zwar kleiner als die λ_i sind, von ihnen aber doch hinreichend wenig abweichen. Dies sieht man sofort ein, wenn man daran denkt, daß die zu den $(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ gehörigen Wertesysteme, welche die $L(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ liefern, aus den Ungleichungen (3) zu ermitteln sind. Verkleinert man also λ_n hinreichend wenig, so kommen zu den für x_n brauchbaren Werten keine neuen hinzu. Verkleinert man dann auch λ_{n-1} hinreichend wenig, so kommen auch keine neuen Werte für x_{n-1} in Frage usw.

IV. Endliche Gruppen.

Der Begriff der arithmetischen Äquivalenz bringt es mit sich, daß der Koeffizientenraum der Formen in Bereiche eingeteilt erscheint, die dem vorhin konstruierten Diskontinuitätsbereich äquivalent sind. Es ist mit den vorausgegangenen Ergebnissen durchaus verträglich, daß an den Bereich der reduzierten Formen unendlich viele äquivalente Bereiche angrenzen. Um so merkwürdiger ist es, daß längs *positiven* reduzierten Formen nur endlich viele Nachbarkammern angrenzen. Dies ist der Sinn des jetzt zu beweisenden Satzes:

Es gibt nur endlich viele unimodulare ganzzahlige Transformationen, die geeignet sind, positive reduzierte Formen wieder in reduzierte Formen überzuführen.

Da zu jeder endlichen Gruppe unimodularer ganzzahliger linearer Transformationen eine positive Form gehört, die durch die Gruppe nicht geändert wird, so folgt aus diesem Satze insbesondere, daß alle diese Gruppen zu endlich vielen unimodular ähnlich sind.

Wir geben für diesen Satz in diesem Abschnitt einen Beweis, der gedanklich einfacher ist als der MINKOWSKISCHE. Dieser letztere verdient aber jedenfalls dann den Vorzug, wenn man Abschätzungen anstrebt. Denn diese ermöglicht der MINKOWSKISCHE Beweis zusammen mit der im Abschnitt V unserer Arbeit gegebenen Abschätzung der λ_n. In Abschnitt VI werden wir den MINKOWSKISCHEN Beweis so umgestalten, daß diese Abschätzungen klar hervortreten. Unser jetzt darzulegender Beweis für den eben aufgestellten Satz bietet keine Handhabe zu solchen Abschätzungen.

Zum Beweis des Satzes nehmen wir im Gegenteil an, es gebe unendlich viele solche Transformationen S_ν, durch die jeweils f_ν in g_ν übergehe.

Durch F_ν und G_ν mögen die Matrizen dieser positiven reduzierten Formen bezeichnet werden, so daß also

$$S_\nu' F_\nu S_\nu = G_\nu$$

ist. Es sei

$$f_\nu = \sum a_{ik}^{(\nu)} x_i x_k$$
$$g_\nu = \sum b_{ik}^{(\nu)} x_i x_k .$$

Ist dann $(s_{1k}^{(\nu)} \cdots s_{nk}^{(\nu)})$ die k-te Vertikalreihe von S_ν, so ist

$$f_\nu (s_{1k}^{(\nu)} \cdots s_{nk}^{(\nu)}) = b_{kk}^{(\nu)} .$$

Ist dabei $s_{hk}^{(\nu)} \neq 0$, aber $s_{h+1,k}^{(\nu)} = s_{h+2,k}^{(\nu)} = \cdots = s_{nk}^{(\nu)} = 0$, so wird

$$b_{kk}^{(\nu)} \geqq q_h^{(\nu)} \geqq \lambda_h a_{hh}^{(\nu)} \geqq \lambda_n a_{hh}^{(\nu)},$$

da nach S. 517 $\lambda_h \geqq \lambda_n$ ist.

Wir zeigen nun, daß für jedes $l = 1, 2 \cdots n$

$$b_{ll}^{(\nu)} \geqq \lambda_n a_{ll}^{(\nu)}$$

ist. Denn wäre für ein festes l

$$b_{ll}^{(\nu)} < \lambda_n a_{ll}^{(\nu)} ,$$

so wäre weiter

$$b_{11}^{(\nu)} \leqq b_{22}^{(\nu)} \leqq \cdots \leqq b_{ll}^{(\nu)} < \lambda_n a_{ll}^{(\nu)} \leqq \lambda_n a_{l+1,l+1}^{(\nu)} \leqq \cdots \leqq \lambda_n a_{nn}^{(\nu)} .$$

Daher wäre keine der Zahlen $s_{hk}^{(\nu)}$ für $\begin{matrix} h = l, l+1 \cdots n \\ k = 1, 2 \cdots l \end{matrix}$ in ihrer Vertikalreihe die letzte von Null verschiedene. Es wären alle Null. Das sind aber gerade die Elemente, die zugleich l Vertikalreihen und $n-l+1$ Horizontalreihen angehören. Daher wäre die Determinante Null und nicht ± 1. Ebenso ist

$$a_{ll}^{(\nu)} \geqq \lambda_n b_{ll}^{(\nu)}$$

für alle $l = 1, 2 \cdots n$.

Nimmt man nun an, daß die Formen f_ν durch $a_{nn}^{(\nu)} = 1$ normiert sind, so ist $a_{ll}^{(\nu)} \leqq 1$; also $b_{ll}^{(\nu)} \leqq \frac{1}{\lambda_n} (l = 1, 2 \cdots n)$. Man greife dann unter den Formen f_ν und g_ν Teilfolgen derart heraus, daß $\lim_{\nu \to \infty} f_\nu = f$ und $\lim_{\nu \to \infty} g_\nu = g$ existieren. Dann ist jedenfalls f nicht identisch Null. Wir betrachten nun verschiedene Fälle.

1. Es sei f eine positive Form. Dann kommen für die S_ν nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht. Denn denkt man sich die f_ν in der Form (2) dargestellt, so existieren die Grenzwerte der $q_i^{(\nu)}$. (Man denke an die Darstellung derselben, die S. 518 angegeben wurde.) Diese Grenzwerte sind positiv, weil f eine positive Form ist. Daher sind die $q_i^{(\nu)}$ zwischen positiven Schranken gelegen. Die $\mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}$ sind ein für allemal beschränkt. Für die Kolonnen von S_ν nimmt f_ν Werte $b_{kk}^{(\nu)} \leqq \frac{1}{\lambda_n}$ an, die also unter festen Schranken liegen.

Daher erhält man Schranken für die Werte, welche die $(\zeta_k^{(\nu)})^2$ für die einzelnen Kolonnen von S_ν annehmen können. Und dies zeigt, daß für dieselben nur endlich viele Möglichkeiten in Frage kommen.

2. Es sei f nicht positiv, da $a_{nn} = 1$ ist, wenn man $f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ setzt, so gibt es ein $h < n$, so daß

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{hh} = 0, \quad a_{h+1,\,h+1} \neq 0$$

ist. Dann ist offenbar auch

$$a_{\lambda\mu} = 0 \text{ für } \lambda = 1, 2 \cdots h; \quad \mu = 1, 2 \cdots n.$$

Wegen

$$b_{ll}^{(\nu)} \leqq \frac{a_{ll}^{(\nu)}}{\lambda_n}$$

ist dann auch für die Grenzform g

$$b_{11} = b_{22} = \cdots = b_{hh} = 0$$

und auch

$$b_{h+1,\,h+1} \neq 0.$$

Denn es ist ja auch

$$a_{h+1,\,h+1}^{(\nu)} \leqq \frac{b_{h+1,\,h+1}^{(\nu)}}{\lambda_n}.$$

Dementsprechend ist sowohl bei den f_ν wie bei den g_ν

$$q_i^{(\nu)} \to 0, \quad i = 1, 2 \cdots h.$$

Aber es sind nach S. 516 alle $q_i^{(\nu)} \geqq q > 0$ für $i = h+1, \cdots n$.
Daraus folgt

$$s_{ik}^{(\nu)} = 0 \text{ für } i = 1, 2 \cdots h; \quad k = h+1, \cdots n.$$

Andernfalls müßte es ein $i \leqq h$ geben, so daß

$$f_\nu(s_{i1}^{(\nu)} \cdots s_{in}^{(\nu)}) \geqq q_\lambda^{(n)} \geqq q$$

wäre für ein $\lambda > h$, während doch

$$f_\nu(s_{i1}^{(\nu)} \cdots s_{in}^{(\nu)}) = b_{ii}^{(\nu)}$$

ist und man wegen $b_{ii}^{(\nu)} \to 0$ das ν so groß nehmen kann, daß $b_{ii}^{(\nu)} < q$ ist. Daher ist für genügend große ν

$$S_\nu = \begin{pmatrix} A_\nu, & B_\nu \\ O, & D_\nu \end{pmatrix},$$

wo A_ν eine Matrix von h Zeilen und h Kolonnen, O eine Nullmatrix bedeutet. Schreibt man die Matrizen F_ν und G_ν so:

$$F_\nu = \begin{pmatrix} F_{1\nu} & F_{2\nu} \\ F_{3\nu} & F_{4\nu} \end{pmatrix}$$

$$G_\nu = \begin{pmatrix} G_{1\nu} & G_{2\nu} \\ G_{3\nu} & G_{4\nu} \end{pmatrix},$$

wo $F_{1\nu}$ und $G_{1\nu}$ quadratische Matrizen von h Zeilen sind, so sind die $F_{1\nu}$ und $G_{1\nu}$ Matrizen von positiven Formen. Es kommen für die A_ν nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht, wenn man unseren Satz für Formen von weniger als n Variablen als bewiesen ansieht. Es ist ja

$$G_{1\nu} = A'_\nu F_{1\nu} A_\nu .$$

Für $n = 2$ aber ist der Satz durch die vorstehenden Betrachtungen bewiesen.

Daß die D_ν beschränkt sind, folgt sehr einfach aus $q_k^{(\nu)} \geqq q$ für $k > h$. Denn es ist für $k > h$

$$f_\nu(s_{1k}^{(\nu)} \cdots s_{nk}^{(\nu)}) = b_{kk}^{(\nu)} \geqq q_{h+1}^{(\nu)} (\zeta_{h+1}^{(\nu)})^2 + \cdots + q_n^{(\nu)} (\zeta_n^{(\nu)})^2 \geqq q (\zeta_l^{(\nu)})^2$$

für jedes $l = h+1, \cdots n$. Also ist $(\zeta_l^{(\nu)})^2 < \frac{1}{q\lambda_n}$.

Es gilt nun noch, die Beschränktheit der B_ν nachzuweisen. Aus

$$\begin{pmatrix} A'_\nu & O \\ B'_\nu & D'_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1\nu} & F_{2\nu} \\ F_{3\nu} & F_{4\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu & B_\nu \\ O & D_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{1\nu} & G_{2\nu} \\ G_{3\nu} & G_{4\nu} \end{pmatrix}$$

folgt weiter

$$A'_\nu F_{1\nu} B_\nu + A'_\nu F_{2\nu} D_\nu = G_{2\nu} .$$

Also

$$\begin{aligned} B_\nu + F_{1\nu}^{-1} F_{2\nu} D_\nu &= (A'_\nu F_{1\nu})^{-1} G_{2\nu} \\ &= (G_{1\nu} A_\nu^{-1})^{-1} G_{2\nu} \\ &= A_\nu G_{1\nu}^{-1} G_{2\nu} . \end{aligned}$$

Kann man also zeigen, daß $F_{1\nu}^{-1} F_{2\nu}$ und $G_{1\nu}^{-1} G_{2\nu}$ beschränkt sind, so ist der Beweis fertig. Da F_ν und G_ν zwei reduzierte positive Formen sind, aus deren Matrizen $F_{1\nu}$, $F_{2\nu}$ bzw. $G_{1\nu}$, $G_{2\nu}$ entnommen sind, so haben wir folgendes zu zeigen:
Es sei

$$C = ((c_{ik})) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

wo C_1 h Reihen und Kolonnen hat, die Matrix einer reduzierten positiven Form; dann ist die Matrix $C_1^{-1} C_2$ beschränkt, d. h. ihre Elemente liegen für alle reduzierten Formen C unter denselben Schranken. In der Tat hat jedes Element von $C_1^{-1} C_2$ die Form

$$\frac{\begin{vmatrix} c_{11} \cdots c_{1k} \cdots c_{1h} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{h1} \cdots c_{hk} \cdots c_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} \cdots c_{1h} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{h1} \quad\quad c_{hh} \end{vmatrix}}, \quad k > h$$

Die Zählerdeterminante geht dabei aus der Nennerdeterminante hervor, indem man eine Kolonne der Nennerdeterminante durch eine Kolonne von C_2 ersetzt. Wegen der Reduziertheit von C ist jeder der $h!$ Posten des Zählers absolut nicht größer als $c_{11} \cdots c_{hh}$. Der Nenner ist nicht kleiner als $\lambda_h c_{11} \cdots c_{hh}$.

Daher ist jedes Element von $C_1^{-1} C_2$ absolut nicht größer als

$$\frac{h!\, c_{11} \cdots c_{hh}}{\lambda_h c_{11} \cdots c_{hh}} = \frac{h!}{\lambda_h},$$

womit die Beschränktheit von $C_1^{-1} C_2$ bewiesen ist.

V. Abschätzungen.

Will man wirklich endlich viele lineare Ungleichungen angeben, welche den Diskontinuitätsbereich bestimmen, so ist es erforderlich, eine Abschätzung von λ_n nach unten zu haben. Für $n = 2$ und $n = 3$ sind zunächst $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ und $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ aus der DIRICHLETschen Theorie bekannt. Wir stellten schon S. 512 fest, daß jede DIRICHLETsche Reduzierte auch eine MINKOWSKISche Reduzierte ist. Zwei innere (im MINKOWSKISchen Sinn) reduzierte Formen, sind weiter niemals äquivalent. Daher ist jede innere im MINKOWSKISchen Sinne reduzierte Form auch im DIRICHLETschen Sinne reduziert. Da aber die Randformen alle Grenzformen von inneren Formen des Diskontinuitätsbereiches sind, so stimmen die λ_2 und λ_3 der MINKOWSKISchen Theorie mit denen der DIRICHLETschen Theorie überein[1].

Man kann die Kenntnis von λ_2 und λ_3 benutzen, um λ_n für die übrigen n nach oben abzuschätzen. Dazu führt folgende Bemerkung:

Sind $f(x) = \sum_1^m g_{ik} x_i x_k$ *und* $g(x) = \sum_{m+1}^n g_{ik} x_i x_k$ *positive reduzierte Formen von* m *bzw.* $n - m$ *Veränderlichen, so ist für genügend große positive Werte der Zahl* c

$$\phi = f + cg$$

eine reduzierte Form von n *Variablen.*

Ist zunächst $l \leqq m$, und $(x_l \cdots x_m) = 1$, so ist

$$f(x_1 \cdots x_m) \geqq g_{ll}.$$

Also ist

$$\phi(x_1 \cdots x_n) \geqq g_{ll},$$

falls $(x_l \cdots x_n) = 1$ *und* $(x_l \cdots x_m) = 1$.

[1] Daß die genauen Werte $\lambda_2 = \frac{3}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ lauten, kann man auch direkt beweisen.

Ist aber zwar $(x_l \cdots x_n) = 1$, aber $(x_l \cdots x_m) \neq 1$, so kann man nur schließen

$$\phi(x_1 \cdots x_n) \geqq c g_{m+1,m+1} \geqq g_{ll}$$

für $c \geqq \dfrac{g_{ll}}{g_{m+1,m+1}}$.

Ist aber $l \geqq m$, und $(x_l \cdots x_n) = 1$, so ist

$$\phi(x_1 \cdots x_n) \geqq c g_{ll}.$$

Ferner sind alle $g_{k,k+1} \geqq 0$. Also ist $f + cg$ für genügend große c reduziert. c muß nämlich nur größer als $\dfrac{g_{mm}}{g_{m+1,m+1}}$ sein, damit alle ihm auferlegten Bedingungen zugleich erfüllt sind.

Es sei nun schon $\phi = f + g$ reduziert. Ferner wähle man f und g so, daß die Quotienten $\dfrac{D(f)}{g_{11} \cdots g_{mm}}$ und $\dfrac{D(g)}{g_{m+1,m+1} \cdots g_{nn}}$ sich von den genauen Werten λ_m und λ_{n-m} beliebig wenig unterscheiden.

Dann ist für die Determinanten der drei Formen ϕ, f, g

$$D(\phi) = D(f) D(g) \text{ von } \lambda_m \lambda_{n-m} g_{11} \cdots g_{nn}$$

beliebig verschieden.

Also ist $\lambda_n \leqq \lambda_m \lambda_{n-m}$, woraus z. B. folgt, daß $\lambda_n \leqq \lambda_{n-1}$ und $\lambda_n \leqq \dfrac{3}{4} \lambda_{n-2}$, also auch $\lambda_n \to 0$ für $n \to \infty$. Durch Betrachtung von Formen der Art kann man auch sehen, daß $\lambda_n < \lambda_m \lambda_{n-m}$ ist[1].

Aber für die vorhin bezeichneten Zwecke der Reduktionstheorie ist eine Abschätzung der λ_n *nach unten* nötig.

Es wäre möglich ohne Heranziehung neuer Hilfsmittel im Rahmen der bisherigen Betrachtungen eine solche Abschätzung zu finden[2]. Doch gelangt

---

[1] Durch Betrachtung spezieller reduzierter Formen, z. B. der von Korkine und Zolotareff studierten extremen Formen, kann man noch eine ganze Reihe solcher Abschätzungen nach oben angeben.

[2] Der hierzu führende Gedankengang ist dieser:

Wir wollen für die S. 517 eingeführte Zahl μ_n eine untere Grenze ermitteln und betrachten wieder reduzierte Formen mit $g_{nn} = 1$. Dann ist $q_i \leqq g_{ii} \leqq 1$ für $i = 1, \cdots n$. Aber es können nicht alle $q_i < \dfrac{1}{n}$ sein. Es ist nämlich $q_1 + q_2 + \cdots + q_n \geqq 1$. Wäre $q_1 + q_2 + \cdots + q_n < 1$, so nehme man $x_n = 1$ und bestimme dann die $x_{n-1} \cdots x_1$, so daß $\zeta_{n-1}^2 < 1, \cdots, \zeta_1^2 < 1$ ausfallen. Dann wäre $f(x_1 \cdots x_n) < 1$, während nach den Reduktionsbedingungen bei $x_n = 1$ dort $f(x_1 \cdots x_n) \geqq g_{nn} = 1$ sein muß. Es sei also z. B. $q_{h+1} \geqq \dfrac{1}{n}$. *Entweder ist also* $q_n \geqq \dfrac{1}{n}$, *oder es ist* $q_i \geqq \dfrac{1}{n}$ *für ein* $i = h + 1 \leqq n - 1$. Dann sei $h+1$ die größte Zahl ihrer Art, also $q_{h+2} < \dfrac{1}{n}, \cdots, q_n < \dfrac{1}{n}$. Wir zeigen nun, daß nicht $q_1 \cdots q_h, q_n$ alle miteinander kleiner als $\dfrac{1}{n^{2(n-h)}}$ ausfallen können. Wie auf S. 516, wählen wir die teilerfremden ganzen Zahlen $x_{h+1} \cdots x_n$ so, daß für sie

$$\zeta_{h+1}^2 < \frac{1}{n^2}, \cdots, \zeta_{n-1}^2 < \frac{1}{n^2}, \quad \zeta_n^2 < n^{2(n-h-1)}$$

man zu besseren Ergebnissen, wenn man die schon bekannten Abschätzungen für das Minimum einer Form benutzt. Seit HERMITE kennt man ja mannigfache Abschätzungen für die Zahl γ_k des Satzes

$$D_k \geqq \gamma_k g_{11}^k \tag{6}$$

über reduzierte Formen von k Variablen. Man kennt diese Zahl bis zu $k = 5$ genau. Es ist $\gamma_2 = \frac{3}{4}$, $\gamma_3 = \frac{1}{2}$, $\gamma_4 = \frac{1}{4}$, $\gamma_5 = \frac{1}{8}$. Allgemein gilt die Abschätzung (5) mit dem HERMITEschen Wert

$$\gamma_k = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}. \tag{7}$$

Das beste bisher bekannte Ergebnis rührt von BLICHFELDT (Am. Trans. 15) her und wurde von REMAK (Math. Zeitschr. 26) neu hergeleitet:

$$\gamma_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \left(\frac{1}{\Gamma\left(2+\frac{k}{2}\right)}\right)^2.$$

Wir denken uns die γ_k so gewählt, daß

$$1 = \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \cdots,$$

wie das z. B. bei den HERMITEschen Werten zutrifft, und schicken dem Beweis zunächst eine Vorbetrachtung voraus: Es seien $\alpha_1 \cdots \alpha_\nu$, $\nu \leqq n$ positive Zahlen. Es sei weiter gesetzt $\beta_\nu = \alpha_\nu$, falls $\nu = 1$ ist, $\beta_\nu = \alpha_\nu - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{\nu-1}}{4}$, falls $\nu > 1$, und es sei $\beta_\nu > 0$. In der reduzierten Form

---

werden und bestimmen dazu $x_1 \cdots x_h$ so, daß $\zeta_1^2 < 1, \cdots, \zeta_h^2 < 1$ ausfallen. Dann wäre

$$f(x_1 \cdots x_n) < \frac{h}{n^{2(n-h)}} + \frac{n-h-1}{n^2} + \frac{n^2(n-h-1)}{n^{2(n-h)}}$$

$$< \frac{h}{n^2} + \frac{n-h-1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

während doch für teilerfremde $x_{h+1} \cdots x_n$

$$f(x_1 \cdots x_n) \geqq g_{h+1,\,h+1} \geqq q_{h+1} \geqq \frac{1}{n}$$

sein muß.

Wir wissen nun: Entweder ist $q_n \geqq \frac{1}{n}$, oder es ist entweder $q_n \geqq \frac{1}{n^{2n}}$ oder ein $q_i \geqq \frac{1}{n^{2n}}$, wo $i \leqq n-2$.

Wir wissen also auch: *Entweder ist* $q_n \geqq \frac{1}{n^{2n}}$, *oder es ist ein* $q_i \geqq \frac{1}{n^{2n}}$, *wo* $i \leqq n-2$.

Der Fortschritt gegen die vorige kursiv gedruckte Feststellung liegt darin, daß die Nummer i kleiner geworden ist. Es bedarf keiner weiteren Erörterung, wie man durch Wiederholung solcher Schlüsse nach endlich vielen Schritten zu einer Abschätzung für q_n kommt. Man findet $q_n \geqq n^{-(2n)^{n-1}}$.

$$(7) \qquad \sum_{1}^{n} g_{ij} x_i x_j, \quad g_{nn} = 1$$

sei $g_{11} < \alpha_1$, $g_{22} < \alpha_2 \cdots g_{\nu-1,\nu-1} < \alpha_{\nu-1}$, $g_{\nu\nu} \geqq \alpha_\nu$.

Zu beliebigen teilerfremden Zahlen $x_\nu \cdots x_n$ denke man sich die $x_1, \cdots x_{\nu-1}$ so gewählt, daß in der Darstellung (2) von S. 514 für die Form (7)

$$\zeta_1^2 < \frac{1}{4}, \cdots, \zeta_{\nu-1}^2 < \frac{1}{4}$$

wird. Dann ist

$$\alpha_\nu \leqq g_{\nu\nu} \leqq q_1 \zeta_1^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2$$

$$< \frac{\alpha_1}{4} \cdots + \frac{\alpha_{\nu-1}}{4} + q_\nu \zeta_\nu^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2 .$$

Also

$$q_\nu \zeta_\nu^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2 \geqq \beta_\nu .$$

Daher ist das Minimum der Form $q_\nu \zeta^2 + \cdots + q_n \zeta_n^2$, deren Determinante gleich $q_\nu \cdots q_n$ ist, nicht kleiner als β_ν. Da wegen $g_{nn} = 1$ die $q_i \leqq 1$ sind, so ist

$$(8) \qquad q_n \geqq q_\nu \cdots q_n \geqq \gamma_{n-\nu+1} \left(\alpha_\nu - \frac{\alpha_1}{4} \cdots \frac{\alpha_{\nu-1}}{4} \right)^{n-\nu+1} .$$

Nach dieser Vorbetrachtung wähle man n positive Zahlen

$$\alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}, \quad \alpha_n = 1$$

so, daß für $\nu = 2, 3 \cdots n-1$

$$1. \quad \alpha_\nu - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{\nu-1}}{4} > 0 ,$$

$$2. \quad \left(\alpha_\nu - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{\nu-1}}{4} \right)^{n-\nu+1} \geqq \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-\nu+1}} \alpha_1^n ,$$

$$3. \quad 1 - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{4} \geqq \gamma_n \alpha_1^n .$$

Dies ist für genügend kleine Werte von α_1 sicher möglich. Dann ist

$$q_n \geqq \gamma_n \alpha_1^n .$$

Wäre nämlich

$$q_n < \gamma_n \alpha_1^n ,$$

so wäre wegen $q_n \geqq \gamma_n g_{11}^n$

$$\gamma_n g_{11}^n < \gamma_n \alpha_1^n ,$$

also $g_{11} < \alpha_1$. Nehmen wir an, es sei schon $g_{11} < \alpha_1, \cdots, g_{\nu-1,\nu-1} < \alpha_{\nu-1}$. Es wäre aber

$$g_{\nu\nu} \geqq \alpha_\nu , \quad \nu \leqq n-1 .$$

Dann wäre nach der Vorbetrachtung

$$q_n \geqq \gamma_{n-\nu+1}\left(\alpha_\nu - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{\nu-1}}{4}\right)^{n-\nu+1}$$

$$\geqq \gamma_{n-\nu+1}\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-\nu+1}}\alpha_1^n = \gamma_n \alpha_1^n,$$

was unserer Annahme widerspricht. Also ist

$$g_{11} < \alpha_1, \cdots, g_{n-1,n-1} < \alpha_{n-1}.$$

Dann folgt (wegen $g_{nn} = 1 = \alpha_n$) aber aus (8) für $\nu = n$

$$q_n \geqq 1 - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{4} \geqq \gamma_n \alpha_1^n.$$

Bisher war in der reduzierten Form $g_{nn} = 1$. Ist g_{nn} beliebig, so lautet das Ergebnis

$$q_n \geqq \gamma_n \alpha_1^n g_{nn}.$$

Da dies für alle n gilt, und da $D = q_1 \cdots q_n$ ist, so folgt

$$D \geqq \gamma_1 \cdots \gamma_n \alpha_1^{\frac{n(n+1)}{2}} g_{11} \cdots g_{nn}. \tag{9}$$

Allen Anforderungen wird genügt, wenn man

$$\gamma_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \alpha_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}, \alpha_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}, \cdots, \alpha_{n-1} = \frac{4}{5}$$

setzt. Dann wird nämlich

$$\alpha_\nu - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{\nu-1}}{4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-\nu} - \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{\nu-1}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-\nu+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}.$$

Ferner

$$\left(\alpha_\nu - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{\nu-1}}{4}\right)^{n-\nu+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n^2-n-(\nu-1)(n-1)} \geqq \left(\frac{4}{5}\right)^{n^2-n} \geqq \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-\nu+1}}\alpha_1^n.$$

Endlich

$$1 - \frac{\alpha_1}{4} \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \geqq \gamma_n \left(\frac{4}{5}\right)^{n^2-n} = \gamma_n \alpha_1^n.$$

Somit wird schließlich, wenn man die gefundenen Werte in (9) einsetzt,

$$D_n \geqq \left(\frac{48}{125}\right)^{\frac{n^3-n}{6}} g_{11} \cdots g_{nn},$$

so daß

$$\lambda_n \geqq \left(\frac{48}{125}\right)^{\frac{n^3-n}{6}}$$

ist.

VI. Charakteristische Wurzeln. Zweiter Beweis des Satzes über endliche Gruppen.

Der Satz von der Existenz nur endlich vieler unimodularer Substitutionen $S = (s_{ik})$, die geeignet sind, positive reduzierte Formen in ebensolche überzuführen, ist von uns in Abschnitt IV bereits auf einfachem Wege bewiesen worden. Dieser Beweis liefert aber, wie schon erwähnt, im Gegensatz zum Minkowskischen keine Methode zur wirklichen Berechnung aller zulässigen Substitutionen S. Im folgenden soll der Minkowskische Beweis so umgestaltet werden, daß sich übersichtlichere Abschätzungen für die ganzzahligen Koeffizienten s_{ik} ergeben.

Wir leiten zunächst eine an und für sich interessante Eigenschaft der im Minkowskischen Sinne reduzierten Formen ab.

Es sei

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

eine positive reduzierte Form. Ihre (reellen, positiven) charakteristischen Wurzeln seien $w_1, w_2, \cdots, w_n$. *Ist*

$$w_1 \leqq w_2 \leqq \cdots \leqq w_n,$$

so gelten die Ungleichungen

$$\frac{\lambda_{n+1-h}}{n+1-h} a_{hh} \leqq w_h \leqq h a_{hh}. \qquad (h = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

Aus

$$\sum_k a_{kk} = \sum_k w_k$$

folgt nämlich zunächst wegen $a_{11} \leqq a_{22} \leqq \cdots \leqq a_{nn}$

$$w_n \leqq n a_{nn}. \tag{11}$$

Ist ferner D die Determinante von f und D_{kk} die zum Element a_{kk} gehörende Unterdeterminante, so wird bekanntlich

$$\sum_k \frac{D_{kk}}{D} = \sum_k \frac{1}{w_k}.$$

Da nun

$$D_{kk} \leqq \frac{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}{a_{kk}}, \quad D \geqq \lambda_n a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_k \frac{1}{a_{kk}} \geqq \sum_k \frac{1}{w_k},$$

also insbesondere

$$\frac{n}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{a_{11}} \geqq \frac{1}{w_1}, \text{ d. h.}$$

$$w_1 \geqq \frac{\lambda_n}{n} a_{11}. \tag{12}$$

Wir machen nun von folgendem bekannten Satz Gebrauch: Setzt man in einer quadratischen Form $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ mit den charakteristischen Wurzeln $w_1 \leqq w_2 \leqq \cdots \leqq w_n$ die Veränderliche x_k gleich Null und bezeichnet die charakteristischen Wurzeln der so entstehenden Form f_k mit $w'_1 \leqq w'_2 \leqq \cdots \leqq w'_{n-1}$, so wird

$$w_1 \leqq w'_1 \leqq w_2 \leqq w'_2 \leqq \cdots \leqq w_{n-1} \leqq w'_{n-1} \leqq w_n .$$

In unserem Fall werden auch die f_k reduzierte positive Formen. Nimmt man die Ungleichungen (10), die für $n = 1$ gewiß richtig sind, für $n-1$ Veränderliche als schon bewiesen an, so ergibt sich, indem man $k = n$ wählt,

$$w_h \leqq w'_h \leqq h\, a_{hh} . \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-1)$$

Für $k = 1$ erhält man aber

$$w_h \geqq w'_{h-1} \geqq \frac{n-1-(h-1)+1}{\lambda_{n-1-(h-1)+1}}\, a_{hh} \qquad (h = 2, 3, \cdots, n)$$

In Verbindung mit (11) und (12) ergeben sich alle Formeln (10).

Es sei nun $S = (s_{ik})$ eine unimodulare Substitution, durch die die positive reduzierte Form $f = \sum a_{ik} x_i x_k$ in die reduzierte Form $g = \sum b_{ik} x_i x_k$ übergeführt wird. Wir haben schon früher gesehen, daß

$$b_{kk} \geqq \lambda_n a_{kk} , \quad a_{kk} \geqq \lambda_n b_{kk}$$

wird. Genauer hat sich ergeben: Ist in der k-ten Kolonne von S der Koeffizient s_{hk} der letzte von Null verschiedene, so ist

$$b_{kk} \geqq \lambda_n a_{hh} .$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Erster Fall. Die Substitution S sei nicht »zerlegbar«, d. h. ihre Matrix lasse sich nicht in der Form

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \qquad (A \text{ und } D \text{ quadratische Matrizen})$$

schreiben. *Wir behaupten, daß in diesem Falle*

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} s_{ik}^2 \leqq \frac{n}{\lambda_n^{2k}} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

wird, was unmittelbar zeigt, daß nur endlich viele derartige S in Betracht kommen.

Der Beweis ergibt sich auf Grund der Ungleichung (12) ohne weiteres, wenn wir zeigen können, daß bei unzerlegbaren S

$$a_{11} \geqq \lambda_n^{2k-2} a_{kk} \qquad (13)$$

sein muß. Denn dann wird, weil bekanntlich allgemein

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqq w_1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

ist,

$$\frac{a_{kk}}{\lambda_n} \geqq b_{kk} = f(s_{1k}, s_{2k}, \cdots, s_{nk}) \geqq w_1 \sigma_k \geqq \frac{\lambda_n}{n} a_{11} \sigma_k \geqq \frac{\lambda_n^{2k-1}}{n} a_{kk} \sigma_k ,$$

was die zu beweisende Formel für σ_k liefert.

Um nun (13) zu erhalten, schließen wir so[1]:

Für $k = 1$ ist die Formel (13) richtig. Sie sei schon für $k = h$ bewiesen und $h < n$. Wir haben zu zeigen, daß (13) auch für $k = h + 1$ gilt.

Ist zunächst eine der Zahlen $s_{h+1,1}, \cdots s_{n,1}$ von Null verschieden, so wird für ein gewisses $l > h$

$$b_{11} \geqq \lambda_n a_{ll} \geqq \lambda_n a_{h+1,h+1}, \text{ also } a_{11} \geqq \lambda_n^2 a_{h+1,h+1}.$$

Das liefert a fortiori die für $k = h + 1$ zu beweisende Ungleichung. Sind aber alle s_{l1} für $l > h$ gleich Null[2], so dürfen nicht alle h ersten Kolonnen von S in den $n - h$ letzten Zeilen lauter Nullen enthalten, da sonst S zerlegbar zu nennen wäre. Es gibt also einen Index m $(1 < m \leqq h)$ derart, daß beim letzten von Null verschiedenen Koeffizienten s_{lm} der m-ten Kolonne $l > h$ ausfällt. Dann wird aber

$$b_{hh} \geqq b_{mm} \geqq \lambda_n a_{ll} \geqq \lambda_n a_{h+1,h+1},$$

also ist $a_{hh} \geqq \lambda_n^2 a_{h+1,h+1}$ und demnach

$$a_{11} \geqq \lambda_n^{2h-2} a_{hh} \geqq \lambda_n^{2h} a_{h+1,h+1}.$$

Zweiter Fall. Die Substitution S sei zerlegbar, habe also die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei A eine r-reihige quadratische Matrix bedeute. In diesem Fall können wir wie bei unserem ersten Beweis zum Ziele gelangen, wenn wir nur imstande sind, Schranken für die Koeffizienten

$$s_{r+\alpha,\, r+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n-r)$$

der unimodularen Substitution D anzugeben. Hierbei kann angenommen werden, daß D unzerlegbar sei, da sonst S eine weitere Zerfällung mit vergrößerter Zeilenanzahl r zuließe.

Wir behaupten nun: *Ist die Substitution D nicht zerlegbar, so genügen ihre Koeffizienten den Ungleichungen*

$$\sum_{\alpha=1}^{n-r} s_{r+\alpha,\, r+\beta}^2 \leqq c_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, n-r)$$

für

$$c_\beta = \frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{\lambda_n\ \lambda_{n-1}\ \cdots\ \lambda_{n-r}} \cdot \lambda \frac{1}{\lambda_n^{r+2\beta-1}}.$$

Zunächst lehrt nämlich die im ersten Fall durchgeführte Betrachtung, auf die letzten $n - r$ Kolonnen von S angewandt, daß bei nicht zerlegbarem D

$$a_{r+1,r+1} \geqq \lambda_n^{2\beta-2} a_{r+\beta,r+\beta} \tag{14}$$

sein muß.

Sind nun F und G die Koeffizientenmatrizen der Formen f und g, so wende man auf beiden Seiten der Gleichung

$$S'FS = G$$

[1] Eine ähnliche Schlußweise findet sich bei Minkowski.

[2] Für $h = 1$ kann dieser Fall nicht eintreten, da sonst S zerlegbar wäre.

die $(r+1)$-te »Determinantentransformation« an. Es entsteht eine Gleichung der Form

$$S'_{r+1} F_{r+1} S_{r+1} = G_{r+1},$$

wobei für jede n-reihige Matrix M das Zeichen M_{r+1} die $\binom{n}{r+1}$-reihige Matrix bedeutet, deren Elemente die Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades von M sind. Die charakteristischen Wurzeln von F_{r+1} sind bekanntlich die sämtlichen Produkte $w_\varkappa w_\lambda w_\mu \cdots$ mit $r+1$ voneinander verschiedenen Indizes. Die kleinste unter diesen Zahlen ist

$$(15) \qquad w_1 w_2 \cdots w_{r+1} \geqq \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \cdots \frac{\lambda_{n-r}}{n-r} \; a_{11} a_{22} \cdots a_{rr} a_{r+1,\,r+1}{}^{1}.$$

Bezeichnet man daher die Koeffizienten von S_{r+1} und G_{r+1} mit $t_{\mu,\nu}$ und $h_{\mu,\nu}$, so wird analog dem früheren

$$(16) \qquad h_{\nu\nu} \geqq w_1 w_2 \cdots w_{r+1} \sum_\mu t^2_{\mu\nu}, \qquad \left(\mu, \nu = 1, 2, \cdots \binom{n}{r+1}\right).$$

Man wähle nun ν so, daß

$$h_{\nu\nu} = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+\beta} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & b_{r,r+\beta} \\ b_{r+\beta,1} & \cdots & b_{r+\beta,r} & b_{r+\beta,r+\beta} \end{vmatrix}$$

wird. Dann wird

$$h_{\nu\nu} \leqq b_{11} \cdots b_{rr} b_{r+\beta,r+\beta} \leqq \frac{1}{\lambda_n^{r+1}} a_{11} \cdots a_{rr} a_{r+\beta,r+\beta}.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (14), (15) und (16)

$$(17) \qquad \sum_\mu t^2_{\mu\nu} \leqq c_\beta,$$

wo c_β die frühere Bedeutung hat.

Nun sind aber die hier auftretenden Elemente $t_{\mu\nu}$ nichts anderes als die $\binom{n}{r+1}$ Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades der Matrix S, die mit Hilfe der r ersten Kolonnen und der $(r+\beta)$-ten zu bilden sind. Aus dem Zerfallen von S und der Tatsache, daß die Determinante von A gleich ± 1 ist, folgt aber, daß die nicht von selbst verschwindenden unter den Größen $t_{\mu\nu}$, abgesehen von den Vorzeichen, mit den Zahlen

$$S_{r+1,\,r+\beta},\ S_{r+2,\,r+\beta},\ \cdots,\ S_{n,\,r+\beta}$$

übereinstimmen. Die Ungleichung (17) ist also identisch mit der zu beweisenden Ungleichung.

---

[1] Die hier auftretende Konstante kann, wie sich ohne Mühe zeigen läßt, durch die größere Zahl $\lambda_n \binom{n}{r+1}^{-1}$ ersetzt werden, was für die c_β entsprechend kleinere Werte liefert.

Das erste Funkenspektrum des Quecksilbers Hg II.

Von F. Paschen.

(Vorgetragen am 15. November 1928 [s. oben S. 487].)

Enthält eine Helium-Geißlerröhre etwas Quecksilberdampf, so tritt die Funkenlinie 6149.5 $A°E$ außerordentlich verstärkt im positiven und im negativen Lichte der Röhre auf. Da diese Linie in einer Glimmentladung in reinem Quecksilberdampfe eine ziemlich schwache Linie ist, ist dies Phänomen äußerst überraschend. Es ist ein Anregungsphänomen besonderer Art und veranlaßte mich zu einem eingehenden Studium des ersten Funkenspektrums des Quecksilbers mit dem Ziele der Auffindung der Spektralgesetze dieses Spektrums.

Eine Skizze der Spektralordnung der stärksten Dublets dieses Spektrums ist von I. A. Carroll[1] gegeben. Diese Ordnung wird aber von R. A. Sawyer[2] angezweifelt, der im Anschluß an eine frühere Vermutung von Rydberg ein anderes Linienpaar für das Grunddublet hält. Meine Untersuchung bestätigt die Ordnung von Carroll in bezug auf die drei stärksten Dublets, nämlich die Grunddublets der Hauptserie, der II. und der I. Nebenserie. Dagegen ist Carrolls Grundglied der Serie $3\,D - m\,F$ nicht haltbar. Es lag daher tatsächlich von der Ordnung dieses Spektrums nur etwa so viel vor, wie von den analogen Spektren Zn II und Cd II vor der Arbeit von von Salis[3], in welcher die Termsysteme dieser Spektren weitgehend analysiert worden sind. Allerdings mußte wegen des Zweifels von Sawyer die Untersuchung von vorne beginnen.

Dem Studium wurde unterworfen das negative Glimmlicht einer Gasentladung konstanten Stromes in reinem Quecksilber oder in Helium, dem Quecksilberdampf zugemischt war. Nach früheren Erfahrungen bot dieses Leuchten die Gewähr, das erste Funkenspektrum mit reicher Serienentfaltung zu offenbaren. Dagegen gibt die Entladung hochgespannter Induktionsströme durch verdünnten Quecksilberdampf nach der sorgfältigen Arbeit von H. Stiles[4] ein linienreiches Spektrum, welches zur Serienanalyse von Hg II nicht geeignet erscheint, weil die höheren Serienglieder dabei zu schwach sind. Aus demselben Grunde nützten die vielen Veröffentlichungen der letzten Jahre über Intensitätsverhältnisse der Quecksilberlinien unter verschiedenen Bedingungen

[1] I. A. Carroll, Phil. Trans. Roy. Soc. A. Vol. 225, S. 366, 1926.
[2] R. A. Sawyer, Journ. Opt. Soc. America 13, S. 441, 1926.
[3] G. von Salis, Ann. d. Phys. 76, S. 145, 1925.
[4] H. Stiles, Astrophys. Journ. 30, S. 48, 1909.

für den vorliegenden Zweck nicht besonders. Fig. 1 stellt die Leuchtröhre dar. Die Dimensionen einer brauchbaren Röhre sind angegeben. Nachdem die Kohlezylinder-Kathode durch starken Strom geglüht und gereinigt ist, verschwinden alle Kohlebanden und sogar die Kohlelinien vollständig, wenn der Quecksilberdampf und das Helium völlig rein erhalten bleiben. Bei geringem Heliumdruck leuchtet das negative Glimmlicht nur im Inneren des Zylinders. Bei schwachem Strome (kleiner als 0.02 Amp.) hat man Helium gemischt mit Quecksilberdampf im Inneren und erhält demnach das durch die Energie der metastabilen Heliumatome angeregte Quecksilberspektrum. Pumpt man das Helium fort, so erhält man das negative Glimmlicht im reinen Quecksilberdampfe. Dabei steigt die Klemmenspannung an der Röhre, welche im wesentlichen gleich dem Kathodenfall ist, sehr stark (beobachtet bis 1600 Volt), so daß die Entladung erlischt, selbst wenn 5000 Volt (mit Widerstand) davorliegen[1]. Die reguläre Glimmentladung setzt erst wieder ein, wenn man Helium in die Röhre füllt. Man kann indessen das negative Glimmlicht in reinem Quecksilberdampf auch haben, trotzdem eine Heliumatmosphäre in der Röhre ist, wenn man die Stromstärke erhöht, und dann erlischt die Entladung nicht so leicht. Die dem Quecksilber zufließende Stromwärme der Kathode verdampft dann genügend Quecksilber, und das Helium diffundiert dagegen nicht mehr merklich, so daß im Inneren des Zylinders praktisch reiner Quecksilberdampf leuchtet. Allerdings geht die Anregung des Spektrums beträchtlich weiter, wenn man jegliches Gas aus der Röhre entfernt. Die Röhre war mit einem Hahn verschließbar und vermittels eines Schliffes von der Apparatur trennbar, so daß man durch Kippen das flüssige Quecksilber ans Fenster fließen lassen konnte, um dieses abzuspülen, wenn es beschlagen war. Besser kittete man statt einer Quarzplatte F einen röhrenförmigen Tubus mit Fenster aus Quarzglas an die Röhre, weil dieses Fenster durch Erhitzen sauber zu halten war.

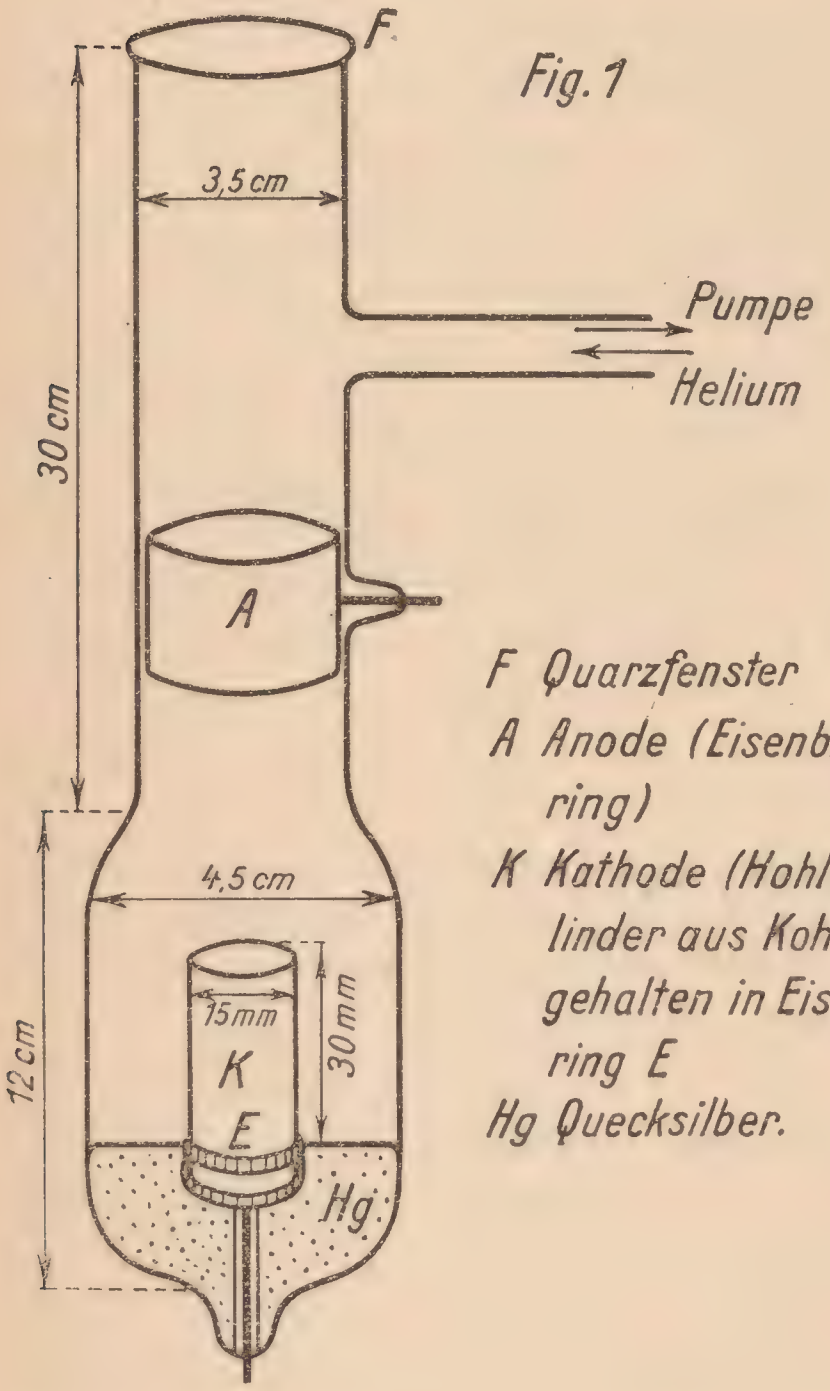


Fig. 1

F Quarzfenster
A Anode (Eisenblechring)
K Kathode (Kohlcylinder aus Kohle) gehalten in Eisenring E
Hg Quecksilber.

Im folgenden wird kurz das Spektrum Hg II angegeben. Es ist das Dublettsystem erkannt, welches nach meiner Analyse der tiefsten Seriengrenze mit dem tiefsten Term $1\,{}^2S_{1/2} = 151280\ \mathrm{cm}^{-1}$ zugeordnet ist, entsprechend einer Ionisierungsspannung von 18.672 Volt. Von dem übrigen Teil des Spektrums, welches einem angeregten Zustand des Ions als Grenze zugeordnet ist, sind einige Terme erkannt, darunter der wichtigste tiefe verkehrte ${}^2D_{5/2,\,3/2}$-Term.

[1] Ein ähnlich hoher Kathodenfall (bis 1000 Volt) trat bei den Versuchen von SCHÜLER und VON SALIS in reinen Zink- und Kadmiumdämpfen auf (Ann. d. Phys. 76, S. 145, 1925).

Aber dieser Teil der Untersuchung ist noch nicht abgeschlossen. Der Vergleich mit dem analogen Bogenspektrum des Goldes Au I oder mit dem besser bekannten und ähnlichen Bogenspektrum des Kupfers Cu I wird daher zunächst nicht behandelt.

Auch hoffe ich noch eine genauere Messung der Wellenlängen durchführen zu können, welche im Hinblick auf die vielfache Verwendbarkeit des Quecksilbers für spektroskopische und sonstige optische Versuche erwünscht erscheint. Bisher war es mir nur möglich, mit Glas- oder Quarzprismenspektrographen und mit einem 1 m-Konkavgitter in Luft, sowie mit einem Vakuumspektrographen, der ein 1 m-Konkavgitter enthält, die Wellenlängen zu messen (gegen Heliumlinien und Quecksilberlinien von Stiles). Mit dem Vakuumgitterapparat wurde das negative Glimmlicht einer Heliumentladung in einem vor dem Spalt schwebenden Kohlezylinder untersucht. Die Röhre enthielt etwas Quecksilber. Das Helium zirkulierte durch die Röhre. Man exponierte[1], solange ein kräftiges Quecksilberspektrum im Glimmlicht zu sehen war. Die starken Linien dieses kurzwelligen Gebietes wurden meistens in zweiter oder dritter Ordnung gegen langwellige Normalen bestimmt. Ihre Genauigkeit dürfte der in diesem Gebiete üblichen mindestens gleichwertig sein. Die Intensitätsangaben beziehen sich auf Hg in Helium.

Das Spektrum Hg II.

Int.	λ L	ν	Kombin.	ν ber.	Int.	λ L	ν	Kombin.	ν ber.
0	8198	12195	$5\,G - 9\,H$	183	3	6123.27[2]	16326.6		
8	7944.66	12583.7	$2\,S - 3\,P_1$	584	0	6114	16351	$4\,P_2 - 7\,S$	355
3	7728.8[2]	12935.1			0	6100.0	16389	$X - 4\,D_3$	389
0	7621.3	13118	$3\,P_1 - 3\,S$	118	1	6040.12	16551.4	$4\,D_3 - 7\,F_4$	551.3
1	7564.4	13216	$4\,D_3 - 6\,F_4$	215	1	5947.8	16808.3	$4\,D_2 - 7\,F_3$	808.7
			$5\,G - 10\,H$	216	4	5888.94	16976.3	$3\,D_2 - C$	977
0	7485.87	13354.6	$3\,P_2 - 4\,D_2$	354	6	5871.73	17026.0	$3\,P_1 - 4\,D_2$	026
6	7418.1	13476.8	$2\,S - X$	475	2	5851.89	17083.8	$C - 6\,G$	082.4
0	7412.5	13487	$4\,D_2 - 6\,F_3$	488	3	5698.69	17543.0	$Z - 3\,S$	546
0	7390	13528	$5\,F_3 - 10\,G$	530	15	5677.17	17609.7	$3\,D_3 - 4\,F_4$	609
4	7346.37	13608.4	$3\,P_2 - 4\,D_3$	608	.5	5644.55	17711.3	$4\,P_1 - 8\,D_2$	711
.5	7344.16	13612.5	$5\,F_4 - 10\,G$	613	4	5595.40	17866.9	$3\,D_3 - 4\,F_3$	866
0	6936.2	14413	$3\,S - 5\,P_2$	413	1	5571.0	17945	$B - 6\,P_1$	942
0	6702.5	14915	$4\,P_2 - 7\,D_3$	915	2	5457.8	18317	$Z - B$	316
1	6609.8	15124	$U - 3\,S$	123	12	5425.25	18427.2	$3\,D_2 - 4\,F_3$	426
2	6521.13	15330.5	$Y - 3\,S$	330	3	5342.4	18713	$4\,D_3 - 8\,F_4$	714
1	6501.47	15376.9						$3\,S - 6\,P_1$	712
4	6394.94	15633.1	$4\,F_3 - 6\,G$	633.4	3	5293.95	18884.2	$4\,F_3 - 7\,G$	884.4
0	6360	15719	$4\,P_1 - 7\,D_2$	718	.5	5286.11	18912.6	$3\,S - 6\,P_2$	913
6	6291.26	15890.7	$4\,F_4 - 6\,G$	890.4	1.5	5277.3	18943.8		
20	6149.50	16257.0	$2\,S - 3\,P_2$	256	1	5271.33	18965.3	$4\,D_2 - 8\,F_3$	965
3	6146.93	16263.8			1	5238.7	19083.4	$4\,P_1 - 9\,D_2$	085

[1] Diese Aufnahmen wurden nach meinen Angaben von Frl. Dr. Gieseler und Hrn. Dr. Gremmer gemacht.

[2] Vielleicht zum Spektrum Hg I gehörig.

Int.	λ L	ν	Kombin.	ν ber.
8	5222.81	19141.5	$4F_4 - 7G$	141.4
4	5216.39	19165.0		
7	5210.79	19185.6		
6	5204.78	19207.8		
4	5196.15	19239.6	$Y - 4D_2$	239
5	5146.26	19426.2		
10	5128.45	19493.6	$Y - 4D_3$	493
7	4980.57	20072.4		
.5	4951.9	20189	$4D_3 - 9F_4$	190
8	4855.72	20588.5	$3P_2 - 4S$	589
7	4825.62	20716.9		
10	4797.01	20840.5		
8	4762.22	20992.7	$4F_3 - 8G$	992.7
				ν Termtab.
9	4704.63	21249.6	$4F_4 - 8G$	249.7
9	4660.28	21452.0	$Z - 4D_2$	454
1	4640.66	21542.6	$3S - 7P_1$	543
5	4630.14	21591.6		
3	4609.72	21687.2		
2	4606.60	21701.9	$3S - 7P_2$	701
4	4597.72	21743.9		
3	4589.91	21780.9		
2	4563.27	21908.0		
5	4552.89	21958.4	$3D_2 - 4P_1$	959
3	4537.01	22034.8		
2	4536.43	22037.6		
1	4522.68	22104.6		
5	4492.81	22251.6	$3D_3 - 4P_2$	252
10	4487.48	22278.1		
5	4455.49	22437.9	$4F_3 - 9G$	438.3
5	4454.33	22473.8		
5	4425.22	22591.4	$3P_2 - 5D_2$	592
6	4404.86	22695.8	$4F_4 - 9G$	695.4
6	4402.06	22710.3		
10	4398.62	22728.0	$3P_2 - 5D_3$	728
3	4382.16	22813.2	$3D_2 - 4P_2$	812
3	4376.0	22845.5		
3	4284.6	23332.8		
3	4282.6	23343.7		
4	4281.94	23347.4		
3	4277.80	23369.9	$X - 4S$	370
4	4264.65	23442.0		
7	4261.88	23457.2		
4	4259.30	23471.4	$4F_3 - 10G$	471.4
4	4237.49	23592.8		
3	4233.99	23612.3		
7	4230.13	23634.0		
7	4227.87	23646.6		
8	4227.29	23650.2		
6	4212.53	23732.0	$4F_4 - 10G$	728
5	4212.22	23733.8		
5	4206.10	23768.4		

Int.	λ L	ν	Kombin.	ν Termtab.
8	4180.95	23911.0		
8	4178.03	23928.0		
4	4175.63	23941.8		
6	4156.68	24050.9		
9	4140.38	24145.6		
2	4124.91	24236.1	$4F_3 - 11G$	236
6	4120.6	24261.3	$3P_1 - 4S$	261
6	4115.41	24292.1	$3P_2 - A$	296
6	4103.87	24360.6		
3	4081.20	24495.7	$4F_4 - 11G$	493
3	4060.89	24618.2		
4	4040.40	24743.1		
5	4006.27	24953.9		
4	4003.10	24973.2		
.5	3987.03	25074.3	$4F_4 - 12G$	074
20	3983.96	25093.6	$^{\times}D_3 - 2P_2$	094
6	3968.03	25194.5		
5	3960.24	25243.8		
7	3948.29	25320.4		
7	3945.09	25340.8		
8	3942.59	25356.9		
8	3942.24	25359.1		
1	3940.40	25371.0	$X - 5D_2$	373
7	3925.65	25466.0		
9	3918.92	25509.6	$X - 5D_3$	509
4	3916.25	25527.4	$4F_4 - 13G$	527
7	3914.29	25540.2		
6	3839.26	26039.3		
4	3832.46	26085.5		
10	3806.38	26264.2	$3P_1 - 5D_2$	264
3	3777.82	26462.8	$3P_2 - 5S$	464
5	3776.26	26473.7	$Y - 4S$	473
5	3774.52	26485.9		
.5	3691.6	27081	$X - A$	077
4	3684.91	27130.0		
8	3638.34	27477.3		
3	3632.38	27522.3		
7	3630.65	27535.4		
6	3618.53	27627.7		
.5	3614.98	27654.7	$3P_2 - 6D_2$	657
4	3607.60	27711.4		
5	3606.92	27716.6		
10	3605.80	27725.2	$3D_3 - 5F_4$	724.5
			$3P_2 - 6D_2$	725
6	3604.09	27738.4		
1	3594.94	27809.0	$3D_3 - 5F_3$	807
3	3593.48	27820.3		
10	3549.42	28165.6		
10	3532.63	28299.4		
7	3524.19	28367.2	$3D_2 - 5F_3$	367
3	3510.68	28476.4	$Y - 5D_2$	476
7	3493.85	28613.6	$Y - 5D_3$	612
6	3492.77	28622.4		

Int.	λ L	ν	Kombin.	ν Termtab.
2	3484.87	28687.3	$Z - 4\,S$	689
4	3478.90	28736.5		
5	3473.01	28785.2		
3	3456.17	28925.5		
10	3451.69	28963.0		
4	3402.77	29379.2		
10	3385.25	29531.5		
4	3358.78	29764.2		
2	3338.42	29945.7	$3\,P_2 - 6\,S$	944.5
2	3317.62	30133.5		
3	3317.30	30136.4	$3\,P_1 - 5\,S$	136
4	3312.31	30181.8	$Y - A$	180
6	3277.87	30498.9		
10	3264.06	30627.9		
3	3257.59	30688.7	$3\,P_2 - 7\,D_2$	690
5	3252.21	30739.5	$3\,P_2 - 7\,D_3$	739.5
2	3211.98	31124.4		
10	3208.20	31161.1		
2	3201.36	31227.7		
8	3191.03	31328.8	$3\,P_1 - 6\,D_2$	329
8	3116.24	32080.7	$2\,S - 4\,P_2$	081
4	3109.84	32146.7		
2	3090.98	32342.8		
9	3090.60	32346.8	$Y - 5\,S$	348
3	3056.32	32709.6	$3\,P_2 - 8\,D_3$	710
3	3045.56	32825.2		
5	3035.10	32938.3		
7	3006.57	33250.8	$3\,D_3 - 6\,F_4$	250
0.5	3004.96	33268.6	$3\,D_3 - 6\,F_3$	269
5	3004.47	33274.2		
3	2982.46	33519.6	$X - 7\,D_3$	520.5
.5	2980.61	33540.4	$Y - 6\,D_2$	541
6	2975.19	33601.6		
2	2974.12	33613.6	$3\,P_1 - 6\,S$	616
			$Y - 6\,D_3$	609
8	2955.13	33829.6	$3\,D_2 - 6\,F_3$	829
10	2947.08	33922.0		
2	2939.03	34015.0		
10	2935.92	34051.0		
				ν ber.
10	2916.27	34280.4		
5	2909.36	34361.7	$3\,P_1 - 7\,D_2$	362
4	2873.24	34793.7		
2	2852.42	35047.7		
50	2847.67	35106.1	$2\,P_2 - 2\,S$	106
10	2814.93	35514.4	$2\,S - {}^{\times}D_3$	514
5	2806.42	35622.1	$U - 6\,S$	621.5
2	2797.43	35736.6		
2	2796.13	35753.2	$Z - 6\,D_2$	757
1	2790.46	35825.8	$Y - 6\,S$	828.5
3	2788.40	35852.3	$3\,P_1 - 7\,S$	852
2	2781.93	35935.6		

Int.	λ L	ν	Kombin.	ν ber.
5	2761.97	36195.4		
1	2749.83	36355.2	$3\,P_1 - 8\,D_2$	358.2
3	2732.60	36584.4	$3\,D_3 - 7\,F_4$	584.3
.5	2732.145	36590.5	$3\,D_3 - 7\,F_3$	588
3	2729.57	36625.0	$Y - 7\,D_3$	624
8	2705.36	36952.7		
8	2702.48	36992.2		
2	2691.13	37148.0	$3\,D_2 - 7\,F_3$	148
1	2627.90	38041.9	$Z - 6\,S$	044.5
1	2580.07	38747.0	$3\,D_3 - 8\,F_4$	747
5	2574.86	38825.4		
4	2572.15	38866.2		
7	2552.87	39159.9		
2	2545.33	39275.9		
1	2543.37	39306.1	$3\,D_2 - 8\,F_3$	306
1	2539.01	39373.6		
1	2531.69	39487.4		
1.5	2525.98	39576.6		
1	2523.37	39617.6		
3	2514.79	39752.8	$2\,S - 5\,P_1$	753
1	2493.295	40095.6		
5	2492.09	40114.9	$2\,S - 5\,P_2$	115
1	2486.32	40208.0		
5	2480.62	40300.3		
5	2414.13	41410.3		
6	2407.35	41526.8		
1	2390.16	41825.4		
2	2382.06	41967.7		
1	2339.37	42733.3		
1	2263.64	44162.9		
9	2262.233	44190.4		
10	2260.260	44229.0	$2\,P_1 - 2\,S$	229
7	2252.780	44375.9	$2\,P_2 - 3\,D_2$	375
20	2224.710	44935.7	$2\,P_2 - 3\,D_3$	935
7	2148.003	46540.2		
9	2052.929	48695.3		
9	2026.971	49318.8		
8	1987.282	50303.6		
2	1978.258	50533.0		
5	1973.246	50661.4		
1	1957.882	51058.9		
2	1947.008	51344.0		
	λ vac.			
50	1942.317	51484.9	$1\,S - 2\,P_1$	485
1	1927.64	51876.9		
3	1904.755	52500.2		
3	1875.541	53317.9	${}^{\times}D_2 - Z$	318
10	1869.242	53497.6	$2\,P_1 - 3\,D_2$	498
.5	1840.592	54330.4		
.5	1800.837	55529.7	${}^{\times}D_2 - Y$	534
.5	1798.736	55594.6		

Int.	λ vac.	ν	Kombin.	ν ber.	Int.	λ vac.	ν	Kombin.	ν ber.
5	1793.962	55742.5	$^{\times}D_2 - U$	741	9	1361.307	73458.8		
2 u	1760.445	56803.8			5	1357.321	73674.5	$^{\times}D_3 - X$	675
10	1731.889	57740.4	$^{\times}D_2 - 3\,P_1$	746	.5	1354.274	73840.3	$2\,P_1 - 4\,D_2$	839
7	1705.518	58633.2	$^{\times}D_2 - X$	637	2	1350.251	74060.3		
2	1675.898	59670.1			.5	1342.821	74470.1		
7	1672.617	59786.6			10	1331.759	75088.7		
30	1649.959	60607.6	$1\,S - 2\,P_2$	608	10	1321.733	75658.2	$2\,P_2 - A$	658
1	1644.526	60807.8	$2\,P_2 - 3\,S$	808	2	1309.074	76389.9	$^{\times}D_2 - 4\,P_1$	390
1	1628.247	61415.8	$^{\times}D_2 - 3\,P_2$	418	9	1307.950	76455.5	$^{\times}D_3 - 3\,P_2$	456
5	1623.955	61578.1	$2\,P_2 - B$	578	1	1205.195	82974.1		
1	1613.355	61982.6			2	1104.253	90559.1		
1	1577.083	63408.2			2	1099.337	90963.9		
1	1539.111	64972.6	$2\,P_2 - 4\,D_3$	970	3	1062.803	94090.8		
4	1530.267	65348.1			2	1039.695	96182.1		
4	1477.770	67669.5			1	969.130	103185		
1	1429.97	69931.5	$2\,P_1 - 3\,S$	931	4	962.740	103870	$1\,S - Z$	870
6	1417.002	70571.5	$^{\times}D_3 - Y$	572	2	942.630	106086	$1\,S - Y$	086
9	1414.427	70700.0			6	940.793	106293	$1\,S - U$	293
1	1404.484	71200.5			4	923.393	108296	$1\,S - 3\,P_1$	298
2	1400.406	71407.9	$^{\times}D_2 - C$	408	7	915.827	109191	$1\,S - X$	189
1	1372.503	72859.6	$^{\times}D_2 - 4\,F_3$	857	10	893.107	111969	$1\,S - 3\,P_2$	970

Der Dublet-Term $^{\times}D_{3,2}$ (genauer $^{2}D_{5/2,\,3/2}$) gibt zu außerordentlich starken Linien Anlaß. Die Linie $^{\times}D_3 - 2\,P_2 = 25093.6$, $\lambda_L = 3983.96$, welche der Linie 5105.6 des Spektrums Cu I entspricht, ist eine der stärksten des Spektrums. Nicht beobachtet sind die zugehörigen im Ultrarot zu erwartenden Linien:

$$^{\times}D_2 - P_2 = 10056, \lambda_{\text{vac}} = 9975.0\ A°E;$$
$$^{\times}D_2 - P_1 = 933,\ \lambda_{\text{vac}} = 107180\ A°E\,(10.72\,\mu).$$

Diese entsprechen den starken gelbgrünen Linien 5782.1 und 5700.3 $A°E$ von Cu I.

Die Linie 2814.93 $A°E$ $\nu = 35514.4$ ist als Übergang vom zweittiefsten Term $^{\times}D_3$ auf den tiefsten Term $1\,S$ aufzufassen.

Beobachtet: $\nu_1 = 1\,S - 2\,P_2 = 60607.6\ \lambda_{\text{vac}} = 1649.959\ A°E$

» $\underline{\nu_2 = {}^{\times}D_3 - 2\,P_2 = 25093.6\ \lambda_L = 3983.96\ A°E.}$

Es folgt $\nu_1 - \nu_2 = 1\,S - {}^{\times}D_3 = 35514.0$ daraus berechnet

gegen den beobachteten Wert von $\nu = 35514.4$ der Wellenzahl der Linie 2814.93. Die Übereinstimmung liegt innerhalb der Fehler der 3 Einzelmessungen.

Die Linie befindet sich im Widerspruch zu den Kombinationsregeln der Terme (Übergang vom D-Term zum S-Term) und im Widerspruch zu den Kombinationsregeln der inneren Quantenzahlen (Übergang von der Quantenzahl 3 [bzw. 5/2] auf diejenige 1 [bzw. 1/2]).

Term-Tabelle Hg II. Werte der Terme I und der effektiven Hauptquantenzahlen $n^\times$.

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
^2S T	151280	55566	29864	18721	12846	9365.5	7130				
$n^\times$	1.70340	3.81062	3.83384	4.84219	5.84551	6.84608	7.84625				
$^2P_2$ T		90672	39310	23485	15451	10951	8163				
$n^\times$		2.20024	3.34161	4.32327	5.33002	6.33112	7.33300				
Δ		9123	3672	853	362	201	158				
$^2P_1$ T		99795	42982	24338	15813	11152	8321				
$n^\times$		2.09726	3.19568	4.24682	5.26867	6.27379	7.26305				
$^2D_3$ T			45737	25702	16582	11585	8570.5	6600.4	5233		
$n^\times$			3.09794	4.13262	5.14504	6.15544	7.15655	8.15496	9.1587		
Δ			560	254	136	68	49.5	26.4	19.8		
$^2D_2$ T			46297	25956	16718	11653	8620	6626.8	5252.8		
$n^\times$			3.07915	4.11235	5.12406	6.13742	7.13590	8.13870	9.13877		
$^2F_4$ T				28128	18012.5	12487	9152.7	6990	5512		
$n^\times$				3.95037	4.93651	5.92896	6.9250	7.9244	8.9239		
Δ				−257	−82.5	−19	−3.4	+1			
$^2F_3$ T				27871	17930	12468	9149.3	6991			
$n^\times$				3.96854	4.94786	5.93346	6.92648	7.9239			
^2G T					(17614)	12237.6	8986.6	6878.3	5432.65	4399.6	3635.0
$n^\times$					(4.9920)	5.98906	6.98891	7.98853	8.98878	9.98851	10.9889
^2H T									5431	4398	
$n^\times$									8.990	9.990	

Nach Bohr und Paulis Prinzip sind die tiefsten Terme der S-, P-, D-, H-Reihen der wahren Hauptquantenzahl $n = 6$ zuzuordnen, während die F- und G-Reihen mit $n = 5$ beginnen. Außer diesen Termen des Dubletspektrum kommen folgende Terme vor:

Ein Dublet-D-Term (metastabiler Zustand): $^\times D_3 = 115766$, $\Delta = 15038$, $^\times D_2 = 100728$

4 P-Terme: $Y = 45194\ (P_2)$, $n^\times = 3.11650$; $Z = 47410\ (P_1)$, $n^\times = 3.04279$; $X = 42091\ (P_2)$, $n^\times = 3.22933$; $U = 44987\ (P_1)$, $n^\times = 3.12366$

2 D-Terme: $B = 29094\ (D_2)$, $A = 15014\ (D_3)$

Ein F-Term: $C = 29320\ (F_3)$

Weitere Kombinationen des $^{\times}D_3$-Terms mit anderen S-Termen sind nicht vorhanden, obwohl solche nach der Stärke von 2815 zu erwarten wären, wenn es sich um reguläre Kombinationen handeln würde.

Die Linie ist um so stärker, je reiner die Heliumatmosphäre ist, in der Spuren von Quecksilberdampf leuchten, was mit hohem Heliumdruck (1 mm) und schwachem Strom (0.01 Amp.) am besten erreicht wurde. Dann wird die Intensität vergleichbar mit derjenigen der starken Linie 2848. Sie ist ganz schwach in reinem Quecksilberdampf und fehlt bei der Anordnung von STILES.

Das Niveau $^{\times}D_3$ ist das zweittiefste und es ist metastabil. Es folgt, daß die negative Glimmschicht der Zylinderkathode in Helium, von der meine früheren Untersuchungen zeigten, daß sie ein außerordentlich ungestörtes Leuchtphänomen darbietet, indem spärliche Fremdatome zu regelmäßiger Emission hoher Serienglieder gelangen, in weitergehendem Maße störungsfrei sein muß: Der metastabile Atomzustand $^2D_{5/2}$ kann sich in ihr ausleben, bis seine Umwandlung in den stabilen Zustand $1\,^2S_{1/2}$ unter Lichtemission vor sich geht. Im Hinblick auf die Deutung der Nebellinien durch J. S. BOWEN oder der ähnlichen der Nordlichtlinie durch L. A. SOMMER[1] als Übergang von metastabilen Atomzuständen aus ergibt sich aus dem Befund im Hg II-Spektrum eine experimentelle Anordnung zur Prüfung derartiger Phänomene. Die Verstärkung der Nordlichtlinie in dem positiven Lichte einer Argon-Glimmlichtentladung in den Experimenten MC LENNANS würde allerdings dafür sprechen, daß das Edelgas wichtiger ist als das Fehlen elektrischer Felder. Wenn man weiter berücksichtigt, daß nach MC LENNAN für die Anregung dieser Sauerstofflinie Argon wirksamer ist als Neon oder Helium, so müssen die im folgenden erörterten Verhältnisse ebenfalls eine Rolle spielen[2].

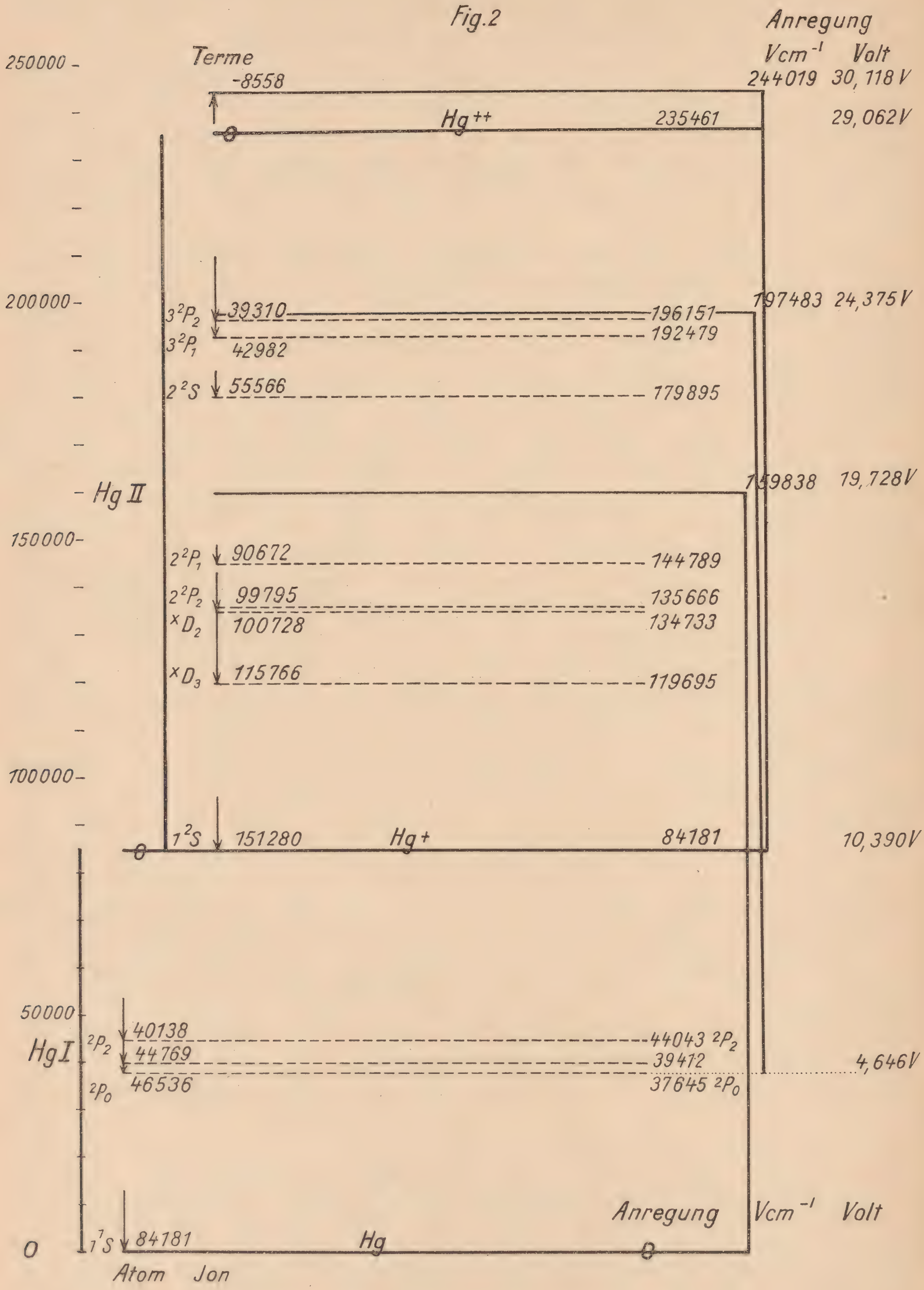
Außer 6149 wird in Helium auch die Linie 7945 auffallend verstärkt. Ferner ist die Intensität der Linien 923.3 und 893.1, welche in reinem Hg-Dampf nicht untersucht wurden, eine auffallend große. Fig. 2 gibt ein Diagramm der Anregung des Hg-Atom durch die Umwandlungsspannung von 19.728 Volt oder $\nu = 159838\ \mathrm{cm}^{-1}$ des Heliums. Der untere Teil betrifft die Anregung des neutralen Hg-Atoms, der obere die des Ions Hg^+. Links sind die Termwerte in üblicher Weise gegeben. Die Terme von Hg I rechnen von der Linie 0, Hg^+ an nach unten, diejenigen von Hg II von Hg^{++} an nach unten, und zwar letztere nur bis zur Linie Hg^+. Rechts ist eine fortlaufende Zählung der Anregungen in cm^{-1} oder in Volt gegeben, indem das neutrale Atom der Anregung 0, Hg^+ derjenigen $1\,^1S_0$ des Bogenspektrums und Hg^{++} der Summe $1\,^1S_0$ des Bogen- und $1\,^2S_{1/2}$ des Funkenspektrums zu-

---

[1] L. A. SOMMER, Die Naturwiss. 16, S. 219, 1928.

[2] Eine Linie $1S - {}^{\times}D_2 = 50552\ \mathrm{cm}^{-1}$ $\lambda_L = 1978.806$ ist nicht gefunden. Die Linie $\lambda_L = 1978.258$ der Tabelle kann es nicht sein. Das Spektralgebiet ist ungünstiger, die Linie ist theoretisch um $^1/_3$ schwächer als 2815, und die Versuche sind hier nicht so weitgehend variiert wie im Gebiete der Linie 2815. Der negative Befund beweist daher nicht, daß die Linie nicht auftritt. Auch das Niveau $^{\times}D_2$ ist metastabil und um $15038\ \mathrm{cm}^{-1}$ entsprechend 1.8560 Volt höher als $^{\times}D_3$. Eine Umwandlung des ersteren in das letztere, etwa durch die Wärmebewegung, dürfte daher kaum anzunehmen sein.

Fig. 2


Anregung
Vcm⁻¹ Volt
Terme
250000
-8558
244019 30,118 V
Hg++
235461
29,062 V
200000
3²P₂ 39310
196151
197483 24,375 V
3²P₁ 42982
192479
2²S 55566
179895
Hg II
149838 19,728 V
150000
2²P₁ 90672
144789
2²P₂ 99795
135666
ˣD₂ 100728
134733
ˣD₃ 115766
119695
100000
1²S 151280
Hg+
84181
10,390 V
0
50000
HgI
²P₂ 40138
44043 ²P₂
²P₂ 44769
39412
4,646 V
²P₀ 46536
37645 ²P₀
Anregung
Vcm⁻¹ Volt
0
1¹S 84181
Hg
Atom Jon

geordnet ist. Es ist also gemäß der vorjährigen Erörterung[1] angenommen, daß eine Anregung über den Ionenzustand hinaus ohne Verlust zur Wirkung kommt.

Wir haben 3 verschiedene Anregungsmöglichkeiten: 1. vom Zustand Hg des neutralen Atoms aus, 2. vom angeregten metastabilen Zustand $2\,p_0$ des Atoms aus. Dieser muß bei der großen Strahlungsdichte der Linie 2537 $\nu = 1\,{}^1S_0 - 2\,{}^3P_1$ im leuchtenden Volum sehr häufig sein, 3. vom Zustand des Ions Hg^+ aus. In der Figur ist der Betrag der Anregung 19.728 Volt oder $\nu = 159838$ rechts eingetragen.

1. Vom neutralen Atom aus entstehen nur die Zustände $2\,{}^2P_i$ und ${}^\times D_j$ des Funkenspektrum. 2. Vom Zustand $2\,p_0$ aus reicht die Anregung bis kurz über die Terme $3\,P_i$ des Funkenspektrum, welche eingetragen sind. Mit einbegriffen werden noch der Term $2\,{}^2S$, welcher eingetragen ist, und die Terme X, Y, Z, U und $3\,D_i$, aber von den bekannten keine weiteren. Das sind 12 Terme, welche untereinander und mit den 5 noch tieferen Termen $2\,P_i$, ${}^\times D_j$ und $1\,S$ im ganzen mit Einschluß von 2815 41 Linien geben, auf die sich die Energie verteilt. Erst 3. die Anregung vom Zustande Hg^+ aus führt um $\nu = 8558$ über die normale (tiefste) Ionisationsgrenze Hg^{++} hinaus und gibt zur Emission des gesamten zu dieser Grenze gehörigen Dubletspektrums Anlaß. Dieser Vorgang ist in Helium seltener als die Anregung von den niederen Zuständen aus. Im Glimmlicht des reinen Hg-Dampfes liegt kein derartiger Energieanregungsbetrag fest wie in Helium, weil die primären Elektronen sämtlich zur Verfügung stehen. Die Anregung in reinem Helium geht im Glimmlicht ja bis jenseits 400000 cm^{-1}, wie aus dem Auftreten der Heliumfunkenlinien folgt. Trotzdem betrifft diese Anregung hier nur die Heliumatome, nicht aber die spärlich vertretenen Fremdatome. Letztere werden vielmehr merklich nur durch die in der Mehrzahl vorhandenen Elektronen angeregt. Diese haben die Energie der Umwandlungsspannung. In reinem Hg-Dampf geht also die Anregung durch primäre Elektronen weiter bis zum Potential des Kathodenfalles und verteilt sich auch auf die Hunderte von Linien, welche von höheren Niveaus als $3\,P_i$ ausgehen, läßt dafür aber nicht so viel Energie für die niederen Niveaus übrig wie im Falle 2. Denn bei gleicher Belastung der Röhre ist die in Licht umgesetzte Energie nahe gleich in beiden Fällen. In Helium sind die Linien $3\,D_i - 4\,F_j$ im Glimmlicht schwach, im Dunkelraum und nahe der Kathodenwand stark. In reinem Hg-Dampf sind sie im Glimmlicht stärker als 6149.

In der Heliumatmosphäre muß 4. auch eine Anregung vom metastabilen Niveau ${}^\times D_3$ aus stattfinden, welches in einem Zuge vom Niveau Hg aus angeregt wird und viele Atome betrifft. Diese Anregung durch die Heliumspannung führt bis zum Term -44072 über das Niveau Hg^{++} hinaus und wird daher den größten Teil des Spektrum Hg II betreffen, welcher höher angeregten Ionen als Hg^{++} als Grenzen zugeordnet ist. Im reinen Hg-Dampf sind diese und noch weitergehende Anregungen natürlich ohne weiteres gegeben, wie im Falle reinen Heliums.

---

[1] F. PASCHEN, Sitzungsber. Berl. Akad. 29, S. 207, 1927.

Man könnte bei den vom $3\,P_i$-Niveau ausgehenden Linien an eine Verstärkung durch Resonanz denken: ähnlich dem von B. H. Beutler und B. Josephy[1] beobachteten Verstärkungsphänomen. Aber die verfügbare Energie ist doch um $^1/_2$ bezugsweise $2^1/_2$ Prozent größer, als für $3\,P_i$ nötig, während bei jenen Versuchen genaue Übereinstimmung herrscht. Die hier und früher diskutierten Vorgänge der Anregung durch metastabile Edelgasatome scheinen nicht durch sogenannte Stöße II. Art vermittelt zu werden, sondern durch Elektronen, deren Energie nicht über die Umwandlungsenergie steigen kann. Die Mehrzahl der Elektronen in den leuchtenden Teilen der Glimmentladung in Helium ist dieser Bedingung unterworfen.

[1] B. H. Beutler und B. Josephy, Die Naturwiss. 15, S. 540, 1927.

Ausgegeben am 13. Februar 1929.

SITZUNGSBERICHTE
DER PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
1928

XXXIII. Gesamtsitzung. 20. Dezember.

Vorsitzender Sekretar: Hr. Lüders.

1. Hr. Joh. Stumpf sprach über schnellaufende Kompressoren.

Zuerst wurde der jetzige Entwicklungsstand dieser Maschinenart und dann eine neue vom Redner entwickelte Konstruktion besprochen, welche eine Drehzahl von 1500 pro Min. und eine Kostenverminderung der Gesamtanlage bis zu 50% zuläßt.

2. Hr. Guthnick überreichte den 9. Band der 1. Abt. der »Geschichte des Fixsternhimmels« (Karlsruhe 1928).

3. Vorgelegt wurde der 2. Überleitungsband des »Deutschen Biographischen Jahrbuches« 1917—1920 (Stuttgart, Berlin und Leipzig 1928).

4. Endlich wurde vorgelegt: der 4. Fasc. des Supplementbandes der mit Unterstützung der Akademie erschienenen »Opuscula Ichneumonologica« von Prof. Dr. Otto Schmiedeknecht (Blankenburg i. Thür. 1928).

5. Das korrespondierende Mitglied Hr. Wilhelm Ostwald in Groß-Bothen bei Leipzig hat am 19. Dezember das fünfzigjährige Doktorjubiläum gefeiert. Die Akademie hat ihm eine Adresse gewidmet, welche in diesem Stück abgedruckt ist.

6. Zu wissenschaftlichen Zwecken hat die Akademie bewilligt:

durch die Gesamtakademie:

2400 *RM* für die Fortführung der Leibniz-Ausgabe,

2000 *RM* für die Fortführung des Biographischen Jahrbuches;

durch die phys.-math. Klasse:

150 *RM* zur Fortsetzung der Untersuchungen des Hrn. Dr. Fritz Levy in Berlin auf dem Gebiet der Zellteilungsphysiologie;

durch die phil.-hist. Klasse:

420 *RM* für die Fortführung der Arbeiten am Index zum Ibn Saad,

2000 *RM* als Sonderzuschuß für die Arbeiten der Deutschen Kommission,

800 *RM* als Sonderzuschuß zu den Arbeiten der Orientalischen Kommission,

2000 *RM* für die Arbeiten des Hrn. Dr. Ernst Stein über das »Militärwesen des römischen Reiches«.

7. Hr. Rudolf Stumpf, Lektor für Zeichnen an der Universität Berlin, hat der Akademie eine Bildniszeichnung des Hrn. von Wilamowitz-Moellendorff als Geschenk überwiesen.

Adresse an Hrn. Wilhelm Ostwald zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 19. Dezember 1928.

Hochverehrter Herr Jubilar!

Zu Ihrem fünfzigjährigen Doktorjubiläum sendet die Preußische Akademie der Wissenschaften Ihnen als ihrem korrespondierenden Mitgliede die herzlichsten Glückwünsche. Sie begehen diese Feier in der Stille, die Sie sich dadurch verschafft haben, daß Sie sich bereits vor 22 Jahren, also ungewöhnlich früh, auf Ihren Landsitz zurückzogen, freilich nicht in der Absicht, um damit zugleich Ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit zu entsagen, vielmehr, um frei von allen äußeren Bindungen sich ihr um so ungestörter widmen zu können. Ihr damaliger Entschluß wurde in weiten Kreisen auf das lebhafteste bedauert, aber es liegt lediglich in Ihrer Entscheidung, ob Sie damit das Richtige getroffen haben. Wie dem auch sei, fest steht, daß Sie auch, der unmittelbaren täglichen Anregung gleichstrebender Kollegen entbehrend und ohne über die Hilfsmittel eines großen Laboratoriums mit seinen vielen Assistenten zu verfügen, fortlaufend durch zahlreiche Bücher, Leitung und Neubegründung von Zeitschriften, schließlich auch durch experimentelle Untersuchungen wieder und immer wieder die Augen der Mitwelt auf Ihr stilles Tuskulum gelenkt haben; es sei nur des Erscheinens Ihrer Selbstbiographie und Ihrer experimentellen Bearbeitung der praktischen Farbenlehre gedacht.

Als Sie vor fünfzig Jahren promoviert wurden, waren Sie bereits mitten in der Tätigkeit, der Sie während der folgenden Jahrzehnte Ihre gesamte Kraft mit so großem Erfolge widmeten, nämlich dem Aufbau der physikalischen Chemie. Als Sie im Jahre 1887 als noch junger Rigenser Professor nach Leipzig berufen wurden, hatten Sie bereits die erste Auflage Ihres großen Lehrbuchs der allgemeinen Chemie geschrieben, das der Forschung auf dem Gebiete der physikalischen Chemie klar vorgezeichnete Bahnen wies, indem Sie nicht nur die bereits vorliegenden, aber vielfach wenig beachteten Leistungen kritisch in lichtvoller Darstellung zusammenfaßten, sondern vor allem auch die vorhandenen Lücken aufdeckten. Mit einer verhältnismäßig kleinen Zahl von Mitarbeitern in verschiedenen Ländern wurde diese Aufgabe in Angriff genommen und, wie man wohl sagen darf, in vieler Hinsicht hin abschließend gelöst. Wenn heute Ihre Forschungsergebnisse und diejenigen Ihrer damaligen Mitarbeiter zwar täglich benutzt, aber nur selten noch ausdrücklich zitiert werden, so beweist dies am besten, wie sehr die physikalisch-chemische Forschung jener Zeit mit dem lebendigen Organismus der gesamten Naturwissenschaft verwachsen

ist. Als von Ihnen die Leipziger Professur übernommen und damit zugleich als eine Professur der physikalischen Chemie begründet wurde, war sie fast ein Unikum, und von den Privatdozenten, die aus Ihrer Schule hervorgingen, fragte damals manch älterer Kollege mit bedauerndem Kopfschütteln: »Was soll aus diesen armen jungen Leuten werden!« Heute gibt es in der ganzen Welt kaum mehr eine größere Pflegestätte der Naturforschung, in der nicht die physikalische Chemie durch besondere Lehrkräfte vertreten ist, und auch die chemische Großindustrie benutzt die Methoden der physikalischen Chemie gegenwärtig mit allergrößtem Erfolge und in allergrößtem Maßstabe. Ihre von Ihnen kurz vor Ihrer Leipziger Berufung begründete führende Zeitschrift für physikalische Chemie spiegelt in seltener Vollkommenheit das geistige Ringen wider, das zu dem heutigen Zustande geführt hat.

Dabei war aber wohl selten ein Forscher so frei von dem Vorwurf einseitiger Spezialisierung; haben Sie doch in unermüdlichem Arbeitsdrange der Malerei, der Naturphilosophie und zahlreichen organisatorischen Fragen einen guten Teil Ihrer Zeit gewidmet. Inwieweit Sie dabei auf die Zustimmung Ihrer Zeitgenossen stießen, konnte Sie kalt lassen, denn Sie übten nur Ihr wohlerworbenes Recht aus, zu allen Fragen öffentlich Stellung nehmen zu dürfen, die Sie gerade bewegten.

Gefesselt durch die Kunst Ihrer Darstellung hat wohl mancher Ihrer Mitarbeiter und Schüler geäußert, daß Sie auch als Schriftsteller, wenn Sie diese Laufbahn gewählt hätten, es weit gebracht hätten, insbesondere als Humorist. Möge Ihr Sinn für Humor auch Ihre künftigen Lebensjahre mit seinen goldenen Fäden durchziehen!

Die Preußische Akademie der Wissenschaften.

Ausgegeben am 13. Februar 1929.

NAMEN- UND SACHREGISTER.

Adressen: an Hrn. Erman zum 50jährigen Doktorjubiläum. 21. 22–24. — an Hrn. Brandl zum 50jährigen Doktorjubiläum. 156. 157–158. — zur dreihundertjährigen Gedenkfeier für William Harvey. 216. 222. — an Hrn. Penck zum 50jährigen Doktorjubiläum. 246. 247–248. — an Hrn. Rubner zum 50jährigen Doktorjubiläum. 302. 443–444. — an Hrn. Ostwald zum 50jährigen Doktorjubiläum. 547. 548–549.

Anatomie: Bewegungsumfang im Schultergelenk, von Fick. 53–73. — Zur Geschichte des Ohrskelettes der Wale, von Pompeckj. 125. — Beobachtungen am Orangkehlsack, von Fick. 223. 445–447. — Zur Augenentwicklung der Beuteltiere, von Keibel. 271. 272–279.

Astronomie: Geschichte des Fixsternhimmels. XXVII–XXVIII. XLIII–XLIV. 302. — Über die Abhängigkeit der Form der Sonnenkorona von der Sonnenfleckenhäufigkeit, von Ludendorff. 184. 185–214. — Über die Berücksichtigung der Extinktion bei lichtelektrischen Messungen, von Guthnick. 249. 250–257. — Bericht über den Stand der Vorbereitungen zur photographischen Überwachung des Himmels, von Guthnick. 249. 258–269. — Die Geschichte des Nebels Barnard 86, von Hagen. 460. 482–485.

Berliner, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CXXXIX–CXL.

Bieberbach, Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. Mit Schur. 509. 510–535.

Biographisches Jahrbuch, Deutsches: Bericht. LXVI. — Geldbewilligung. 302. 547.

Bjerknes, Vilhelm, zum korrespondierenden Mitglied gewählt. 156.

Bodenstein, Über Kettenreaktionen. 475. 490–497.

Bonhoeffer, Über Benutzung der Bandenspektroskopie zur Deutung der Vorgänge in Flammen. Mit Haber. 86.

Botanik: Das Pflanzenreich. XLIII. 86. 246. 508. — Flora von Papuasien und Mikronesien. LXV. I. — Über Selbststerilität bei den höheren Pflanzen, von Correns. 92. — Zur Entwicklungsphysiologie des Periderms, von Haberlandt. 301. 317–338. — Die Lage des Zellkerns in der Eizelle der Angiospermen und ihre physiologische Bedeutung, von Haberlandt. 449. 450–456.

Branca, gestorben. 94.

—, Gedächtnisrede auf ihn von Pompeckj. CXIV–CXXXVII.

Brauer, Über Sequenzen von Potenzresten. 2. 9–16.

Brouwer, Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. 47. 48–52.

Chemie: Photolyse von Jodwasserstofflösungen in Hexan und in Wasser, nach Versuchen mit Hrn. Dr. W. Rump, von Warburg. 2. — Über Benutzung der Bandenspektroskopie zur Deutung der Vorgänge in Flammen, von Haber und Bonhoeffer. 86. — Über die Wertigkeiten des Kohlenstoffs, von Schlenk. 156. — Nitrit-Nitratbildungen aus Ammoniak und Sauerstoff an alkalischen Oberflächen, von Hofmann. 460. 461–465. — Über Kettenreaktionen, von Bodenstein. 475. 490–497. — Über Zündung des Knallgases durch Wasserstoffatome, von Haber und von Schweinitz. 498. 499–506.

Correns, Über Selbststerilität bei den höheren Pflanzen. 92.

Curtius, gestorben. 47.

Dörge, Über den Fundamentalsatz der Algebra. 86. 87–89.

Dollo, Louis, zum korrespondierenden Mitglied gewählt. 156.

Einstein, Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus. 215. 217–221.

—, Neue Möglichkeiten für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. 223. 224–227.

Engler, Bericht über das »Pflanzenreich«, XLIII.

—, Bericht über die Bearbeitung der »Flora von Papuasien und Mikronesien«. LXV.

Exner-Ewarten, Felix, zum korrespondierenden Mitglied gewählt. 156.

Festreden: Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Geburtstages König Friedrichs II., von Planck. XVII–XXIII. XXXVII–XXXVIII. — Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages, von Rubner. LXVII–CVII. — Untergang und Wiedererstehen antiker Kulturdenkmäler, von Wiegand. XXIX–XXXVII.

Fick, Bewegungsumfang im Schultergelenk, 53–73.

Fick, Beobachtungen am Orangkehlsack. 223. 445–447.
von Ficker, Bemerkungen über die meteorologischen Verhältnisse Teneriffas. 301. 303–316.
Fixsternhimmel, Geschichte desselben: Bericht. XXVII–XXVIII. XLIII–XLIV. Veröffentlichung. 302.
Flora von Papuasien und Mikronesien: Bericht. LXV.
Fraenkel, Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen. 86. 90–91.
Gedächtnisreden: auf Hermann Abert, von Petersen. CVII–CXIV. — auf Wilhelm Branca, von Pompeckj. CXIV–CXXXVII.
Geldbewilligungen: Biographisches Jahrbuch. 302. 547. — Leibniz-Ausgabe. 547. — Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 93. — Nomenclator animalium generum et subgenerum. 216. — Flora von Papuasien. 1. — Für die Arbeiten an der mathematischen Bibliographie des Hrn. Dr. Valentin. 1. 93. — Für die Opuscula Ichneumonologica des Hrn. Prof. Schmiedeknecht. 1. 246. — An Hrn. Nernst zum Bau eines Dynamometers. 147. — An Hrn. Dr. Woldstedt zum Studium der Glazialfragen in Nordamerika. 147. — Für Arbeiten des Hrn. Dr. Louis im Piringebirge in Bulgarien. 147. — Für eine Forschungsreise des Hrn. Dr. Rensch nach Java. 216. — Für eine Forschungsreise des Hrn. Dr. Drescher nach Westgrönland. 302. — Für eine Studienreise des Frl. Prof. Dr. Rhoda Erdmann nach Neapel. 459. — Für die Arbeiten des Hrn. Dr. Levy auf dem Gebiet der Zellteilungsphysiologie. 547.
Geographie: Geldbewilligung an Hrn. Dr. Woldstedt zum Studium der Glazialfragen in Nordamerika. 147. — Geldbewilligung für Arbeiten des Hrn. Dr. Louis im Piringebirge in Bulgarien. 147. — Das Felsengebirge im westlichen Nordamerika, von Penck. 25. — Die Ursachen der Eiszeit, von Penck. 76–85.
Geologie: Geldbewilligung an Hrn. Dr. Woldstedt zum Studium der Glazialfragen in Nordamerika. 147. — Geldbewilligung für eine Forschungsreise des Hrn. Dr. Drescher nach Westgrönland. 302. — Die Ursachen der Eiszeit, vou Penck. 76–85.
Güterbock, erhält die goldene Leibniz-Medaille. CXXXIX.
Guthnick, Bericht über »Die Geschichte des Fixsternhimmels«. XXVII–XXVIII. XLIII–XLIV.
—, Über die Berücksichtigung der Extinktion bei lichtelektrischen Messungen. 249. 250–257.
—, Bericht über den Stand der Vorbereitungen zur photographischen Überwachung des Himmels. 249. 258–269.
Haber, Über Benutzung der Bandenspektroskopie zur Deutung der Vorgänge in Flammen. Mit Bonhoeffer. 86.
—, Über Zündung des Knallgases durch Wasserstoffatome. Mit von Schweinitz. 498. 499–506.
Haberlandt, Zur Entwickelungsphysiologie des Periderms. 301. 317–338.
—, Die Lage des Zellkerns in der Eizelle der Angiospermen und ihre physiologische Bedeutung. 449. 450–456.
Hagen, Die Geschichte des Nebels Barnard 86. 460. 482–485.
Hahn, Über Elemente und Atomarten der letzten Reihe des Periodischen Systems. 449.
Hammerstein, über die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen. 2–3. 17-20.
Hesse, Bericht über »Das Tierreich« und den »Nomenclator animalium generum et subgenerum«. XLII–XLIII.
Hofmann, Nitrit-Nitratbildung aus Ammoniak und Sauerstoff an alkalischen Oberflächen. 460. 461–465.
Hopf, Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern. 148–149. 233–245.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathemathik: Geldbewilligung. 93.
Joffé, Abraham, zum korrespondierenden Mitglied gewählt. 246.
Johnsen, Über die Farbe von Mineralien, besonders von Edelsteinen. 246.
Kamke, Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes und stetige Winkelfunktionen. 95. 283–299.
Keibel, Zur Augenentwicklung der Beuteltiere. 271. 272–279.
Koebe, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, zweite und dritte Mitteilung. 301. 345–384. 385–442.
Landau, Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante. Zweite Abhandlung. 301. 339–344.
von Laue, Neuere Untersuchungen über die Beugung des Lichtes. 126.
Leibniz-Ausgabe: Bericht XLIV. — Geldbewilligung. 547. — Veröffentlichung. 246.
Leibniz-Medaille: Verleihung. CXXXIX–CXL.
Leitzmann, erhält die silberne Leibniz-Medaille. CXL.
Literaturzeitung, Deutsche: Bericht. XLV.
Lorentz, gestorben. 47.
Ludendorff, Über die Abhängigkeit der Form der Sonnenkorona von der Sonnenfleckenhäufigkeit. 184. 185–214.
Marchand, gestorben. 47.
Mathematik: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 93. — Herausgabe der Werke von Weierstrass. XL. 125. — Geldbewilligung für die Arbeiten an der mathematischen

Bibliographie des Hrn. Dr. Valentin. 1. 93. — Über Sequenzen von Potenzresten, von Brauer. 2. 9–16. — Über die Vollständigkeitsrelation in der Theorie der fastperiodischen Funktionen, von Hammerstein. 2–3. 17–20. — Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche, von Reinhardt. 25. 26–46. — Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, von Brouwer. 47. 48–52. — Über den Fundamentalsatz der Algebra, von Dörge. 86. 87–89. — Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen, von Fraenkel. 86. 90–91. — Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül, von Pólya. 95. 96–99. — Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, von Schur. 95. 100–124. — Verallgemeinerungen des Jordanschen Kurvensatzes und stetige Winkelfunktionen, von Kamke. 95. 283–299. — Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope, von Reinhardt. 126. 150–155. — Über die Charliersche Entwicklung einer »arithmetischen Verteilung« nach den sukzessiven Differenzen der Poissonschen asymptotischen Darstellungsfunktion für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse, von Schmidt. 148. — Eine Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete, von Pólya. 148. 228–232. 271. 280–282. — Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern, von Hopf. 148–149. 233–245. — Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus, von Einstein. 215. 217–221. — Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante. Zweite Abhandlung, von Landau. 301. 339–344. — Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, zweite und dritte Mitteilung, von Koebe. 301. 345–384. 385–442. — Verallgemeinerung des ersten Bieberbachschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete, von Szegö. 475. 477–481. — Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen, von Bieberbach und Schur. 509. 510–535.

Meteorologie: Bemerkungen über die meteorologischen Verhältnisse Teneriffas, von von Ficker. 301. 303–316.

Mineralogie: Über die Farbe von Mineralien, besonders von Edelsteinen, von Johnsen. 246.

Nernst, Über die Berechnung der elektrolytischen Dissoziation aus der elektrischen Leitfähigkeit. 2. 4–8.

Nomenclator animalium generum et subgenerum: Bericht. XLII–XLIII. — Geldbewilligung. 216. — Veröffentlichung. 86. 458.

Ostwald, Adresse an ihn zum 50jährigen Doktorjubiläum. 547. 548–549.

Paläontologie: Zur Geschichte des Ohrskelettes der Wale, von Pompeckj. 125.

Paschen, Das erste Funkenspektrum des Quecksilbers Hg II. 487.

Penck, Das Felsengebirge im westlichen Nordamerika. 25.

—, Die Ursachen der Eiszeit. 76–85.

—, Adresse an ihn zum 50jährigen Doktorjubiläum. 246. 247–248.

Pflanzenreich: Bericht. XLIII. — Veröffentlichung. 86. 246. 508.

Physik: Geldbewilligung an Hrn. Nernst zum Bau eines Dynamometers. 147. — Über die Berechnung der elektrolytischen Dissoziation aus der elektrischen Leitfähigkeit, von Nernst. 2. 4–8. — Über Benutzung der Bandenspektroskopie zur Deutung der Vorgänge in Flammen, von Haber und Bonhoeffer. 86. — Neuere Untersuchungen über die Beugung des Lichtes, von von Laue. 126. — Neue Möglichkeiten für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität, von Einstein. 223. 224–227. — Über Elemente und Atomarten der letzten Reihe des Periodischen Systems, von Hahn. 449. — Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus, von Weitzenböck. 449. 466–474. — Das erste Funkenspektrum des Quecksilbers Hg II, von Paschen. 487. — Neuere Beobachtungen über die Ausbreitung von kurzen elektrischen Wellen, von Wagner. 498.

Physiologie: Geldbewilligung für Arbeiten des Hrn. Dr. Levy auf dem Gebiete der Zellteilungsphysiologie. 547. — Der Kampf des Menschen um das Leben, von Rubner. LXVIII–CVII. — Die Welternährung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft, von Rubner. 21. 159–183. — Über die physiologische Bedeutung wichtiger Bestandteile der Vegetabilien mit besonderer Berücksichtigung des Lignins, von Rubner. 127–145. — Zur Entwickelungsphysiologie des Periderms, von Haberlandt. 301. 317–338. — Die Lage des Zellkerns in der Eizelle der Angiospermen und ihre physiologische Bedeutung, von Haberlandt. 449. 450–456.

Planck, Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Jahrestages König Friedrichs II. XVII–XXIII. XXXVII–XXXVIII.

—, Bericht über die Werke von Weierstrass. XL.

Pólya, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül. 95. 96–99.

—, Eine Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. 148. 228–232. 271. 280–282.

Pompeckj, Gedächtnisrede auf Wilhelm Branca. CXIV–CXXXVII.
—, Zur Geschichte des Ohrskelettes der Wale. 125.
Preisaufgaben: Ellersches Legat. CXXXVII–CXXXVIII. — von Miloszewskisches Legat. CXXXVIII–CXXXIX.
Reinhardt, Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche. 25. 26–46.
—, Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope. 126. 150–155.
Rubner, Ansprache, gehalten in der öffentlichen Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages. LXVII–CVII.
—, Der Kampf des Menschen um das Leben. LXVIII–CVII.
—, Die Welternährung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. 21. 159–183.
—, Über die physiologische Bedeutung wichtiger Bestandteile der Vegetabilien mit besonderer Berücksichtigung des Lignins. 127–145.
—, Adresse an ihn zum 50jährigen Doktorjubiläum. 302. 443–444.
Rutherford, Ernest, zum korrespondierenden Mitglied gewählt. 216.
Schlenk, Über die Wertigkeiten des Kohlenstoffs. 156.
Schmidt, Über die Charliersche Entwicklung einer »arithmetischen Verteilung« nach den sukzessiven Differenzen der Poissonschen asymptotischen Darstellungsfunktion für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. 148.
Schur, Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppen. 95. 100–124.
—, Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. Mit Bieberbach. 509. 510–535.
von Schweinitz, Über Zündung des Knallgases durch Wasserstoffatome. Mit Haber. 498. 499–506.
Stumpf, Johannes, Über schnellaufende Kompressoren. 547.
Szegö, Verallgemeinerung des ersten Bieberbachschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. 475. 477–481.
Technik: Plan eines Fernsprechkabels von Europa nach Nordamerika, von Wagner. 75. — Neuere Beobachtungen über die Ausbreitung von kurzen elektrischen Wellen, von Wagner. 498. — Über schnellaufende Kompressoren von Joh. Stumpf. 547.
Tierreich: Bericht. XLII–XLIII. Veröffentlichung. 270.
Todesanzeigen: Lorentz. 47. — Marchand, 47. — Curtius. 47. — Branca. 94. — Wiechert. 125. — Wien. 459.
Wagner, Plan eines Fernsprechkabels von Europa nach Nordamerika. 75.
—, Neuere Beobachtungen über die Ausbreitung von kurzen elektrischen Wellen. 498.
Wahl: korrespondierender Mitglieder: Exner-Ewarten. 156. — Bjerknes. 156. — Dollo. 156. — Rutherford. 216. — Joffé. 246.
Warburg, Photolyse von Jodwasserstofflösungen in Hexan und in Wasser, nach Versuchen mit Hrn. Dr. W. Rump. 2.
Weierstrass: Herausgabe seiner Werke: Bericht. XL. — Veröffentlichung. 125.
Weitzenböck, Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus. 449. 466–474.
Wentzel-Stiftung: Bericht. LXI–LXVI.
Wiechert, gestorben. 125.
Wien, gestorben. 459.
Zoologie: Das Tierreich. XLII–XLIII. 270. — Nomenclator animalium generum et subgenerum. XLII–XLIII. 86. 216. 458. — Geldbewilligung für die Opuscula Ichneumonologica des Hrn. Prof. Schmiedeknecht. 1. 246. — Geldbewilligung für eine Forschungsreise des Hrn. Dr. Rensch nach Java. 216. — Geldbewilligung für eine Studienreise des Frl. Prof. Rhoda Erdmann nach Neapel. 459. — Zur Geschichte des Ohrskelettes der Wale, von Pompeckj. 125. — Beobachtungen am Orangkehlsack, von Fick. 223. 445–447. — Zur Augenentwicklung der Beuteltiere, von Keibel. 271. 272–279.

Ausgegeben am 13. Februar 1929.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

§ 17.

Eine für die akademischen Schriften bestimmte wissenschaftliche Mitteilung darf in keinem Falle vor ihrer Ausgabe an jener Stelle anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Sollte eine dem zuwiderlaufende Veröffentlichung dem redigierenden Sekretar vor der Ausgabe in den akademischen Schriften zur Kenntnis kommen, so hat er die Mitteilung aus diesen zu entfernen.

Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mitteilung dieselbe anderweitig früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies nach den geltenden Rechtsregeln zusteht, so bedarf er dazu der Einwilligung der Gesamtakademie.

Gedächtnisreden anderweitig zu veröffentlichen, ist den Verfassern unbeschränkt gestattet.

Aus § 21.

Die Sitzungsberichte erscheinen in einzelnen Stücken in der Regel Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.

Aus § 22.

Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mitteilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

Hinter den Titeln der wissenschaftlichen Mitteilungen folgen in dieser Übersicht kurze Inhaltsangaben derselben, welche die Verfasser einreichen, und für welche sie verantwortlich sind. Diese Inhaltsangaben sollen sich in der Regel auf 5—6 Druckzeilen beschränken, keinesfalls 10 Zeilen überschreiten.

Die nicht in den Schriften der Akademie erscheinenden Mitteilungen werden mit vorgesetztem Stern bezeichnet, bei den für die Abhandlungen bestimmten wird »(Abh.)« zugefügt.

Wissenschaftliche Mitteilungen fremder Verfasser werden in dem Bericht über diejenige Sitzung aufgeführt, in welcher deren Aufnahme in die akademischen Schriften endgültig beschlossen wird.

Aus § 27.

Das Manuskript einer in einer akademischen Sitzung am Donnerstag zur Aufnahme in die Sitzungsberichte zugelassenen Mitteilung, welche am nächsten Donnerstag gedruckt erscheinen soll, muß der Regel nach in der Sitzung selber, spätestens bis Freitag 10 Uhr morgens, dem redigierenden Sekretar oder der Reichsdruckerei druckfertig zugestellt werden. Später eingereichte Manuskripte werden, mit dem Präsentationsvermerk des redigierenden Sekretars oder des Archivars versehen, für ein späteres Stück zurückgelegt.

Dasselbe kann von vornherein mit Mitteilungen geschehen, deren Satz aus irgendwelchen Gründen besondere Schwierigkeiten erwarten läßt, oder welche den in den §§ 3 und 4 enthaltenen Bestimmungen nicht entsprechen.

Die Reichsdruckerei sendet die Korrekturen an das Bureau der Akademie, das sie an die Verfasser oder an die Mitglieder, welche die Mitteilung vorgelegt haben, weiterreicht. Die Verfasser schicken die Korrekturabzüge nach Berichtigung an das Bureau der Akademie zurück und erhalten und erledigen auf dem gleichen Wege auch die etwa erforderlichen weiteren Korrekturen. Wird die Korrektur länger als bis Dienstag Abend von der damit betrauten Person behalten, so hat diese es zu verantworten, wenn die Mitteilung in einem späteren Stück erscheint.

Nach auswärts werden Korrekturen nur auf Verlangen versandt; die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mitteilung nach acht Tagen. Fremden Verfassern, deren Korrekturen erst noch dem vorlegenden Mitgliede zur Revision unterbreitet werden müssen, kann das Erscheinen am nächsten Ausgabetage überhaupt nicht zugesichert werden.

Aus § 36.

Die Akademie behält sich das Recht vor, von einer vergriffenen Abhandlung eine zweite Auflage zu veranstalten.

Abhandlungen der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Jahrgang	1925	*RM* 12.50
»	1926	» 5.—
»	1927	» 8.50

Einzelne Abhandlungen aus den Jahren 1921—1927

Hellmann:	Die Meteorologie in den deutschen Flugschriften und Flugblättern des XVI. Jahrhunderts. Ein Beitrag zur Geschichte der Meteorologie (1921, 1)	*RM* 5.—
Fick:	Über die Entstehung der Gelenkformen. Mit Tierversuchen (1921, 2)	» 2.—
Rubner:	Über die Wasserbindung in Kolloiden mit besonderer Berücksichtigung des quergestreiften Muskels (1922, 1)	» 4.—
Hellmann:	Versuch einer Geschichte der Wettervorhersage im XVI. Jahrhundert (1924, 1)	» 3.—
K. Bopp:	Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel (1924, 2)	» 4.—
Fick:	Einiges über Vererbungsfragen (1924, 3)	» 2.50
D. Mahnke:	Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis (1925, 1)	» 11.—
Hellmann:	Die Entwicklung der meteorologischen Beobachtungen in Deutschland von den ersten Anfängen bis zur Einrichtung staatlicher Beobachtungsnetze (1926, 1)	» 3.50
Hellmann:	Die Entwicklung der meteorologischen Beobachtungen bis zum Ende des XVIII. Jahrhunderts (1927, 1)	» 7.—

Die Preise verstehen sich in Reichsmark.

Sitzungsberichte der Akademie

Physikalisch-mathematische Klasse

Preis des Jahrgangs . . . . . *RM* 20.—

Sonderabdrucke. II. Halbjahr 1927

HAHN: Das Protactinium als radioaktives und als chemisches Element . . . . . *RM* 1.—
H. SEIFERT: Die Symmetrie von Kristallen des Pentaerythrit . . . . . » 1.—

Sonderabdrucke. I. Halbjahr 1928

PENCK: Die Ursachen der Eiszeit . . . . . *RM* 1.—
G. PÓLYA: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül . . . . } » 2.—
SCHUR: Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe . . . . . }
RUBNER: Über die physiologische Bedeutung wichtiger Bestandteile der Vegetabilien mit besonderer Berücksichtigung des Lignins . . . . . » 2.—
K. REINHARDT: Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope . . . . . » 1.—
RUBNER: Die Welternährung in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft . . . . . » 2.—
LUDENDORFF: Über die Abhängigkeit der Form der Sonnenkorona von der Sonnenfleckenhäufigkeit » 2.—
EINSTEIN: RIEMANN-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus . . . » 1.—
EINSTEIN: Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität . . » 1.—
G. PÓLYA: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete . . . . . » 1.—
E. HOPF: Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern . . . . . » 1.—
GUTHNICK: Über die Berücksichtigung der Extinktion bei lichtelektrischen Messungen . . . » 1.—
GUTHNICK: Bericht über den Stand der Vorbereitungen zur photographischen Überwachung des Himmels . . . . . » 1.—

Sonderabdrucke. II. Halbjahr 1928

RUBNER: Der Kampf des Menschen um das Leben . . . . . *RM* 2.50
KEIBEL: Zur Augenentwicklung der Beuteltiere . . . . . » 1.—
G. PÓLYA: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. (Zweite Mitteilung) . . . . . » 1.—
E. KAMKE: Verallgemeinerungen des JORDANschen Kurvensatzes und stetige Winkelfunktionen . » 2.—
v. FICKER: Bemerkungen über die meteorologischen Verhältnisse Teneriffas . . . . . » 1.—
HABERLANDT: Zur Entwickelungsphysiologie des Periderms . . . . . » 2.—
LANDAU: Der PICARD-SCHOTTKYsche Satz und die BLOCHsche Konstante. Zweite Abhandlung . . » 1.—
KOEBE: RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Zweite Mitteilung) . » 2.50
KOEBE: RIEMANNsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. (Dritte Mitteilung) » 3.50
FICK: Beobachtungen am Orangkehlsack (hierzu Taf. IV—VI) . . . . . « 1.—
HABERLANDT: Die Lage des Zellkerns in der Eizelle der Angiospermen und ihre physiologische Bedeutung . . . . . » 1.—
HOFMANN: Nitrit-Nitratbildung aus Ammoniak und Sauerstoff an alkalischen Oberflächen . . . » 1.—
R. WEITZENBÖCK: Differentialinvarianten in der EINSTEINschen Theorie des Fernparallelismus . . » 1.—
G. SZEGÖ: Verallgemeinerung des ersten BIEBERBACHschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete . . . . . » 1.—
BODENSTEIN: Kettenreaktionen . . . . . » 1.—
HABER und H.-D. Graf von SCHWEINITZ: Über Zündung des Knallgases durch Wasserstoffatome » 1.—
BIEBERBACH und SCHUR: Über die MINKOWSKIsche Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen . . . . . » 2.—
PASCHEN: Das erste Funkenspektrum des Quecksilbers Hg II . . . . . » 1.

Sonderabdrucke. I. Halbjahr 1929

EINSTEIN: Zur einheitlichen Feldtheorie . . . . . *RM* 1.—

Die Preise verstehen sich in Reichsmark.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01298 9943